O FUNKCIJAH

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.

2016-21

Kazalo

1 Splošni pojmi

1.1 Definicija, oznake

Z imenom **funkcija** v matematiki razumemo postopek, ki vsakemu elementu ene množice (običajno realnih števil) **priredi natanko** določenen element druge množice (običajno so tudi v tej množici realna števila). Elementom prve množice pravimo **neodvisne spremenljivke, praslike, tudi ”surovine”**, elementom druge pa **odvisne spremenljivke, funkcijske vrednosti, slike, tudi ”izdelki”**. **osnovne definicije**

zapis

Če neodvisno spremenljivko označimo z x, odvisno spremenljivko y, predpis za funkcijo pa s f, to zapišemo v eni od naslednjih oblik:

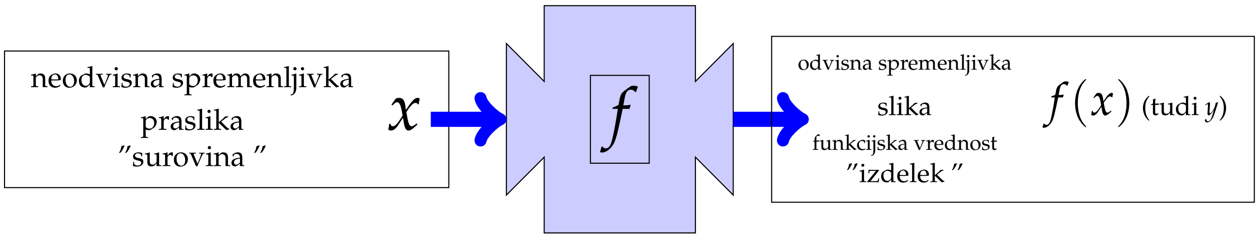
$y = f(x)$ ali $f : x \longmapsto f(x)$ ali $f : x \longmapsto y$ ali $x \xrightarrow{f} y$

Funkcijo lahko opišemo tudi kot **odvisnost** ene količine od druge ali več drugih količin. Odvisnost prikažemo z **enačbo** (enačba funkcije), pa tudi **formula** jo včasih imenujemo. Tako recimo formula za ploščino kvadrata $p = a^2$ predstavlja odvisnost ploščine od stranice kvadrata. Pri tem je p odvisna spremenljivka, a pa neodvisna spremenljivka. Pri nekaterih enačbah funkcij je neodvisnih spremenljivk lahko več, recimo v enačbi $o = 2a + 2b$ za obseg pravokotnika sta neodvisni spremenljivki obe stranici a in b. V enačbah (formulah) nastopajo tudi konkretna števila, recimo π v formuli za ploščino kroga $p = \pi \cdot r^2$, ki se ne spreminjajo in zato niso spremenljivke, so **konstante**.

Zgled 1: Preveri pravilnost naslednjo tabele za formule iz fizike in geometrije. Prva formula je za prostornino kvadra, druga je formula za hitrost pri premo enakomerno pospešenemu gibanju, kjer je a pospešek, v_0 začetna hitrost, zadnja formula pa je površina stožca s polmerom osnovne ploskve r in stranico s.

formula	neodvisna(e) spr.	odvisna spr.	konstante
$V = a \cdot b \cdot c$	a, b, c	V	$-$
$v = v_0 + a \cdot t$	t	v	v_0, a
$P = \pi r^2 + \pi r s$	r, s	P	π

Funkcijo si lahko predstavljamo tudi kot stroj. ”Surovine”, ki jih vstavljamo v **stroj**, so neodvisne spremenljivke, ”izdelki ”, ki jih stroj proizvede, pa so funkcijske vrednosti. Običajno ”surovine ”označujemo z x, ”izdelke ”pa z $f(x)$ ali tudi y.



V "funkcijskem stroju"so naprave, ki izdelujejo "izdelek "matematične operacije zapisane z izrazom, ki nam pove kako iz "surovine "proizvedemo "izdelek". Zapis $f(x) = x^2 - 3x - 4$ pomeni, da "surovini "x, ki je zapisana znotraj oklepaja $f(x)$, priredimo "izdelek "$f(x)$ tako, da "surovino "x kvadriramo, pomnožimo s 3, potem pa od prvega "polizdelka"x^2 odštejemo drugi "polizdelek "$3x$, od dobljene razlike pa odštejemo še 4. Zapis $f(3)$ pomeni, da mora naš stroj izdelati izdelek, ki ustreza surovini $x = 3$. Kako izračunamo $f(3)$? Povsod v izrazu (predpisu) funkcije, kjer je zapisan x, ga nadomestimo s 3, ki je zapisan znotraj oklepaja $f(3)$, torej:

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 - 4 = 9 - 9 - 4 = -4$$

Če bi bila neodvisna spremenljivka označena z a, bi zapisali $f(a) = a^2 - 3a - 4$, če bi bila $b + 1$, bi dobili $f(b+1) = (b+1)^2 - 3(b+1) - 4 = b^2 + 2b + 1 - 3b - 3 - 4 = b^2 - b - 6$.

Zgled 2: Naj bo $f(x) = 2 - 3x$. Izračunaj $f(0), f(-2), f(f(0))$ in reši enačbo $f(a) = -2$.

Kar je zapisano v oklepaju izraza $f(\ )$, je vrednost spremenljivke x v predpisu $f(x) = 2 - 3x$. Torej je $f(0) = 2 - 3 \cdot 0 = 2$, $f(-2) = 2 - 3 \cdot (-2) = 8$ in $f(f(0)) = 2 - 3 \cdot f(0) = 2 - 3 \cdot 2 = -4$.
Enačbo $f(a) = -2$ zapišemo v obliki $2 - 3a = -2$, jo preoblikujemo v enačbo $-3a = -4$, ki ima rešitev $a = \frac{4}{3}$ ■

Množica $\mathcal{A}$ neodvisnih spremenljivk je lahko v splošnem poljubna. V primeru, ko je $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ funkcijo imenujemo **zaporedje** in namesto x raje uporabljamo oznako n, namesto $f(n)$ ali y pa oznako a_n.

realna funkcija

Če so neodvisne (x) in odvisne spremenljivke (y) realna števila, ustrezno funkcijo imenujemo **realna** funkcija. V primeru realnih funkcij je **predpis matematični izraz** sestavljen iz neodvisne spremenljivke x, računskih operacij in že znanih matematičnih funkcij. V bodoče se bomo v tem gradivu ukvarjali le z realnimi funkcijami.

Zgled 3: **Naj bo $f(x) = x^2 - 2x$ realna funkcija. Reši enačbi:**

1. $f(x) = 3$

2. $f(2x) - 3f(x+1) + 1 = 0$

V prvem primeru z zamenjavo dobimo preprosto kvadratno enačbo $x^2 - 2x = 3$, ki ima rešitvi $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$. V drugem primeru najprej izračunamo $f(2x) = (2x)^2 - 2(2x) = 4x^2 - 4x$ in $f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) = x^2 - 1$. Dobljeno uvrstimo v enačbo in dobimo: $4x^2 - 4x - 3(x^2 - 1) + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. ■

eksplicitna implicitna oblika

Enačbo funkcije lahko zapišemo v **eksplicitni ali razviti obliki**, recimo $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, lahko pa v **implicitni ali nerazviti obliki**, recimo $3x - 2y + 1 = 0$ ali $x^2 + y^2 = 1$. V implicitni obliki je odvisna spremenljivka **skrita** ali **nerazvita** v enačbi. Če to enačbo po neznanki y znamo rešiti (torej izračunamo y), dobimo eksplicitno obliko.

Zgled 4: **Zapiši v eksplicitni obliki naslednje implicitno podane funkcije:**

1. $3x - 4y + 2 = 0$

2. $x^2 + y^2 = 1$

3. $2^{y-1} + 3x = 1$

V prvem primeru moramo rešiti preprosto linearno enačbo po neznanki y:

$$3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow -4y = -3x - 2| : (-4) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Torej je eksplicitna oblika linearna funkcija $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

V drugem primeru imamo opravka s kvadratno enačbo z neznanko y. Rešitvi sta dve $y = \sqrt{1-x^2}$ in $y = -\sqrt{1-x^2}$. Ker imamo opravka s funkcijo, ta pa izbranemu x priredi natanko določeno, torej le eno, se moramo odločiti, katero od izračunanih vrednosti bomo izbrali. Pri korenih običajno izberemo za eksplicitno obliko pozitivno vrednost. Torej je $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

V tretjem primeru je odvisna spremenljivka y v eksponentu, zato imamo opravka z eksponentno enačbo. Take enačbe pa rešujemo z logaritmi. Zato je:

$$2^{y-1} + 3x = 1 \Rightarrow 2^{y-1} = 1 - 3x \Rightarrow y - 1 = \log_2(1-3x) \Rightarrow y = \log_2(1-3x) + 1$$

Torej je eksplicitna oblika te funkcije $f(x) = \log_2(1-3x) + 1$. ■

1.2 Definicijsko območje, zaloga vrednosti, graf

Definicijsko območje funkcije f je podmnožica tistih realnih števil, za katere lahko izvršimo funkcijski predpis, drugače povedano, za elemente x iz definicijskega območja lahko izračunamo ustrezni y, za elemente x izven definicijskega območja pa ustreznega y ne moremo izračunati. Definicijsko območje funkcije $y = f(x)$ označimo z $\mathcal{D}_f$.

definicijsko območje

Zgled 5: Določi $\mathcal{D}_f$ za funkciji $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ in $g : x \mapsto \frac{1}{x-2}$.

Pri funkciji $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ predpis lahko vedno izvršimo, torej za vsak x lahko izračunamo $y = f(x)$, zato je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, pri funkciji $g : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ pa predpisa ne moremo izvršiti za $x = 2$ (deljenje z 0), zato $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \backslash \{2\}$. ■

Recimo, da imamo realno funkcijo, v kateri kot predpisi nastopajo le elementarne računske operacije ($+$, $\cdot$, $-$, $:$ ali $\sqrt{}$). Pri takih funkcijah sta ”nevarni računski operaciji deljenje in korenjenje.

Zgled 6: Naj bo $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{x+1}$. Določi $\mathcal{D}_f$.

Pri računanju prvega člena moramo paziti, da je $2 - x > 0$ (z 0 ne moremo deliti), pri drugem členu pa moramo vzeti $x + 1 \geq 0$. Ker morata biti izračunljiva oba člena, je $\mathcal{D}_f = [-1, 2)$. ■

zaloga vrednosti

Zaloga vrednosti funkcije f je podmnožica vseh tistih realnih števil, ki so funkcijska vrednost ali slika kakega realnega števila $x \in \mathcal{D}_f$. Drugače rečeno: V $\mathcal{Z}_f$ so vsi tisti $y \in \mathcal{B}$, za katere je enačba $f(x) = y$ po neznanki x (y je znanka), **rešljiva**.

Zgled 7: (a) Ali je število 3 v zalogi vrednosti funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$? Odgovor utemelji Podobno vprašanje za število 0 in funkcijo $g : x \mapsto \frac{1}{x-2}$.

(b) Katera realna števila so v zalogi vrednosti funkcij f in g?

(a) Število 3 je v zalogi vrednosti funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, ker ima enačba $2x^2 - 3x + 1 = 3$ celo dve rešitvi $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, število 0 pa ni v zalogi vrednosti funkcije $g : x \mapsto \frac{1}{x-2}$, ker enačba $\frac{1}{x-2} = 0$ nima rešitve.

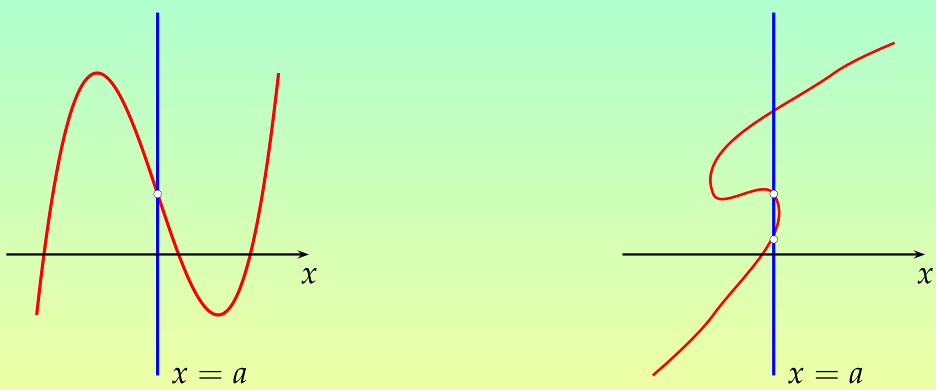
(b) Vzemimo poljubno realno število y in rešimo enačbo $2x^2 - 3x + 1 = y$ po neznanki y. Enačbo uredimo $2x^2 - 3x + (1 - y) = 0$ in upoštevamo, da ima nastala kvadratna enačba natanko eno rešitev, ko je njena diskriminanta D nenegativna, torej $D \geq 0$. Izračunajmo diskriminanto in upoštevjmo zapisan pogoj:

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - y) = 1 + 8y;\ D \geq 0 \Rightarrow 1 + 8y \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{8}$$

Torej so v zalogi vrednosti vsa realna števila, ki so večja ali enaka $-\frac{1}{4}$, ali drugače zapisano $\mathcal{Z}_f = [-\frac{1}{8}, \infty)$.
V primeru funkcije g rešujemo enačbo $\frac{1}{x-2} = y$ po neznanki x. Odpravimo ulomke $1 = xy - 2y$, osamimo neznanko $xy = 1 + 2y$ in izračunamo $x = \frac{1+2y}{y}$. Neznanko x lahko izračunamo za vse, od 0 različne y, zato je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

graf funkcije

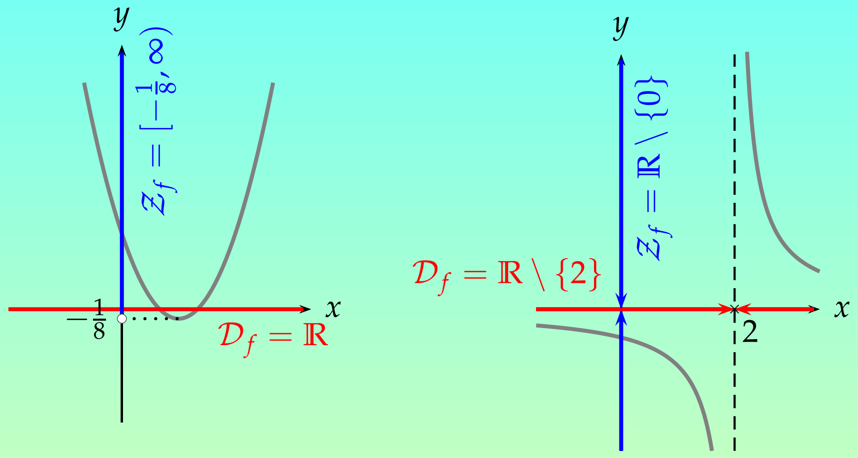
Graf funkcije $y = f(x)$ je množica **vseh** točk $T(x, y)$, kjer so abscise x iz definicijskega območja funkcije f, ordinate y pa so ustrezne funkcijske vrednosti $f(x)$. Graf funkcije je krivulja, ki jo prikažemo v pravokotnem koordinatnem sistemu. Ni pa vsaka krivulja v koordinatnem sistemu graf neke funkcije. Funkcija prireja vsakemu x kvečjemu eno funkcijsko vrednost $y = f(x)$, pri krivulji pa se lahko zgodi, da sta (so) enemu x prirejeni dve (več) vrednosti y, torej več točk. Na spodnji sliki sta prikazana dva primera krivulj. Prva (leva) je graf neke funkcije, saj je vsakemu x prirejena natanko določena točka, druga (desna) krivulja, pa ni graf funkcije, sa je nekaterim x (v našem primeru $x = a$) prirejenih več točk. V drugem primeru pravimo, da je krivulja graf neke **relacije**.



Definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije lepo prikažemo z grafom funkcije.

prikaz $\mathcal{D}_f$ in $\mathcal{Z}_f$ z grafom funkcije

Na spodnjih slikah sta narisana grafa funkcij $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ in $g(x) = \frac{1}{x-2}$:

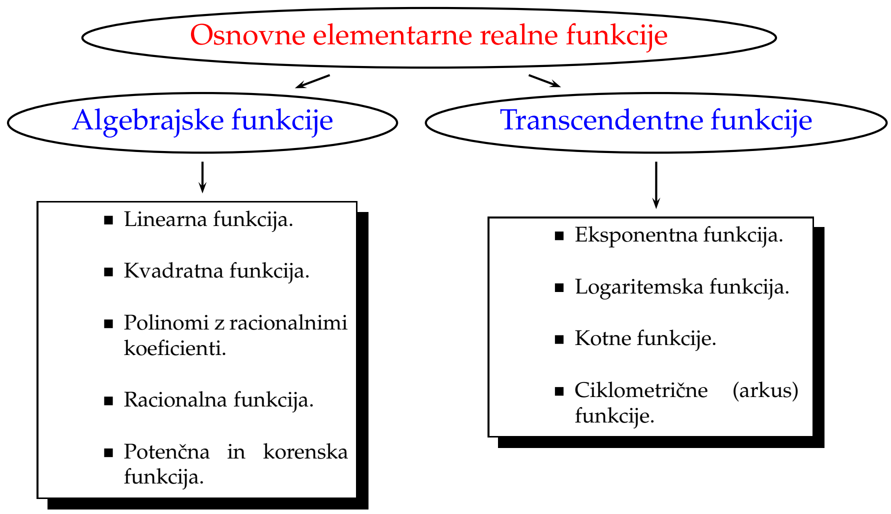


Če točke grafa **pravokotno projeciramo na abscisno os** opazimo, da v prvem primeru projekcije pokrijejo celotno abscisno os, v drugem pa celotno abscisno os brez točke, ki predstavlja število 2. V obeh primerih sta projekciji pokrili na abscisni osi ravno definicijsko območje funkcije.

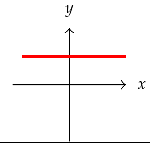
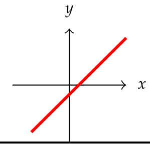
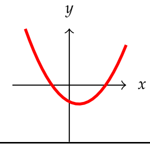
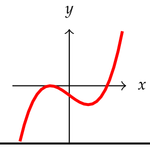
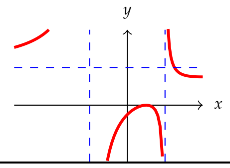
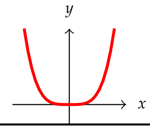
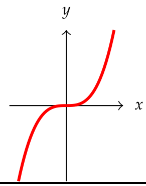
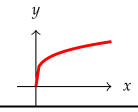
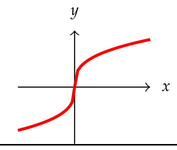
Podobno **pravokotne projekcije** točk grafa funkcije **na ordinatno os** pokrijejo na ordinatni osi ravno zalogo vrednosti funkcije.

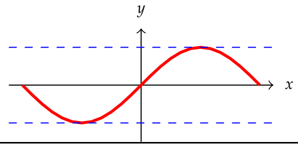
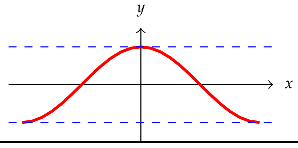
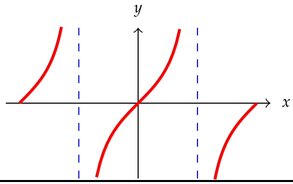
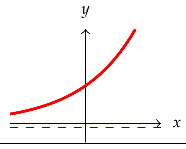
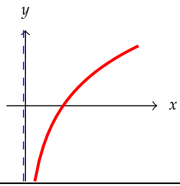
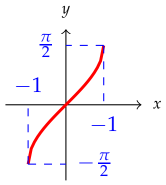
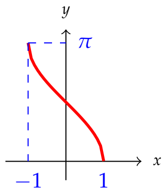
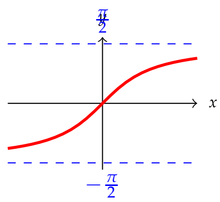
Realne funkcije delimo v dve skupini: **algebrajske** in **transcendentne** (nadizkustvene).

pregled elementarn realnih funkcij



Kako ocenimo v katero skupino uvrstimo ustrezno funkcijo? Matematično ne čisto ustrezen, toda za nas kar zadovoljiv kriterij je ugotovitev, katere in koliko računskih operacij nastopa v funkcijskem predpisu. Če v funkciji nastopa **končno seštevanj, odštevanj, množenj, deljenj in korenjen s katerikoli naravnim eksponentom**, funkcija sodi med algebrajske, če pa nastopajo poleg osnovnih operacij še kake druge računske operacije, recimo logaritmiranje, sinus in tako naprej, sodi funkcija med transcendentne.

Funkcija	Primer	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{Z}_f$	Oblika grafa
konstantna	$f(x) = 2$	$\mathbb{R}$	$\{2\}$	
linearna	$f(x) = x - \frac{1}{4}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
kvadratna	$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{16}$	$\mathbb{R}$	$[-\frac{1}{2}, \infty)$	
polinom	$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
racionalna	$f(x) = \dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{x^2-1}$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$	$(-\infty, 0] \cup [\frac{3}{4}, \infty)$	
soda potenca	$f(x) = x^4$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	
liha potenca	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
sodi koren	$f(x) = \sqrt[4]{x}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	
lihi koren	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

Funkcija	Primer	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{Z}_f$	Oblika grafa
sinus	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	
kosinus	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	
tangens	$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\}$	
eksponentna	$f(x) = 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	
logaritemska	$f(x) = \log_2 x$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	
arkussinus	$f(x) = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
arkuskosinus	$f(x) = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
arkustangens	$f(x) = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	

risanje grafa

Graf funkcije f je množica vseh točk $T(x, y)$, kjer je y vrednost funkcije f pri ustrezne x, torej $y = f(x)$. Opisano zapišemo v obliki:

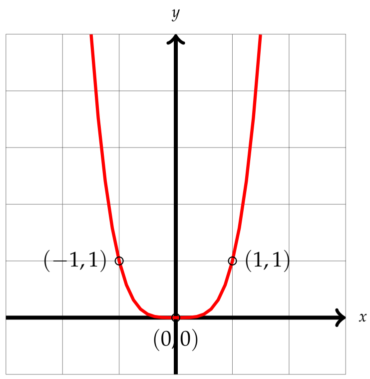
$$\mathcal{G}_f = \{T(x, y);\ (x \in \mathcal{D}_f) \wedge (y = f(x))\}$$

V opisu grafa je tudi preprost način risanja grafa: sestavimo tabelo vseh točk $(x, f(x))$ in jih narišemo v koordinatnem sistemu. Toda ta način ima veliko pomankljivost. V $\mathcal{D}_f$ je običajno neskončno vrednosti x, zato bi morali za približek grafa vzeti zadostno končno število vrednosti za x.

Za nekatere funkcije, katerih graf ima lepo obliko, je risanje s tabelo enostavno. Recimo, za graf linearne funkcije vemo, da je premica, ta pa je natanko določena z dvema točkama, zato za tabelo zadostujeta že dve izbrani vrednosti za x. Tudi monotone (naraščajoče ali padajoče) funkcije imajo predvidljivo obliko, zato jih lahko narišemo z nekaj točkami, recimo **potenčno, korensko eksponentno, logaritemsko**:

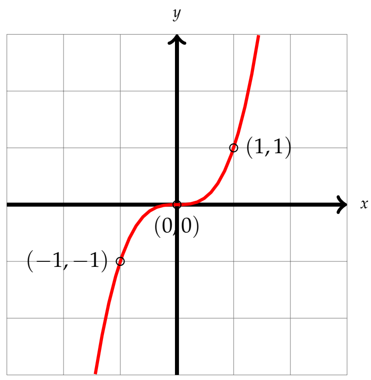
$\boxed{f(x) = x^4}$

x	0	1	-1
y	0	1	1



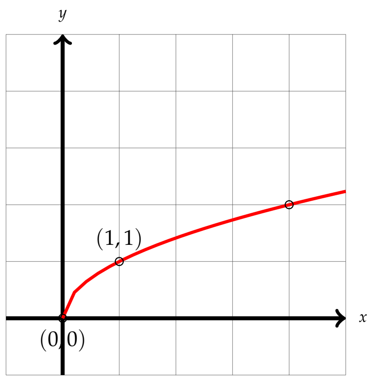
$\boxed{f(x) = x^3}$

x	0	1	-1
y	0	1	-1



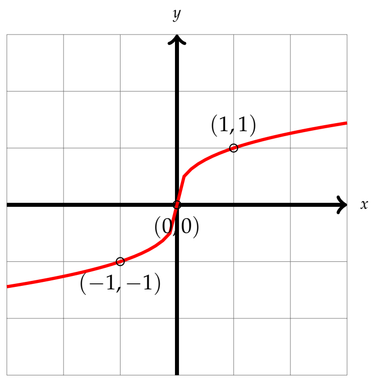
$f(x) = \sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2



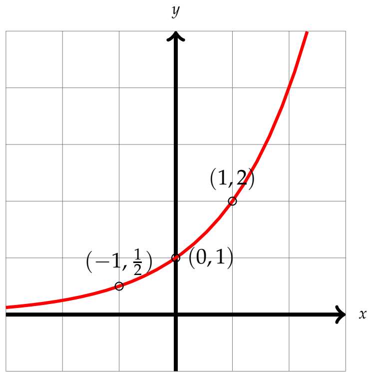
$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x}}$

x	0	1	-1
y	0	1	-1



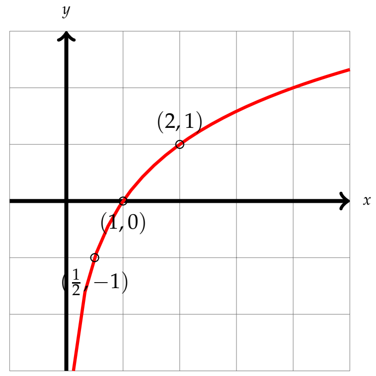
$\boxed{f(x) = 2^x}$

x	0	1	-1
y	0	2	$\frac{1}{2}$



$\boxed{f(x) = \log_2 x}$

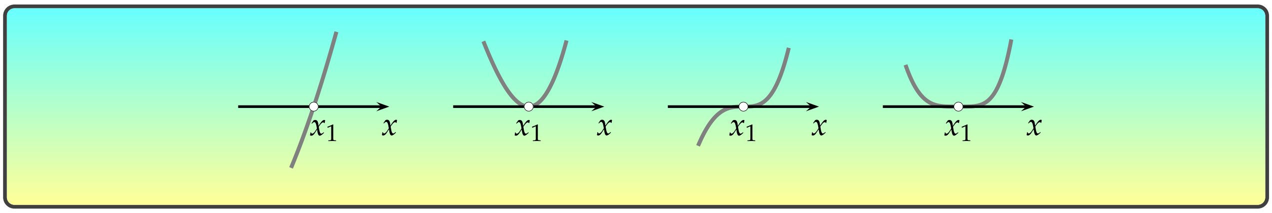
x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1



S tabelo rišejo grafe računala, ker lahko obdelajo ogromno število računskih operacij v kratkem času. Mi pa bomo morali grafe naristi na drug način, z značilnimi točkami.

1.3 Značilne točke funkcije

Število x_1 je **ničla** funkcije f, če je $f(x_1) = 0$. Na grafu funkcije je ničla predstavljena s točko, v kateri graf funkcije **seka** ali pa se **dotakne** abscisne osi. Na spodnji sliki so prikazani štirje možni tipi ničel funkcije. **ničla funkcije**



Slika 1: Grafična podoba ničel 1., 2., 3. in 4. stopnje

Zgled 8: Izračunaj ničle funkcij: $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
3. $p(x) = 24x^3 + 10x^2 - 13x - 6$

Po opisu (definiciji) je ničla funkcije tako število x, da je ustrezna funkcijska vrednost enaka 0. Zato ničle funkcije $y = f(x)$ najenostavneje poiščemo tako, da rešimo enačbo $f(x) = 0$, rešitve enačbe pa so potem ničle funkcije. V prvem primeru je to preprosta linearna enačba $3x - 2 = 0$, ki ima rešitev $x = \frac{2}{3}$, v drugem primeru pa prevedemo reševanje korenske enačbe na reševanje preproste kvadratne enačbe $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ta ima rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$.
V tretjem primeru se spomnimo, da smo ničle polinomov s celimi koeficienti poskušali poiskati s Hornerjevim algoritmom. Kandidati za cele ničle so delitelji prostega člena, torej: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, kandidati za racionalne ničle pa so ulomki:

$$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{12}$$

Preizkus s celimi ničlami ne prinese uspeha, zato poskusimo z racionalnimi ničlami. Poskusimo s $\frac{3}{4}$:

	24	10	-13	-6
$\frac{3}{4}$		18	21	6
	24	28	8	$\|\|0$

Ugotovili smo, da je $x_1 = \frac{3}{4}$. Ostale ničli, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$ dobimo v enačbi $24x^2 + 28x + 8 = 0$, še lažje pa v okrajšani enačbi $6x^2 + 7x + 2 = 0$. ■

začetna vrednost

Število $n = f(0)$ je **začetna vrednost** funkcije f. Na grafu je začetna vrednost predstavljena s točko $(0, n)$ ali drugače povedano, začetna vrednost je točka grafa funkcije, kjer graf seka ordinatno os.

Zgled 9: Izračunaj začetno vrednost funkcije $f(x) = |f(x-1) - 2|$, če je $f(x) = 2^x$.

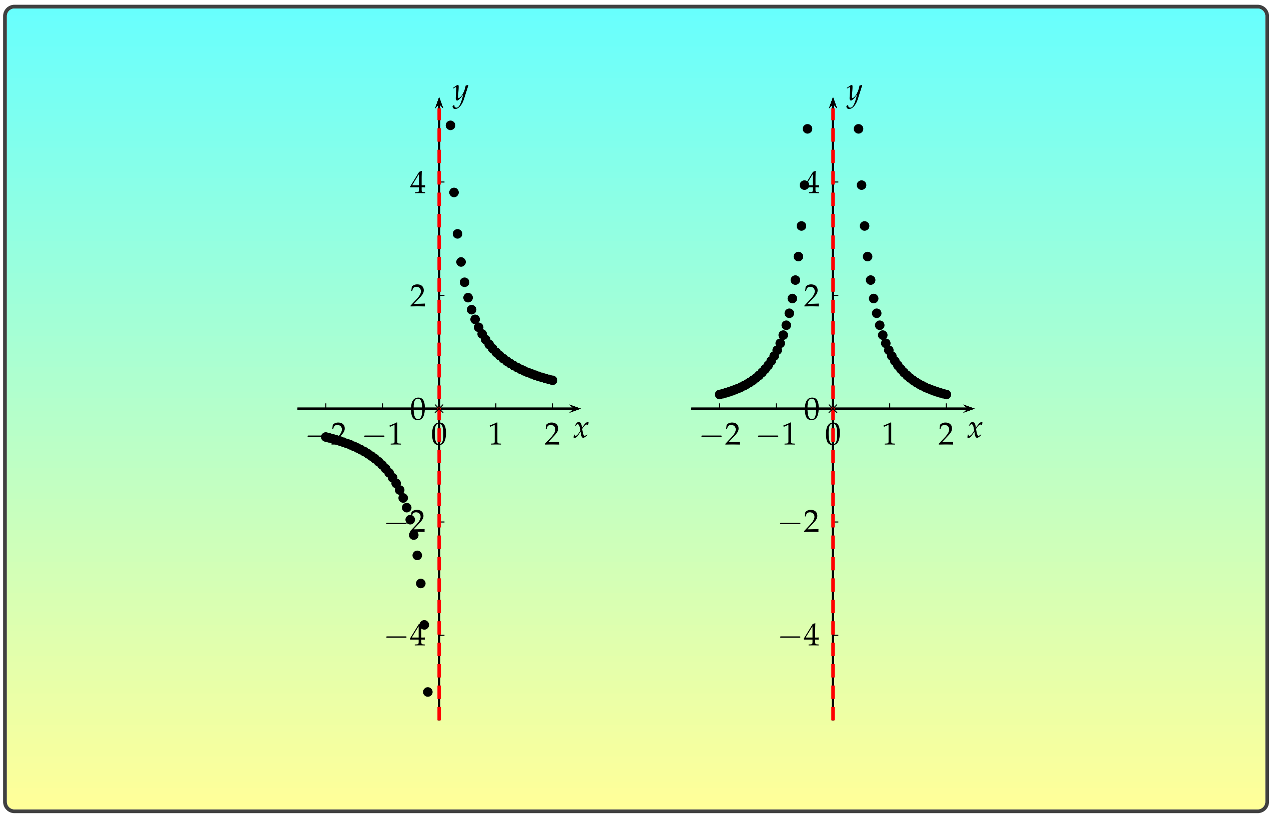
Začetno vrednost izračunamo tako, da izračunamo vrednost $f(0)$ ali drugače povedano, v funkcijski predpis vstavimo vrednost 0 namesto neodvisne spremenljivke x. Torej:

$$f(0) = |f(0-1) - 2| = |f(-1) - 2| = |2^{-1} - 2| = |\frac{1}{2} - 2| = |-\frac{3}{2}| = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Tako smo izračunali začetno vrednost funkcije $f(0) = 1\frac{1}{2}$. ■

Opišimo še eno značilno točko funkcije, **pol** funkcije.

pol funkcije

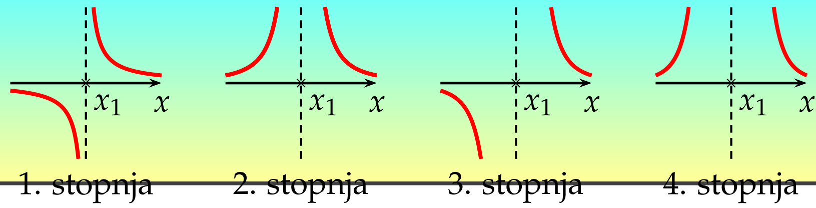


Slika 2: Delna grafa funkcij $f(x) = \frac{1}{x}$ in $f(x) = \frac{1}{x^2}$ okoli pola $x = 0$

Vzemimo za primer funkciji $f(x) = \frac{1}{x}$ in $f(x) = \frac{1}{x^2}$. V obeh primerih funkcija f ni definirana pri $x = 0$, je pa definirana v bližnji okolici števila 0. Zanima nas, kako se funkcija obnaša v okolici števila 0. Obnašanje je najbolje raziskati s kakšnim od računalniških programov dinamične geometrije, mi pa bomo raziskali obnašanje s sliko, ki jo je narisal računalnik na intervalih $(-2, -0.2)$ in $(0.2, 2)$ s 60 točkami. Kaj opazimo? Ko se bližamo z vrednostjo spremenljivke x proti številu 0, vrednosti funkcije presežejo še tako veliko pozitivno ali negativno število, pravimo, da gredo vrednosti funkcije v **neskončnost** (v primeru funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ v $+\infty$ ali v $-\infty$, v primeru funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pa le v $+\infty$). Abscise funkcij, kjer se funkcija obnaša na opisan način, imenujemo **pol** funkcije. Na grafu obnašanje funkcije v polu prikažemo tako, da narišemo v polu navpično premico (v primeru izbranih funkcij premico $x = 0$), ki jo imenujemo **navpična** asimptota. Običajno navpično asimptoto narišemo črtkano. Graf funkcije se približuje navpični asimptoti, ko se približujemo polu.

Podobno kot ničle funkcije ločimo po stopnji, imamo tudi pole lihe in sode stopnje. Na spodnji sliki so prikazani nekateri tipi:

Kako izračunamo pole funkcije? Pri funkcijah, ki vključujejo deljenje, se poli običajno pojavijo pri takih vrednostih x, pri katerih je delitelj (imenovalec) **enak 0**, deljenec (števec) pa



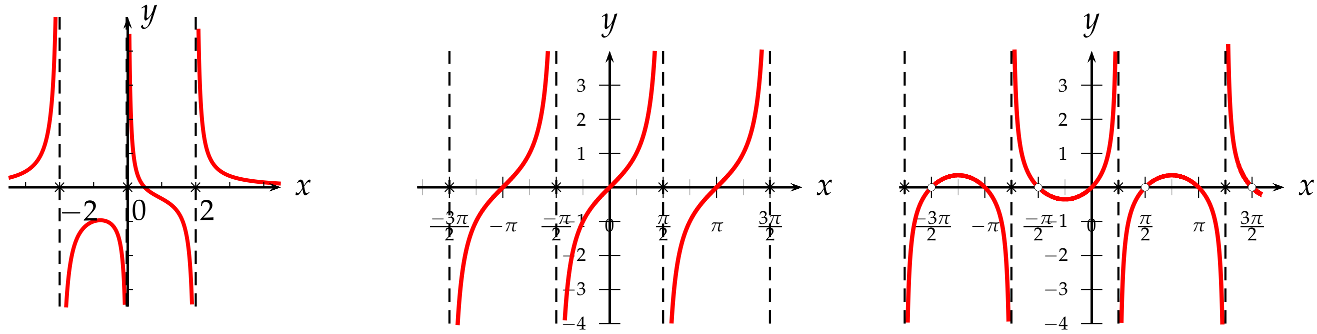
tam **ni enak 0**. Seveda pa moramo vseeno raziskati obnašanje funkcije v okolici potencialnih polov.

Zgled 10: Izračunaj pole funkcij:

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-4x}$ 2. $g(x) = \tan x$ 3. $h(x) = \dfrac{\sin x}{1-\tan x}$

Racionalna funkcija f ni definirana za tiste x, kjer je vrednost imenovalca enaka 0. Torej moramo za to, da izračunamo pole rešiti enačbo $x^3 - 4x = 0$. Desno stran razstavimo v obliko $x(x-2)(x+2) = 0$ in preberemo pole $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Pri nobeni od teh vrednosti števec ni enak 0, preprosti izračuni pa pokažejo, da so te vrednosti res poli.

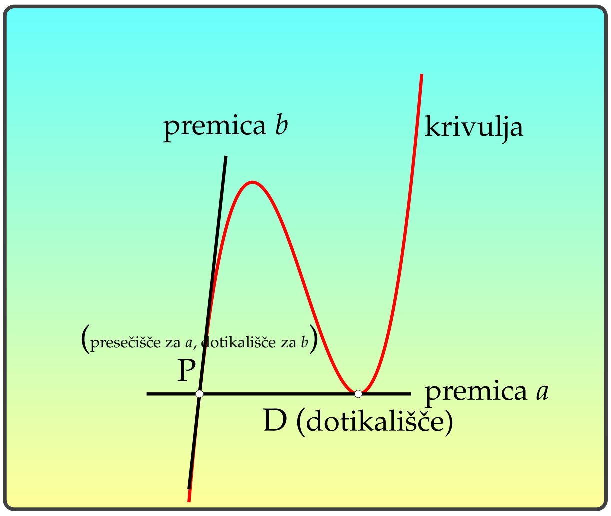
Funkcijo tan lahko zapišemo tudi v obliki $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Torej ni definirana za tiste x, za katere je $\cos x = 0$. Zato so potencialni poli $x = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ker je pri teh vrednostih vrednost funkcije sin (števec) različna od 0, so zapisane vrednosti res poli.



Slika 3: Grafi funkcij $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-4x}$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \frac{\sin x}{1-\tan x}$

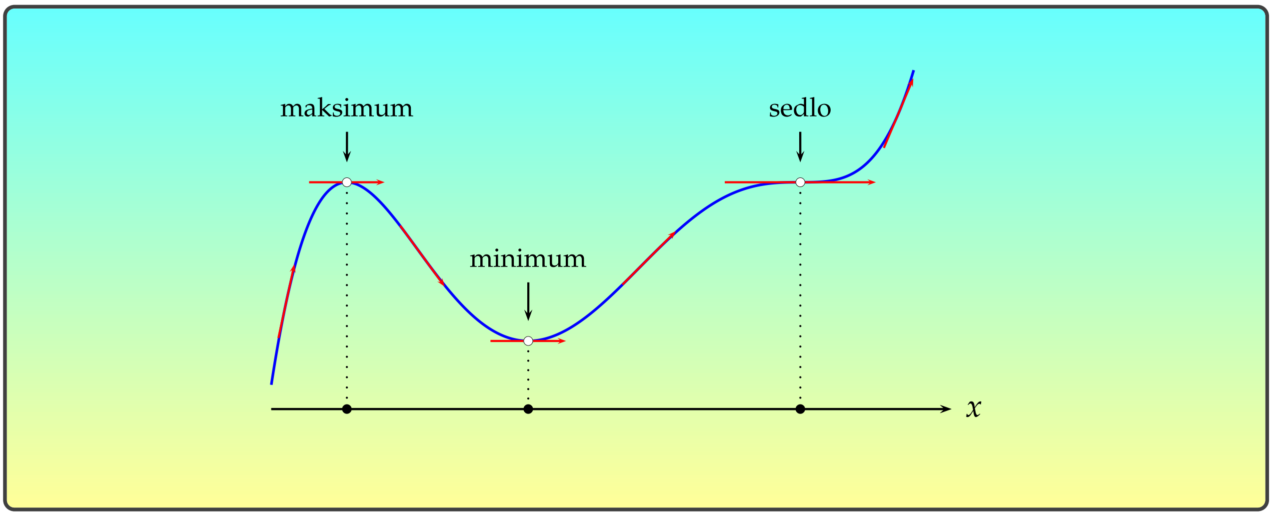
V zadnjem primeru imamo opravka z dvema družinama vrednosti, v katerih je funkcija nedefinirana. Pri $x = 0 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ni definirana funkcija tan, pri $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ pa je imenovalec funkcije h enak 0. V bližini točk prve družine vrednosti postane imenovalec funkcije h neskončno velik, zato postanejo funkcijske vrednosti funkcije h zelo majhne, torej se bližajo ničli. Zato ta družina točk nedefiniranosti (na sliki so označene z belimi krožci) niso poli. Druga družina točk nedefiniranosti pa predstavlja pole .

Spomnimo se, da je tangenta na krožnico premica, ki ima s krožnico natanko eno skupno točko, dotikališče. Če krožnico zamenjamo s poljubno krivuljo, definicija tangente ni več tako preprosta. Za **tangento v dani točki krivulje proglasimo tisto premico, ki se krivulji v tisti točki "najbolj prilega"**, kaj pa pomeni "najbolj prilega" spoznamo pri poglavju o odvodu. Na naslednji sliki je premica a tangenta na krivuljo z dotikališčem D, v točki P pa je premica a sekanta krivulje. V tej točki se krivulji najbolj prilega premica b.



stacionarne točke

Stacionarne točke funkcije so tiste točke na grafu funkcije, ki imajo tangento vzporedno abscisni (x) osi, torej take točke grafa, v katerih je smerni koeficient tangente ($= k_t$) enak 0.



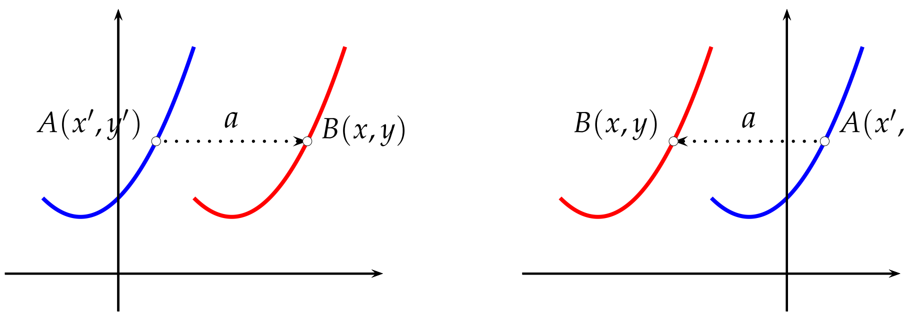
Slika 4: Stacionarne točke na "hribovju", grafu funkcije

Kako izračunamo in razvrstimo stacionarne točke funkcije pa si oglej v poglavju o odvodu funkcije.

2 Premiki in raztegi grafa funkcije

2.1 Premik v smeri osi x

Imejmo v koordinatni ravnini graf funkcije $y = f(x)$. Premaknemo ga v smeri osi za pozitivno število a v desno ali levo, kot je prikazano na spodnjih slikah:



Zanima nas enačba funkcije, ki jo predstavlja premaknjeni graf. Recimo, da je iskana enačba $y = g(x)$. Obdelajmo najprej premik v desno. Vzemimo poljubno točko A na grafu funkcije $y = f(x)$. Njeni koordinati naj bosta A(x', y'), kjer je $y' = f(x')$. Premik v smeri osi x premakne točko A v točko B(x, y) na grafu funkcije $y = g(x)$. Med koordinatami točk očitno veljata zvezi: $x' = x - a$ in $y' = y$. Potem je $g(x) = y = y' = f(x') = f(x - a)$. Zato je $g(x) = f(x - a)$.

V primeru premika funkcije v levo je $x' = x + a$ in $y' = y$. Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem primeru in dobimo $g(x) = f(x + a)$.

Povzemimo:

premik v smeri osi x

Če premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a vzdolž abscisne osi

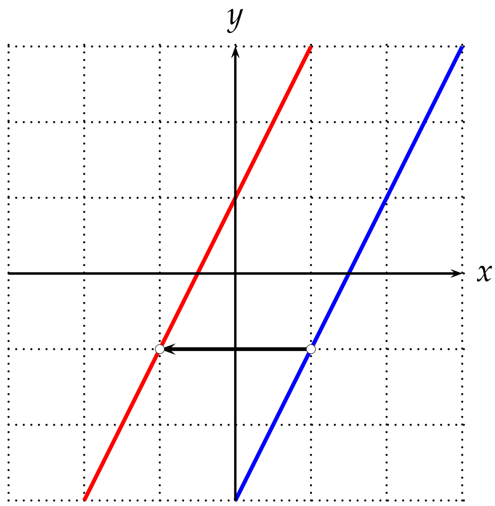
v desno, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x - a)$

v levo, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x + a)$

Zgled 11: Zapiši enačbo funkcije $y = g(x)$, če njen graf dobimo tako, da premaknemo graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ za dve enoti v levo.

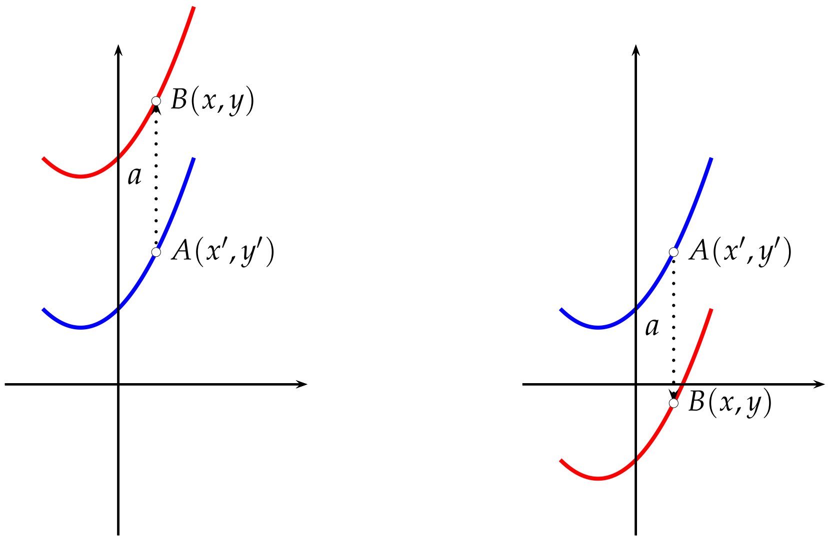
Uporabimo zadnje ugotovitve. Ker imamo premik v levo, je $g(x) = f(x+2) = 2(x+2) - 3 = 2x + 1$.

Nalogo uženemo lahko tudi takole. Ker je graf funkcije f premica, premik za dve enoti v levo, pa to premico premakne v vzporedno premico. Vzporedni premici imata enak smerni koeficient k, zato ima funkcija g obliko: $g(x) = 2x + n$. Izračunati moramo še n. Zato izberimo na grafu funkcije f točko, recimo $(1, -1)$ $(y = 2 \cdot 1 - 3 = -1)$, jo vzporedno premaknimo za dve enoti v levo, da dobimo točko $(1 + (-2), -1) = (-1, -1)$. Ker dobljena točka leži na grafu funkcije g, dobimo $-1 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = 1$ in $g(x) = 2x + 1$. Na desni je še ustrezna slika:



2.2 Premik v smeri osi y

V tem primeru premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a v smeri ordinatne osi y, enkrat navzgor, drugič navzdol tako, kot je prikazano na spodnjih slikah:



Tako kot v primeru premika v smeri osi x, nas tudi v tem primeru zanima enačba funkcije, ki jo predstavlja premaknjeni graf. Recimo, da je iskana enačba $y = g(x)$. Najprej premik v navzgor. Vzemimo poljubno točko $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$. Premik v smeri osi y premakne točko A v točko $B(x, y)$ na grafu funkcije $y = g(x)$. Med koordinatami točk očitno veljata zvezi: $x = x'$ in $y = y' + a$. Potem je $g(x) = y = y' + a = f(x') + a = f(x) + a$. Zato je $g(x) = f(x) + a$.

V primeru premika funkcije navzdol je $x = x'$ in $y = y - a$. Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem primeru in dobimo $g(x) = f(x) - a$.

Povzemimo:

premik v smeri osi y

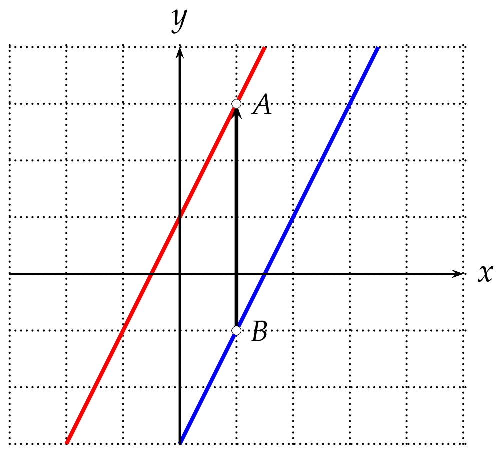
Če premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a vzdolž abscisne osi

navzgor, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x) + a$

navzdol, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x) - a$

Zgled 12: Zapiši enačbo vzporednice k premici z enačbo $y = 2x - 3$, ki poteka skozi točko $A(1,3)$.

V poglavju o premici (1./2.letnik) smo tako nalogo rešili ugnali tako, da smo ugotovili, da je smerni koeficient vzporedne premice enak smernemu koeficientu dane premice ($k = 2$), začetno vrednost n pa smo izračunali z dano točko A : $n = y_1 - kx_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Torej je enačba iskane premice $y = 2x + 1$.



Enak rezultat dobimo tudi tako, da dano premico vzporedno premaknemo skozi točko A. V ta namen poiščemo na dani premici točko B, ki ima isto absciso kot točka A. Kratek račun $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ pove, da je ordinata točke B enaka -1. Torej smo premico premaknili v smeri osi y za $3 - (-1) = 4$ navzgor, zato je enačba vzporednice $y = (2x - 3) + 4 = 2x + 1$. Opisano je prikazano na gornji sliki. ■

Zgled 13: Zapiši enačbo funkcije $y = g(x)$, katere graf dobimo, ko premaknemo graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 2x$ za 2 v desno v smeri x osi in za 1 navzdol v smeri y osi.

Premik v smeri osi x nam da funkcijo

$$h(x) = (x-2)^2 - 2(x-2)$$

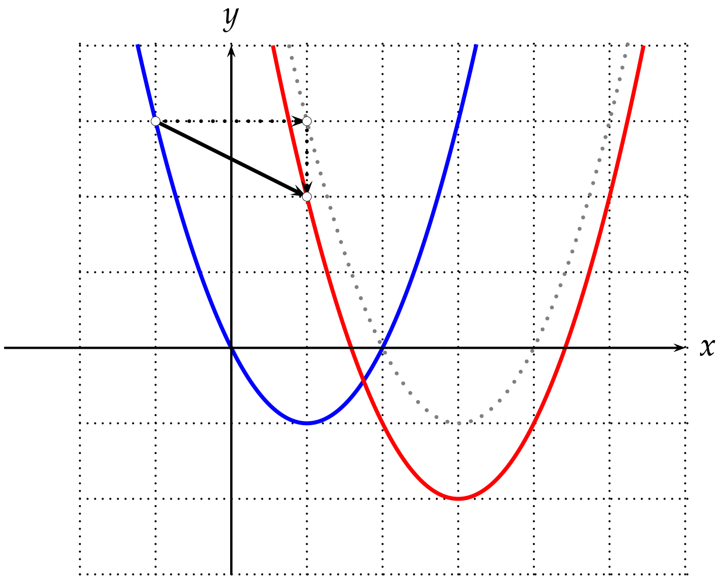
tej funkciji pa pomik za eno navzdol da iskano funkcijo

$$g(x) = (x-2)^2 - 2(x-2) - 1$$

Ko uredimo, dobimo:

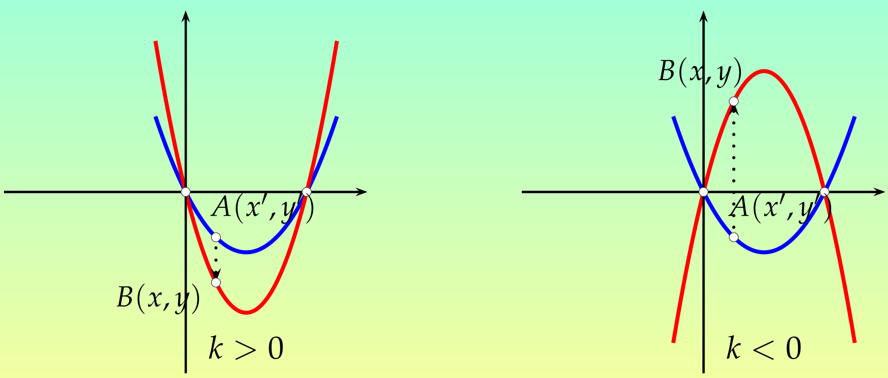
$$g(x) = x^2 - 6x + 7$$

Na sliki je modro narisan graf funkcije f, graf funkcije g pa je rdeč.



2.3 Razteg v smeri osi y

Recimo, da smo ordinato y' vsake točke $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$ pomnožili s faktorjem k. Tako dobimo novi graf, ki ga sestavljajo točke $B(x, y)$, kjer je $x = x'$ in $y = k \cdot y'$. Opisano operacijo imenujemo **razteg grafa funkcije s faktorjem** k v smeri osi y in zanima nas, kako se enačba $y = g(x)$ novega grafa izraža z enačbo $y = f(x)$ starega grafa.



Ker je $x = x', y = ky'$, je iskana enačba: $g(x) = y = ky' = kf(x') = kf(x)$, torej:

razteg v smeri osi y

$$\boxed{g(x) = kf(x)}$$

Dodajmo še, da postane razteg v primeru, ko je $k = -1$, zrcaljenje preko osi x in, da so ničle obeh, funkcije $f(x)$ in njenega raztega $g(x) = kf(x)$, enake.

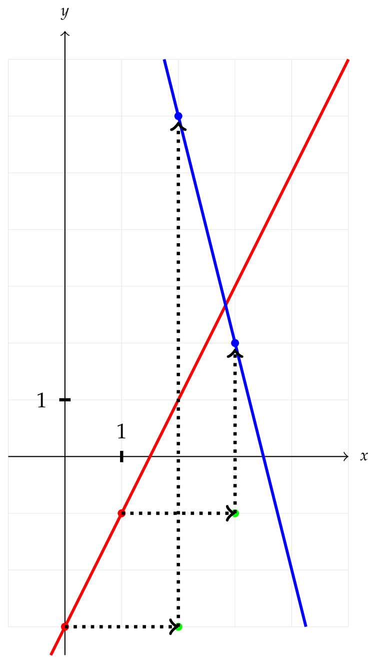
Zgled 14: Zapiši enačbo funkcije, katere graf dobimo, ko graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ premaknemo za 2 v desno in raztegnemo s faktorjem -2 v smeri osi y.

Premik za 2 v desno spremeni funkcijski predpis iz $y = 2x - 3$ v predpis $y = 2(x - 2) - 3 = 2x - 7$, razteg za -2 v smeri osi y pa ta predpis prevede v predpis $y = -2(2x - 7) = -4x + 14$. Torej je iskana enačba funkcije $y = -4x + 14$.

Do enakega rezultata pridemo tudi takole. Na grafu funkcije f (premica) izberemo dve točki, recimo začetno $(0, -3)$ in $(1, -1)$. Točki premaknemo za dve v desno in dobleni točki raztegnemo v smeri osi za faktor -2:

$(0, -3) \to (0 + 2, -3) = (2, -3) \to (2, (-3) \cdot (-2)) = (2, 6)$

$(1, -1) \to (1 + 2, -1) = (3, -1) \to (3, (-1) \cdot (-2)) = (3, 2)$



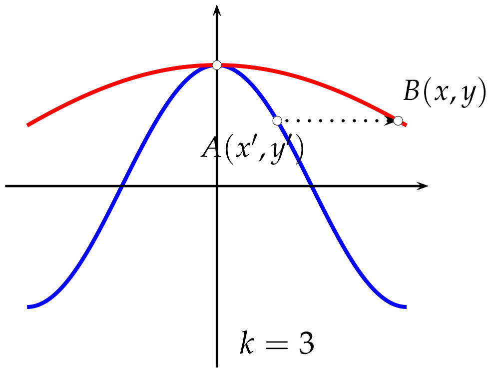
Potem je $k = \frac{2-6}{3-2} = -4$ in $n = 2 - (-4)(3) = 14$ in tako $y = g(x) = -4x + 14$. ■

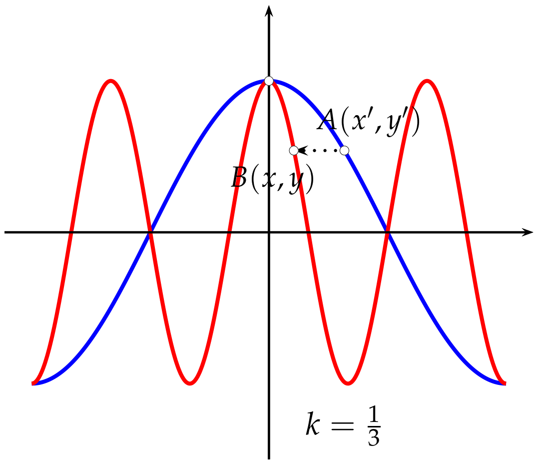
2.4 Razteg v smeri osi x

Vzemimo, da absciso x' vsake točke $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$ pomnožimo s faktorjem k, ordinato y' točke pa ohranimo. Tako dobimo nov graf, ki ga sestavljajo točke $B(x, y)$, kjer je $x = k \cdot x'$ in $y = y'$. Opisano operacijo imenujemo **razteg grafa funkcije s faktorjem** k v smeri osi x. Zanima nas, kako se enačba $y = g(x)$ novega grafa izraža z enačbo $y = f(x)$ starega grafa.

Izrazimo še enačbo novega grafa z enačbo starega grafa. Ker je $x = k \cdot x'$, $y = y'$ in $y' = f(x')$, je $g(x) = y = y' = f(x') = f(\frac{x}{k})$. Torej je enačba, v smeri osi x, s faktorjem k raztegnjenega grafa:

$$\boxed{g(x) = f(\frac{x}{k})}$$



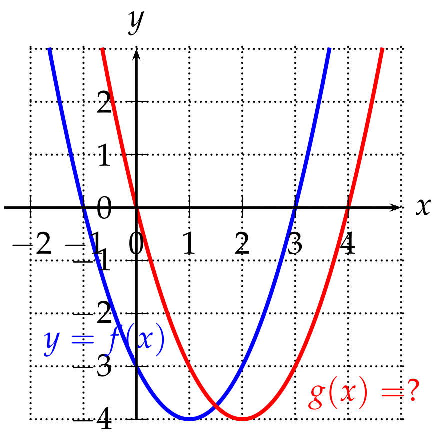


Dodajmo še, da se pri raztegu v smeri osi y ohranjajo ničle, pri raztegu v smeri osi x pa se ohranja začetna vrednost.

Zgled 15: V vsaki od naslednjih nalog je na sliki narisan graf funkcije $y = f(x)$. Poleg je narisan graf, ki smo ga dobili z vzporednim premikom ali raztegom v smeri x ali y osi. Ta graf ima enačbo $y = g(x)$. Naša naloga je zapisati enačbo grafa funkcije g z enačbo funkcije f. Rezultate preverimo še na drug način, če vemo, da so na slikah grafi kvadratnih funkcij.

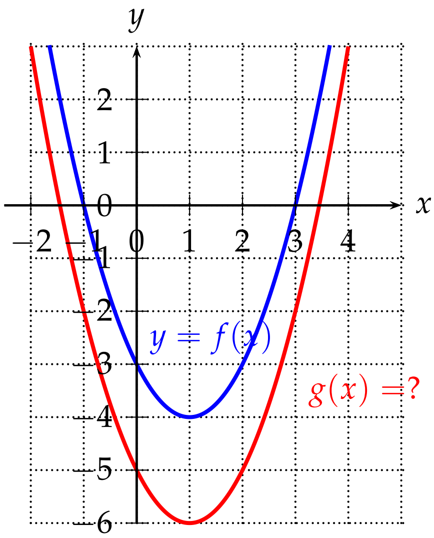
Grafa sta vzporedna v smeri osi x (za 1 v desno), zato je $g(x) = f(x-1)$.

Še drug način: če sta oba grafa kvadratni paraboli, je enačba prve $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$ enačba druge pa $g(x) = x(x-4) = x^2 - 4x = (x-1)^2 - 2(x-1) - 3 = f(x-1)$.

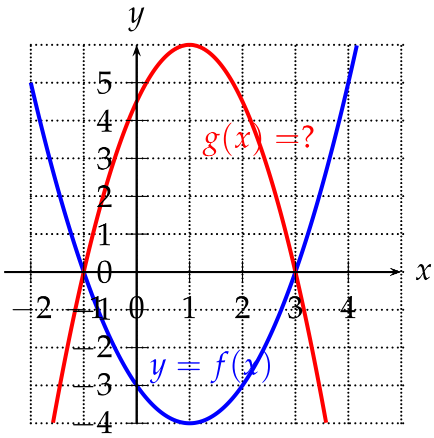


Grafa sta vzporedna v smeri osi y. Zato je $g(x) = f(x) - 2$. Tako kot v zgornjem primeru (in tudi v v vseh ostalih primerih) je $f(x) = x^2 - 2x - 3$, zato je $g(x) = x^2 - 2x - 5$.

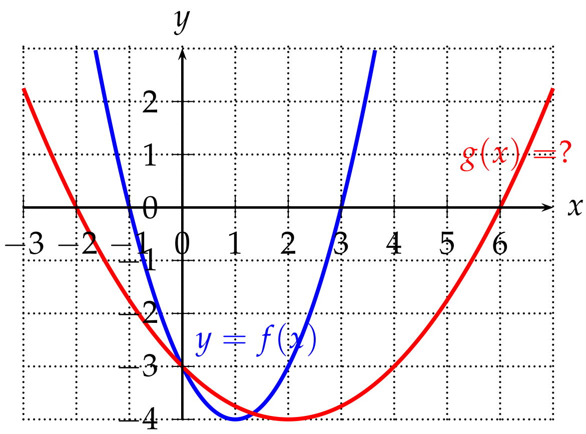
Enačbo funkcije g poiščimo tudi tako, da iz slike ugotovimo teme $T(1, -6)$ in začetno vrednost $g(0) = -5$. Zato je $g(x) = a(x-1)^2 - 6$, vodilni koeficient pa izračunamo iz enačbe $g(0) = a(0-1)^2 - 6 = -5 \Rightarrow a = 1$. Zato je $g(x) = x^2 - 2x - 5$.



Oba grafa imata skupni ničli, zato sklepamo, da imamo razteg v smeri osi y. Faktor raztega preberemo iz ustreznih točk, npr. $(1, -4) \to (1, 6) \Rightarrow k = 6/(-4) = -3/2$, zato je $g(x) = -\frac{3}{2}f(x)$. S predpostavko, da so narisani grafi kvadratnih funkcij, je $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + 4\frac{1}{2}$.

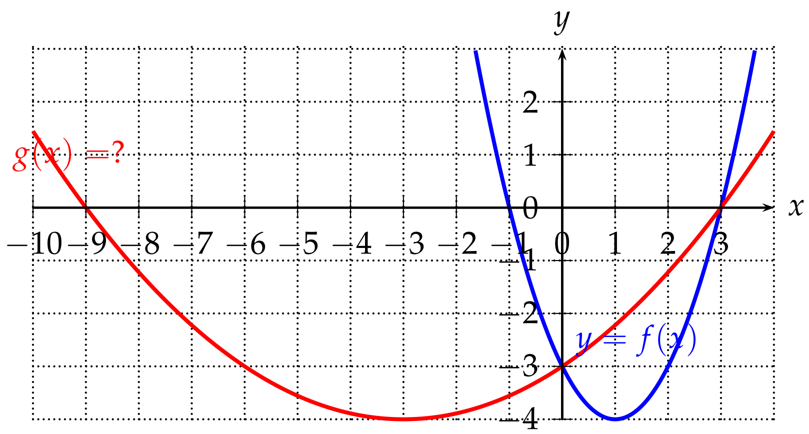


Oba grafa imata isto začetno vrednost. Zato sklepamo, da gre za razteg v smeri osi x. Izberimo ustrezni točki, npr. $(1, -4) \to (2, -4)$, zato je faktor raztega v smeri osi x enak: $k = x/x' = 2/1 = 2$. Zato je enačba raztegnjenega grafa $g(x) = f(\frac{x}{2})$ ali: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ in $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - x - 3$.



Spet imamo razteg v smeri osi x (razteg v smeri osi y ohranja <u>vse</u> ničle). Poiščemo ustrezni točki, npr. $(1,\,-4) \to (-3,\,-4)$ in koeficient raztega $k = x/x' = -3/1 = -3$; iskana enačba je potem

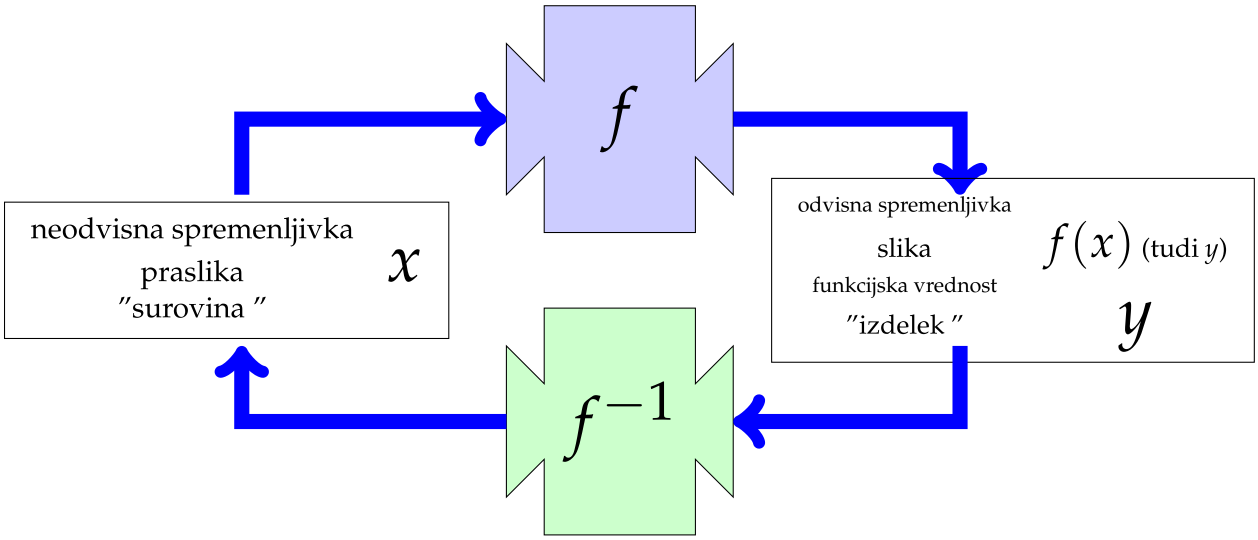
$$g(x) = f(-\frac{x}{3}).$$



3 Inverzna funkcija

Naj bo f realna funkcija z definicijskim območjem $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednost $\mathcal{Z}_f$. Spomnimo se, da je funkcija f predpis, ki vsakemu elementu iz definicijskega območja priredi **natanko določen** (en sam) element v zalogi vrednosti.

Naša naloga v tem razdelku bo, da iz danega funkcijskega predpisa $y = f(x)$ poiščemo obratni ali inverzni funkcijski predpis, ki ga bomo označili z f^{-1} in imenovali **inverzna funkcija** funkcije f. Dodajmo, da je f^{-1} oznaka za funkcijski predpis, ne pa obratna vrednost $\frac{1}{f}$, kot smo to navajeni pri številih.



Če predpis f priredi količini x količino y, je naša naloga poiskati predpis, ki pove, kako količini y priredimo nazaj količino x. Nekaj obratnih ali inverznih operacij poznamo že iz osnovne šole. Recimo, prištevanje števila a priredi številu x vsoto $y = x + a$, obratna operacija k temu prištevanju pa je odštevanje števila a. Res, če končni vsoti y odštejemo a, dobimo nazaj začetno količino x. Obratna operacija k množenju s številom a je deljenje s številom a, kajti, če je $y = ax$, je $y : a = \frac{ax}{a} = x$. Tudi kvadriranje ima svojo obratno ali inverzno operacijo, korenjenje, saj za nenegativna števila x velja: $\sqrt{x^2} = x$. Potenciranja s stopnjami $3, 4, \ldots$ imajo za obratne operacije ustrezne korene $\sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \ldots$.

Zgled 16: Poišči inverzno funkcijo linearne funkcije $f(x) = 2x - 3$.

Predpis f pove, da izbrano število x najprej pomnožimo z 2 (dobimo $2x$), dobljenemu številu pa odštejemo 3. Tako dobimo y. Obratno iz y dobimo x tako, da najprej k y prištejemo 3 (dobimo $y - 3$), dobljeni izraz pa delimo z 2:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "2\cdot"] \arrow[rr, bend left=50, "f"] & 2x \arrow[l, bend left, "\div 2"] \arrow[r, bend left, "-3"] & y = 2x-3 \arrow[l, bend left, "+3"] \arrow[ll, bend left=50, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Predpis inverzno funkcijo preberemo iz opisa, kako smo iz y dobili x: $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$. Ker pa smo bolj navajeni, da igra vlogo neodvisne spremenljivke x v predpisu zamenjamo y z x, torej je enačba inverzne funkcije:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

To kar smo v primeru storili na koncu, torej zamenjali x z y in obratno, storimo že na začetku. Tako dobimo naslednji postopek iskanja inverzne funkcije dane funkcije $y = f(x)$:

računanje inverzne funkcije

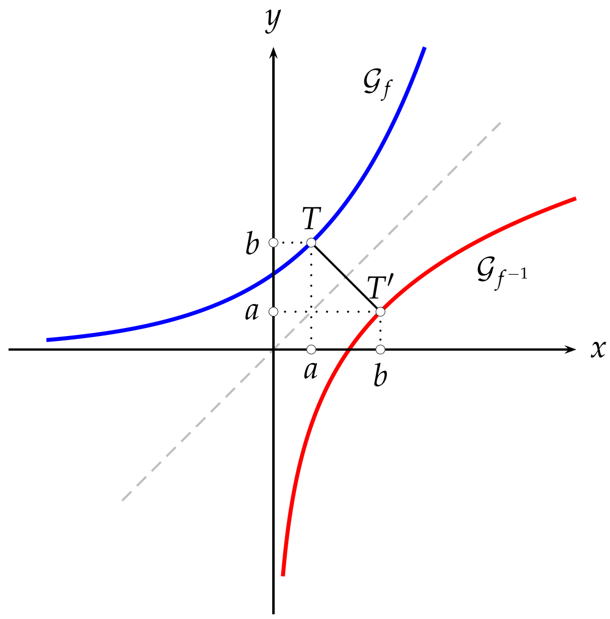
- V enačbi funkcije $y = f(x)$ zamenjamo $x \leftrightarrows y$. Tako dobimo implicitno enačbo inverzne funkcije: $x = f(y)$
- Če znamo, iz implicitne enačbe $x = f(y)$ izrazimo y z spremenljivko x; dobimo eksplicitno enačbo inverzne funkcije: $y = f^{-1}(x)$.
- Pogosto iz implicitne oblike ne znamo izraziti y z znanimi operacijami in funkcijami. V takem primeru definiramo eksplicitni zapis inverzne funkcije z novo oznako. Recimo: Implicitni zapis kvadratnega korena (= inverzna funkcija kvadratne funkcije $y = x^2$) je $y^2 = x$. V eksplicitnem zapisu zapišemo funkcijo z novo oznako $\sqrt{\ }$, ki jo imenujemo kvadratni koren.

Poved *Iz implicitne enačbe $x = f(y)$ izrazimo y z x* lahko opišemo tudi tako, da moramo moramo rešiti enačbo $x = f(y)$ po neznanki y. Toda rešitev enačb je lahko več (ne le ena sama, kot je običajno pri linearnih enačbah), lahko pa je sploh ni. Če rešitve za izbrani x ni, v izbranemu x inverzna funkcija ni definirana. Zgodi se, da izbranemu x ustreza več različnih vrednosti za y. To pa je v nasprotju z definicijo funkcije, ki x priredi natanko določen y. Zagato rešimo tako, da se odločimo kateri y bo ustrezal danemu x, ostale zavržemo. Recimo: kvadratni funkciji $y = x^2$ je inverzna funkcija kvadratni koren. Implicitna oblika korena je $x = y^2$. V zadnji enačbi (po neznanki y) običajno izberemo za y pozitivno rešitev, torej $y = +\sqrt{x}$. Ker je zaloga vrednosti kvadratne funkcije

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, so tudi definicijsko območje korena le nenegativna realna števila ($= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$), pa tudi zaloga vrednosti korena so le nenegativna realna števila, ker smo za y izbrali pozitivno rešitev.

Ali ima vsaka funkcija svojo inverzno funkcijo? Inverzno funkcijo premorejo le funkcije, ki različne elemente preslikajo v različne elemente. Take funkcije smo imenovali **injektivne** funkcije. Med posebne primere injektivnih funkcij sodijo **monotone** funkcije, to je take, ki so bodisi naraščajoče bodisi padajoče. Naraščajoča je taka funkcija, ki večji vrednosti spremenljivke x priredi večjo funkcijsko vrednost, padajoča pa taka, ki večji vrednosti spremenljivke x priredi manjšo funkcijsko vrednost.

Oglejmo si še kako pridelamo graf inverzne funkcije $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ iz znanega grafa funkcije $\mathcal{G}_f$. Graf funkcije f predstavlja množica točk $\mathrm{T}(x, y)$, kjer je $x \in \mathcal{D}_f$ in $y = f(x) \in \mathcal{Z}_f$. Pri inverzni funkciji se množici originalov in slik zamenjata: $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{Z}_f$ in $\mathcal{Z}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$, točki $T(a, b) \in \mathcal{G}_f$ pa v grafu $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ ustreza točka $T'(b, a)$.



Izračunajmo enačbo simetrale s daljice $\mathrm{TT'}$ ($\mathrm{T}(a, b)$ in $\mathrm{T'}(b, a)$). Sredino daljice S znamo izračunati: $\mathrm{S}(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, smerni koeficient premice $(\mathrm{T}, \mathrm{T'})$ je: $k_{\mathrm{TT'}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-a}{a-b} = -1$. Smerni koeficient simetrale je enak $k_s = -\frac{1}{k_{\mathrm{TT'}}} = 1$ (pogoj za pravokotnost premic). Zato je enačba simetrale s:

$$y - y_{\mathrm{S}} = k_s(x - x_{\mathrm{S}}) \Rightarrow y - \frac{a+b}{2} = 1 \cdot (x - \frac{a+b}{2}) \Rightarrow y = x$$

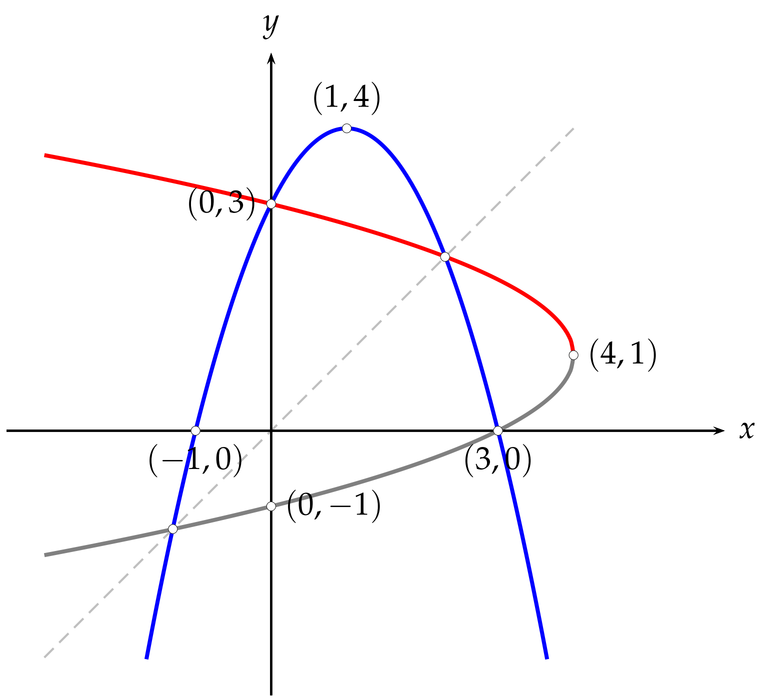
Točki T in T$'$ sta zrcalni na premico $y = x$ (simetrala lihih kvadrantov), zato sta grafa funkcije in njej inverzne funkcije tudi zrcalna na simetralo lihih kvadrantov. Tako smo pridelali postopek risanja grafa inverzne funkcije:

graf inverzne funkcije

- Narišemo graf funkcije f,
- dobljeni graf zrcalimo preko simetrale lihih kvadrantov.

Zgled 17: Poišči in nariši inverzno funkcijo funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Sledimo navodilom in zamenjamo x z $y = f(x)$. Dobimo $x = -y^2 + 2y + 3$. Nastala je kvadratna enačba po neznanki y : $y^2 - 2y + (x - 3) = 0$. Njena diskriminanta je $D = 4(4 - x)$, kar pomeni, da je definicijsko območje inverzne funkcije interval $(-\infty, 4]$, saj je v tem intervalu $D \geq 0$. Eno izmed ustreznih rešitev ($y_1 = 1 + \sqrt{4 - x}$, $y_2 = 1 - \sqrt{4 - x}$) izberemo za inverzno funkcijo. Obe funkciji imata definicijsko območje $(-\infty, 4]$, zalogi vrednosti pa sa različni: y_1 ima zalogo vrednosti interval $[1, \infty)$, y_2 pa interval $(-\infty, 1]$.



Zgled 18: Poišči in nariši inverzno funkcijo funkcije $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$.

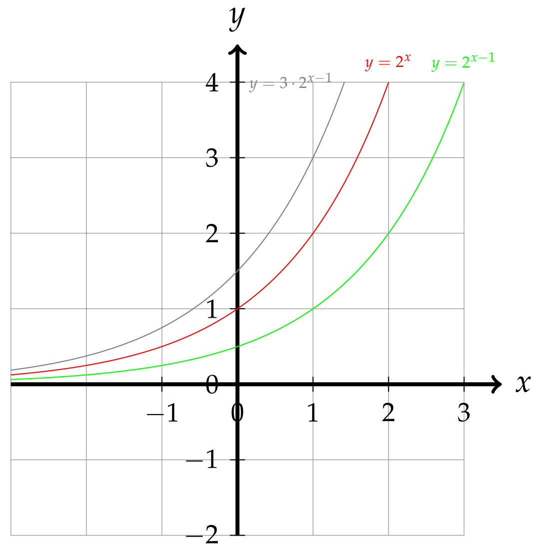
Sledimo napotkom ustvarjanja inverzna funkcije:

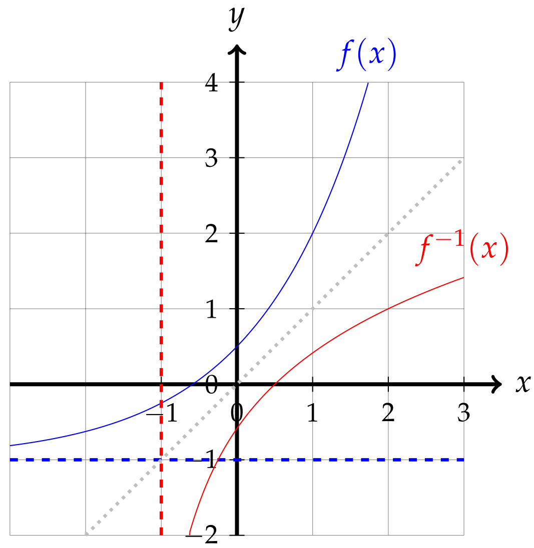
- Zamenjaj $x \rightleftharpoons y$: $x = 3 \cdot 2^{y-1} - 2$.
- Iz dobljene enačbe (=implicitna oblika inverzne funkcije) izrazi y:

$$x = 3 \cdot 2^{y-1} - 1 \Rightarrow 3 \cdot 2^{y-1} = x + 1 \Rightarrow 2^{y-1} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow y - 1 = \log_2\left(\frac{x+1}{3}\right) \Rightarrow y = \log_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$$

- Inverzno funkcijo še zapišemo v običajni oznaki:$f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$.

Spodnji sliki naj pojasni bralec sam:





4 Grafi funkcij z absolutno vrednostjo

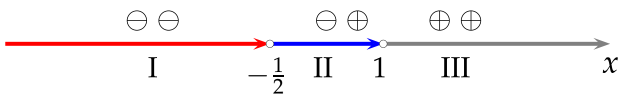
Spomnimo se, da absolutna vrednost števila a, oznaka $|a|$, geometrijsko pomeni razdaljo od koordinatnega izhodišča do točke, ki na številski premici predstavlja število a. Algebrsko definiramo absolutno vrednost z naslednjo enačbo:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & ; \ a \geq 0 \\ -a & ; \ a < 0 \end{cases}}$$

Če znotraj "ograj" absolutne vrednosti $|***|$ nastopa izraz $***$, moramo najprej ugotoviti pogoje, pri katerih je izraz pozitiven in kdaj negativen. V prvem primeru je absolutna vrednost izraza znotraj ograj kar enaka izrazu $***$ ("ograji" $||$ opustimo, torej je $|***| = ***$), v primeru, ko je izraz negativen pa izraz zapišemo z negativnim predznakom ($|***| = -(***)$). V naših primerih bodo izrazi funkcije spremenljivke x. Tako je recimo $|2x-1| = 2x-1$ takrat, ko je $x \geq \frac{1}{2}$ in $-(2x-1) = -2x+1$, ko je $x < \frac{1}{2}$. Če imamo opravka z več absolutnimi vrednostmi, je pogojev več. V takem primeru je najbolje pogoje, pri katerih se spreminja predznak izrazov, naslikati na številski premici.

Zgled 19: Nariši graf funkcije $f(x) = |x-1| + |2x+1| - x$.

V prvi absolutni vrednosti se predznak spremeni pri $x = 1$ (ničla izraza), pri drugi se prav tako spremeni pri ničli izraza $x = -\frac{1}{2}$. Tretji člen je brez absolutne vrednosti, zato ne spremeni predznaka. Zato realna os razpade na tri dele, intervale, na katerih se spreminjata predznaka izrazov $x-1$ in $2x+1$:



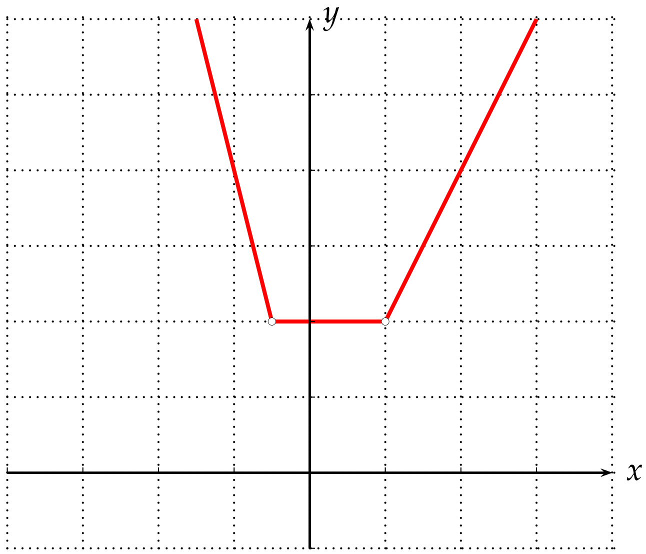
Spodnja tabela prikazuje vrednosti izrazov in funkcije na posameznih intervalih, ki jih označimo: $I = (-\infty, -\frac{1}{2})$, $II = [-\frac{1}{2}, 1)$ in $III = [1, \infty)$.

izraz	I	II	III
$x-1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$2x+1$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
$f(x)$	$-4x$	2	$2x$

Torej je

$$f(x) = |x-1| + |2x+1| - x = \begin{cases} -4x & ; \quad x < -\frac{1}{2} \\ 2 & ; \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Vsakega od treh predpisov, ki nastopajo v zapisu funkcije f brez absolutne vrednosti, znamo narisati, le na intervale, kjer posamezni predpis velja, moramo paziti. Na spodnji sliki je narisan graf funkcije f:



■

Zgled 20: Vsako od funkcij $f(x) = x^2 - |2x+3|$, $g(x) = x|x-2| - 3$ in $h(x) = |x|^{(}x - 2) - 3|$ zapiši brez absolutnih vrednosti in nariši njihove grafe.

V prvem primeru se pri $x = -\frac{3}{2}$ menja predznak izraza $2x+3$. Zato je za $x \geq -\frac{3}{2}$ vrednost funkcije enaka $x^2 - 2x - 3$, v primeru $x < -\frac{3}{2}$ pa je vrednost $x^2 + 2x + 3$. Torej je:

$$f(x) = x^2 - |2x+3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & ; \quad x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 + 2x + 3 & ; \quad x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

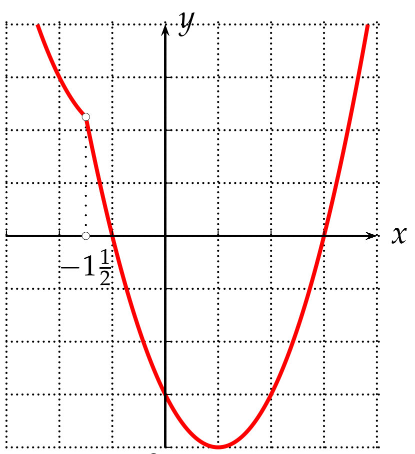
V primeru funkcije $g(x) = x|x-2| - 3$ se predznak spreminja pri $x = 2$. Enostaven račun pove, da je

$$g(x) = x|x-2| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & ; \quad x \geq 2 \\ -x^2 + 2x - 3 & ; \quad x < 2 \end{cases}$$

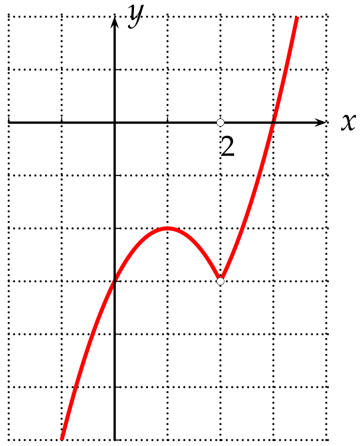
V primeru funkcije h najprej ugotovimo, da je za $x \geq 0$ vrednost funkcije $x^2 - 2x - 3$, za $x < 0$ je $h(x) = -x^2 + 2x - 3$, torej:

$$h(x) = |x|(x-2) - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & ; \quad x \geq 0 \\ -x^2 + 2x - 3 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

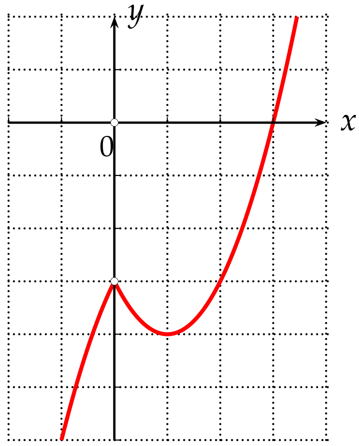
Še grafi:



$f(x) = x^2 - |2x + 3|$



$g(x) = x|x - 2| - 3$

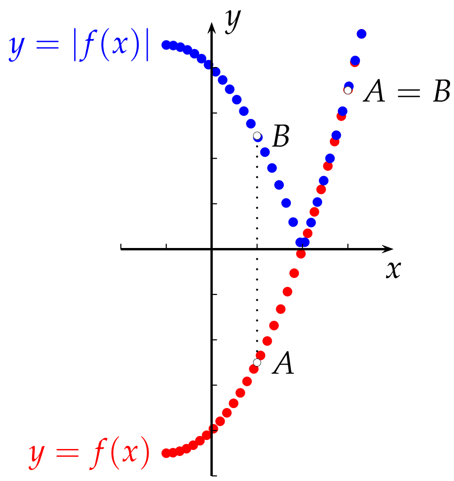


$h(x) = |x|(x - 2) - 3$

■

graf funkcije $|f(x)|$

Vzemimo, da smo narisali graf funkcije $y = f(x)$. Naša naloga je narisati graf funkcije $y = g(x) = |f(x)|$. Vemo, da je graf funkcije množica točk $T(x, y)$, kjer je y funkcijska vrednost abscise x točke T.



Tako graf funkcije f sestavljajo točke $A(x, f(x))$, graf funkcije g pa točke $B(x, |f(x)|)$. Očitno so vse točke B nad ali na abscisni osi, saj imajo vse nenegativno ordinato. Kako pa je točka B povezana s točko A? Vzemimo, da imata obe točki enaki abscisi x. Tam, kjer je $f(x) \geq 0$, je $g(x) = |f(x)| = f(x)$, zato v tem primeru točki kar sovpadeta, torej $A = B$, v primeru, ko je $f(x) < 0$ pa je $g(x) = |f(x)| = -f(x)$, zato sta v tem primeru točki A in B zrcalni na abscisno x os. Povzemimo:

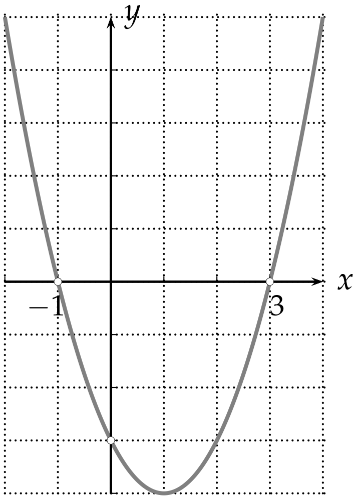
Graf funkcije $y = |f(x)|$ dobimo iz grafa funkcije $y = f(x)$ tako, da:

1. točke grafa funkcije $y = f(x)$, ki ležijo **nad** ali **na** abscisni osi ohranimo,
2. točke grafa funkcije $y = f(x)$, ki ležijo **pod** abscisno osjo, najprej zrcalimo preko abscisne osi, potem pa jih izbrišemo.

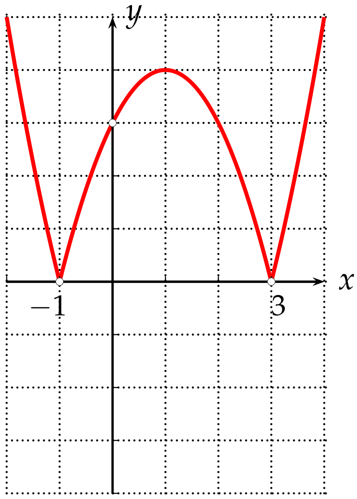
Točke, ki ostanejo, ko izvedemo zgoraj opisane operacije, tvorijo graf funkcije $y = |f(x)|$.

Zgled 21: Nariši graf funkcije $y = |x^2 - 2x - 3|$.

Sledimo gornjim navodilom. Najprej narišemo graf funkcije $y = x^2 - 2x - 3$, del grafa nad x osjo ne spreminjamo, graf pod x osjo pa zrcalimo preko osi x. Prvotni graf pod x osjo izbrišemo.

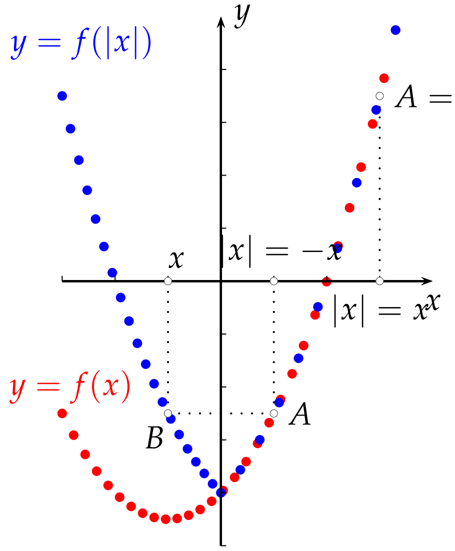


$y = x^2 - 2x - 3$



$h(x) = |x^2 - 2x - 3|$

Naša naslednja naloga je, kako iz grafa funkcije $y = f(x)$ enostavno dobiti graf funkcije $y = f(|x|)$. Vzemimo na grafu funkcije $y = f(x)$ poljubno točko $A(x, f(x))$ in poiščimo na grafu funkcije $y = f(|x|)$ točko $B(x, f(|x|))$, ki ima s točko A enako absciso x.



graf funkcije $f(|x|)$

V primeru, ko je $x \geq 0$ (pozitiven del abscisne osi) točki A in B sovpadeta, saj je tedaj $|x| = x$ in zato $f(|x|) = f(x)$. V primeru, ko x leži na negativnem delu abscisne osi ($x < 0$), je $|x| = -x$. Vrednosti $|x|$ in $-x$ ležita simetrično na koordinatno izhodišče, funkcijska vrednost $f(|x|)$ pa je enaka funkcijski vrednosti $f(-x)$. Zato je v tem primeru točka $B(x, f(|x|))$ zrcalna slika točke $A(-x, f(-x))$, zrcalimo pa na ordinatno (y) os. Povzemimo:

Graf funkcije $y = f(|x|)$ dobimo iz grafa funkcije $y = f(x)$ tako, da:

1. točke grafa funkcije $y = f(x)$, ki ležijo **desno** od ordinatne osi ali **na** ordinatni osi ohranimo,
2. točke grafa funkcije $y = f(x)$, ki ležijo **levo** od ordinatne osi izbrišemo, ostanek grafa na desni strani ordinatne osi pa zrcalimo preko ordinatne osi.

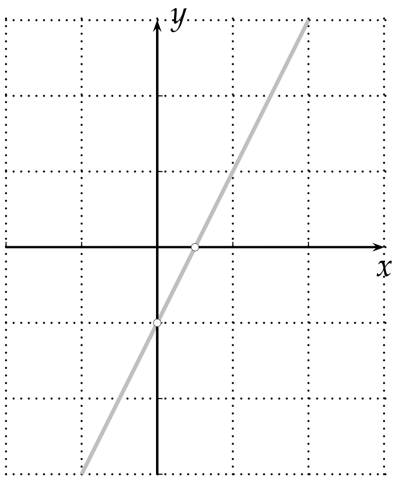
Nastale točke tvorijo graf funkcije $y = f(|x|)$.

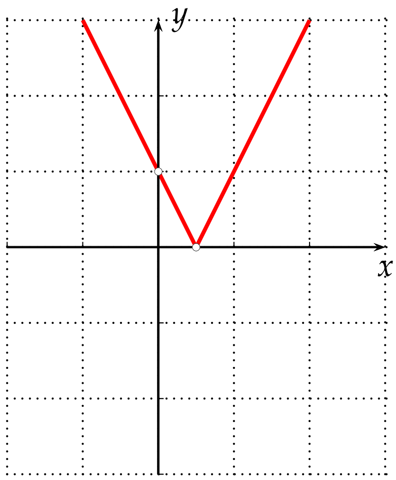
Zgled 22: Dana je linearna funkcija $f(x) = 2x - 1$.

1. **Nariši grafe funkcij** $y = f(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ **in** $y = |f(|x|)|$.
2. **Reši enačbo** $|2|x| - 1| = 2$.

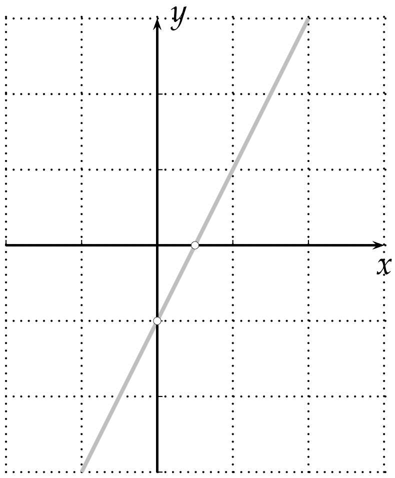
3. **Naj bo a realno število. Ugotovi število rešitev enačbe $|2|x|-1| = a$ glede na različne vrednosti števila a.**

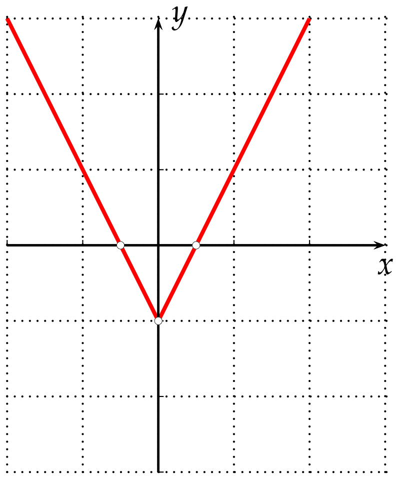
Narišemo graf linearne funkcije (premico) $y = 2x - 1$ in del premice, z negativnimi ordinatami zrcalimo preko abscisne osi. Tako smo narisali še graf funkcije $y = |f(x)|$.



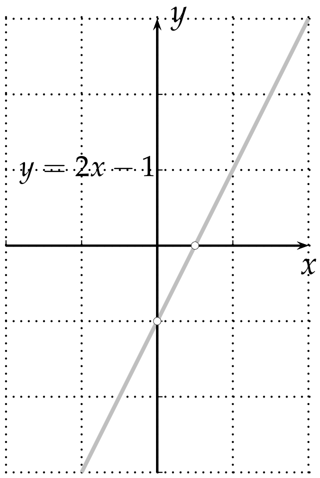


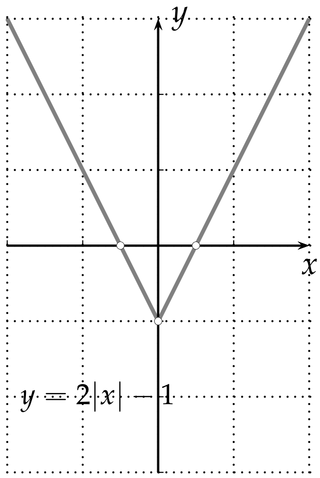
Graf funkcije $y = f(|x|) = 2|x| - 1$ narišemo tako, da najprej narišemo premice $y = 2x - 1$, odstranimo tisti del premice, ki ima točke z negativnimi abscisami, preostali del premice pa zrcalimo preko ordinatne osi. Zrcaljeni del premice, skupaj s preostalim delom, tvori graf funkcije $y = |f(x)|$.

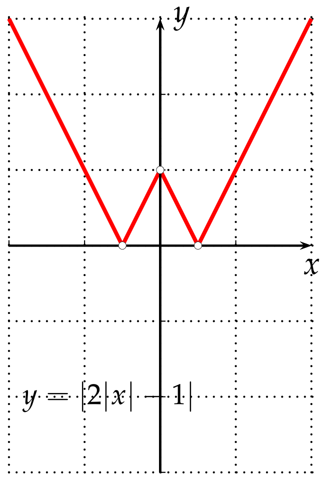




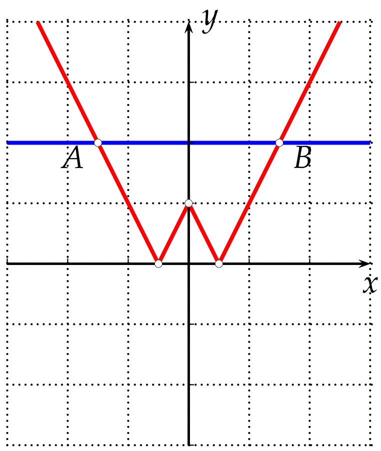
Graf funkcije $y = |f(|x|)|$ narišemo tako, da najprej narišemo graf osnovne funkcije $y = f(x)$, potem pa uporabimo obe zrcaljenji, ki nastopata pri risanju grafov funkcij $y = f(|x|)$ in $y = |f(x)|$.







Enačbo $|2|x| - 1| = 2$ najlaže rešimo grafično. V isti koordinatni sistem narišemo funkciji, ki nastopata na levi in desni strani enačbe. Levo funkcijo smo pravkar narisali, graf desne funkcije pa je vodoravna premica $y = 3$.

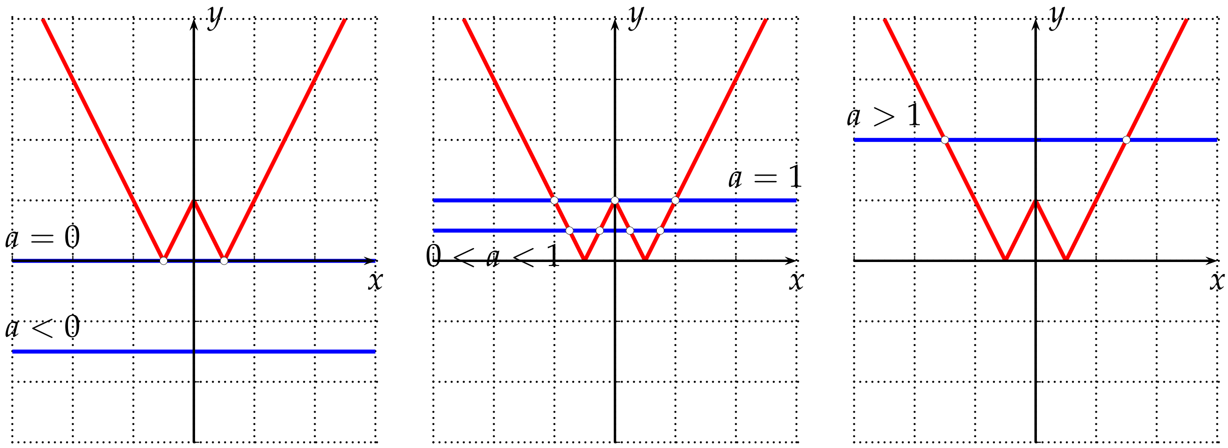


Presečišči obeh grafov izračunamo tako, da enačimo ustrezne predpise funkcij. Funkcijo $y = |2|x| - 1|$ sestavljajo štirje predpisi, katerih grafi so deli premic, ki so nastale z zrcaljenji osnovne premice $y = 2x - 1$ preko koordinatnih osi. Pri takih zrcaljenjih se osnovnima količinama enačbe premice, koeficientoma k in n, lahko spremeni le predznak. V našem primeru imajo odseki vrednosti koeficientov $k = \pm 2$ in $n = \pm 1$. Preprost razmislek nam pove, da je potem:

$$|2|x|-1| = \begin{cases} 2x-1 & ; \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x+1 & ; \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -2x-1 & ; \quad x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Za izračun presečišča A nam enačenje predpisov postreže z enačbo $-2x-1=2$, ki ima rešitev $x_1 = -\frac{3}{2}$, za izračun presečišča B pa moramo rešiti enačbo $2x-1=2$, ki da rešitev $x_2 = \frac{3}{2}$. Izračunani števili x_1 in x_2 sta torej iskani rešitvi.

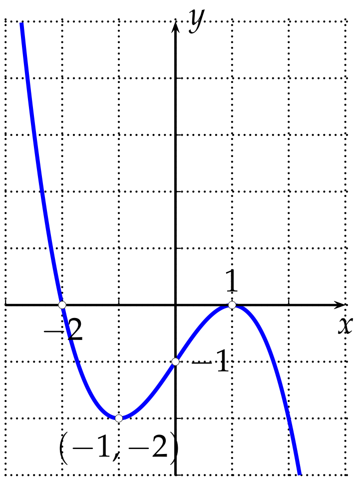
Rešitve enačbe $|2|x|-1| = a$ prav tako poiščemo grafično. Desna stran enačbe grafično pomeni premico $y = a$. V odvisnosti od a ločimo naslednje možnosti:



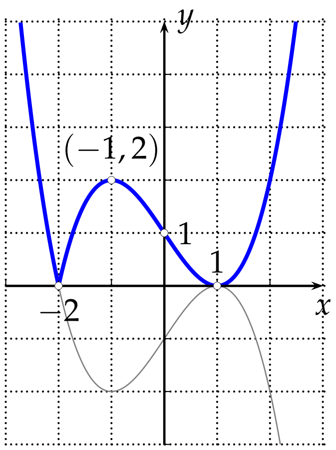
V primeru, ko je $a < 0$ enačba nima rešitev, v primeru $a = 0$ sta rešitvi $x_1 = -\frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{1}{2}$. Ko je $0 < a < 1$, so rešitve štiri: $x_1 = -\frac{1+a}{2}$, $x_2 = -\frac{1-a}{2}$, $x_3 = \frac{1-a}{2}$, $x_4 = \frac{1+a}{2}$. Če je $a = 1$, ima enačba tri rešitve: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, če pa je $a > 1$, sta rešitvi dve: $x_1 = -\frac{1+a}{2}$ in $x_1 = \frac{1+a}{2}$. ■

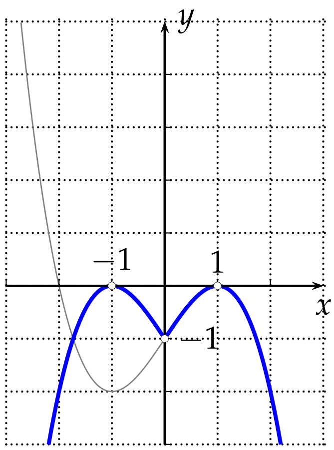
Zgled 23: Na sliki je narisan graf funkcije $y = f(x)$ z označenimi značilnimi točkami (začetna vrednost, ničle, maksimumi in minimumi).

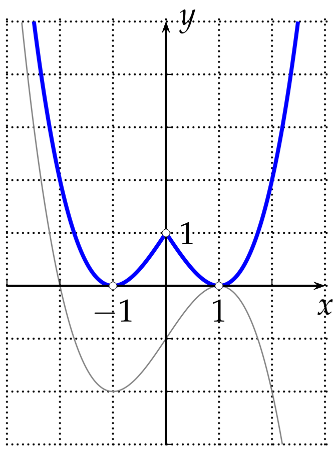
1. **Nariši graf funkcije $y = |f(x)|$ in na nastalem grafu označi njegove značilne točke.**
2. **Nariši graf funkcije $y = f(|x|)$ in na nastalem grafu označi njegove značilne točke.**
3. **Nariši graf funkcije $y = |f(|x|)|$ in na nastalem grafu označi njegove značilne točke.**



Sledimo navodilom za risanje grafov funkcij $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, v zadnjem primeru pa kombiniramo oboja navodila. V ozadju je vsake slike je narisana prvotna funkcija $y = f(x)$. Nastanejo naslednje slike:

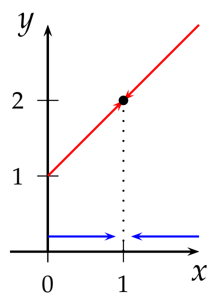


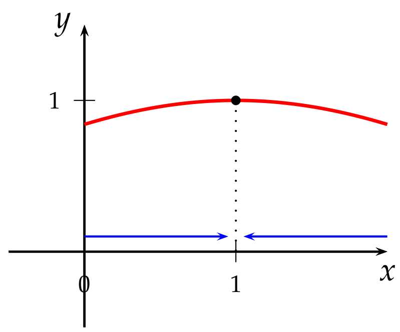


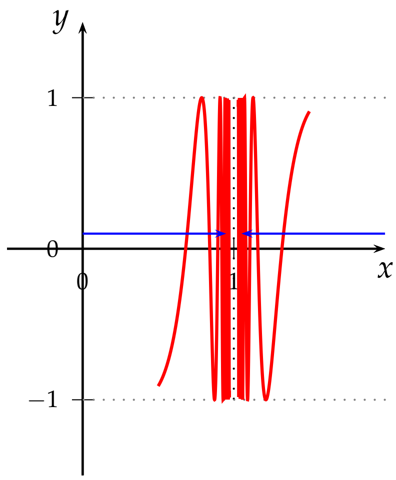


5 Limita funkcije

Oglejmo si naslednje funkcije $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$, $f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Vse tri funkcije niso definirane pri $x = 1$. Torej za nobeno ne moremo izračunati njene vrednosti pri $x = 1$. Toda v bližnji **okolici**[1] števila 1 so vse tri funkcije definirane in zato za te vrednosti spremenljivke x lahko izračunamo funkcijske vrednosti. Oglejmo si računalniške slike grafov funkcij f_1, f_2 in f_3 v okolici števila 1:







Slika 5: Grafi funkcij f_1, f_2 in f_3

V primerih vseh treh funkcij se pomikajmo z vrednostjo neodvisne spremenljivke proti številu 1 (bodisi z leve, bodisi z desne) in opazujmo, kaj se dogaja z ustreznimi funkcijskimi vrednostmi? V primeru funkcije f_1 se funkcijske vrednosti vedno bolj približujejo številu 1, v primeru funkcije f_2 se vedno manj ločijo od števila 1, v primeru tretje funkcije, pa opazimo, da funkcijske vrednosti močno nihajo med -1 in 1.

Zgled 24: Vzemimo zaporedji števil $x_n = 1 + \frac{2}{\pi(4n+1)}$ in $y_n = 1 + \frac{2}{\pi(4n-1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dokaži, da se členi zaporedij z rastočim n vedno bolj bližajo 1 in, da je kljub temu $|f_3(x_n) - f_3(y_n)| = 2$ za vsako naravno število n, torej se funkcijske vrednosti ne približujejo druga drugi.

Razlika $x_n - 1 = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ se spreminja le s spreminjanjem vrednosti n. Preprosto dejstvo je, da če ulomku povečujemo imenovalec (celoto delimo na več delov) in se števec pri tem ne spreminja, se vrednost ulomka manjša; v našem primeru je, recimo pri $n = 1000$ vrednost $\frac{2}{\pi(4001)} \doteq 1.6 \cdot 10^{-4} = 0.00016$, pri $n = 10000$ pa je razlika še približno desetkrat manjša. Torej se z rastočim n vrednosti

[1] Okolice števila a na številski premici so odprti intervali $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kjer je $\varepsilon > 0$ poljubno pozitivno realno število; če je ε zelo majhno število, dobljeno okolico imenujemo bližnja okolica števila a

členov zaporedja x_n le malo razlikujejo od 1, skratka približujejo se številu 1. Podobne ugotovitve veljajo tudi za zaporedje števil y_n. Izračunajmo $f_3(x_n)$:

$$f_3(x_n) = \sin\frac{1}{x_n - 1} = \sin\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}} = \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Podobno izračunamo $f(y_n) = -1$. Zato je $|f_3(x_n) - f_3(y_n)| = 2$. ∎

Kaj lahko izluščimo iz obnašanja funkcij f_1, f_2, f_3, ki so vse nedefinirane za $x = 1$? Pri prvih dveh se funkcijske vrednosti umirijo (zelo malo spreminjajo), ko se vrednost spremenljivke x približuje številu 1 in to ne glede, iz katere strani se približujemo. V prvem primeru se funkcijske vrednosti umirijo okrog števila 2, v drugem primeru okrog števila 1. Pravimo, da je **limita**[2] funkcije $f_1(x)$, ko se x približuje 1, enaka 2, limita funkcije $f_2(x)$ pa 1. Z oznakami to zapišemo: $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 2$ in $\lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = 1$. V primeru tretje funkcije, pa takega števila, okrog katerega bi se umirile funkcijske vrednosti, ni, saj v poljubni bližini števila 1 lahko poiščemo take vrednosti za x, da se ustrezne funkcijske vrednosti ločijo za veliko, za 2. Zato pravimo, da funkcija f_3 nima limite v točki $x = 1$.

V splošnem definiramo:

preprosta definicija limite

Limita funkcije $y = f(x)$ imenujemo število, recimo A, okrog katerega se umirijo ali stabilizirajo funkcijske funkcijske vrednosti $f(x)$, ko se spremenljivka x približuje vrednosti a. Z oznakami opisano zapišemo:

$$\boxed{A = \lim_{x\to a} f(x)}$$

5.1 Kako izračunamo limito?

limita "lepih" funkcij

V srednji šoli se ukvarjamo z linearno, kvadratno, polinomsko, racionalno, eksponentno, logaritemsko in kotnimi funkcijami. Grafi takih funkcij so, razen morebiti racionalne funkcije in funkcij tan, cot, nepretrgane krivulje, učeno pravimo, da so **zvezne**. Pri takih funkcijah je limita funkcije kar enaka ustrezni funkcijski vrednosti, torej: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Praktični nasvet za računanje limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

Vstavimo a namesto x v predpis funkcije f; če dobljeni izraz znamo izračunati, je to iskana limita, če ga ne znamo izračunati moramo izbrati kako drugo pot.

[2]Beseda limita je latinskega izvora in pomeni mejo

Zgled 25: Izračunaj limite:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 2\sqrt{x+2} - 1)$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}$ **(kot x merimo v radianih).**
3. $\lim_{x\to 1^\circ}\frac{\sin x}{x}$ **(kot x merimo v stopinjah)**

Sledimo "praktičnemu" nasvetu; v prvem primeru dobimo:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 2\sqrt{x+2} - 1) = 2^2 - 2\sqrt{2+2} - 1 = 4 - 2\cdot 2 - 1 = -1$$

v drugem primeru $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 1}{1} \doteq 0,8415$, v tretjem primeru pa je

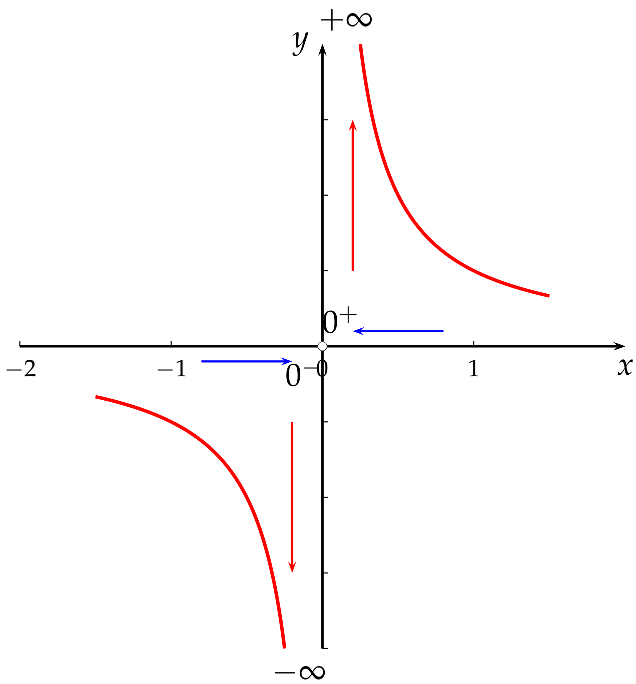
$$\lim_{x\to 1^\circ}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 1^\circ}{1^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\frac{\pi}{180}} \doteq 0,9999 \qquad \blacksquare$$

nekaj posebnih limit

Vrednosti katerih izrazov ne znamo ali ne moremo izračunati? Spomnimo se, da pri osnovnih računskih operacijah edino deljenje z številom 0 povzroča težave. Tako, recimo $1:0$ tudi računalo ne zna izračunati. Toda, če delitelj 0 le malo spremenimo, račun lahko izpeljemo, recimo $1:0,01 = 100$, $1:(-0,001) = -1000$, $1:0,000001 = 1000000$. Opazimo, da so rezultati deljenj po velikosti tem večji, čim bliže številu 0 je delitelj. V primeru, ko se delitelj približuje številu 0 z negativne strani, rezultati deljenja postanejo manjši od še tako velikega **negativnega** števila, v primeru, ko se delitelj približuje številu 0 s pozitivne strani, pa postanejo količniki večji od še tako velikega **pozitivnega** števila. Opisano lahko prikažemo tudi z obnašanjem funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ v okolici pola $x = 0$.
Vpeljimo novi oznaki $-\infty$ in ∞ ter ju imenujemo negativno in pozitivno neskončno in zapišemo gornje pisanje v obliki:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty}$$

Še nekaj opazimo na sliki grafa $f(x) = \frac{1}{x}$. Ko se vrednosti x po absolutni vrednosti povečujejo, torej z novimi oznakami velja bodisi $x \to \infty$ bodisi $x \to -\infty$, so funkcijske vrednosti vedno manjše, torej se umirijo okoli števila 0. Zato lahko zapišemo:



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

definirani izrazi

Oznaki $+\infty$ in $-\infty$ si lahko predstavljamo kot neke vrste "števili", s katerimi lahko tudi računamo. Oznako ∞ si mislimo kot "število", ki ga nobeno drugo število ne preseže, oznako $-\infty$ pa kot "število", ki je manjše od kateregakoli realnega števila. V takem primeru velja naslednja aritmetika z neskončnimi količinami (z a smo označili poljubno realno število):

$$\boxed{\infty \pm a = \infty} \qquad \boxed{\infty + \infty = \infty} \qquad \boxed{\frac{1}{\pm\infty} = 0}$$

$$\boxed{\infty \cdot a = \infty,\ a > 0} \qquad \boxed{(-\infty) + (-\infty) = -\infty}$$

$$\boxed{\infty \cdot a = -\infty,\ a < 0} \qquad \boxed{\infty \cdot \infty = \infty} \qquad \boxed{\frac{1}{0} = \pm\infty}$$

Zakaj pa ne moremo izračunati $\infty - \infty$? Zakaj $\infty - \infty$ ni enako 0? Oglejmo si naslednji zgled. Pa predpostavimo, da je $\infty - \infty = 0$. Označimo z S naslednjo vsoto (vrsto):$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$. Neskončne vsote (vrste) seštevamo tako, da sestavimo zaporedje delnih vsot, recimo za vsoto $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$:

$$\begin{array}{lllll} S_1 & = & a_1 & & \\ S_2 & = & S_1 + a_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & S_2 + a_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ S_{n+1} & = & S_n + a_{n+1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \end{array}$$

Vsota S je potem število okrog katerega se umirijo delne vsote, drugače povedano, vsota vrste je limita delnih vsot, ko gre števil seštetih členov preko vsake meje.

Za našo vsoto $S = 1+2+4+8+\ldots$ je nekaj začetnih delnih vsot $1, 3, 7, 15, \ldots$, v splošnem pa je $S_n = 2^n - 1$, v kar se ni težko prepričati in z indukcijo utemeljiti. Z rastočim n delne vsote presežejo vsako, še tako veliko število, zato je vsota te vrste $S = \infty$. Enostaven račun pokaže, da je $2S = 2+4+8+16+\ldots = (1+2+4+8+16+\ldots) - 1 = S - 1$. Potem je $S + S - S = S - 1 - S$. Ker je $S = \infty$ in je po predpostavki $\infty - \infty = 0$, je zato tudi $S - S = 0$. Toda potem pridemo v nasprotje s predpostavko, saj je je primeru, da predpostavka velja, $S = -1$. Dokaz z zanikanjem (reductio ad absurdum) je sklenjen, zato v splošnem $\infty - \infty$ ni enako 0.

Do podobne ugotovitve bi prišli v primeru vrste $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, kjer vsaki prišteti enici eno enico odštejemo, vsaki odšteti pa eno prištejemo. Lihe delne vsote so enake 1, sode so enake 0, torej delne vsote nimajo limite. Vrsto lahko preuredimo v obliko $(1+1+\ldots) - (1+1+\ldots)$, v kateri je vsota prvega člena ∞, prac taka pa je tudi vsota drugega člena. Če bi veljalo, da je $\infty - \infty = 0$, bi vsota vrste $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ bila enaka 0, kar pa nasprotuje temu, da zaporedje delnih vsot nima limite.

nedefinirani izrazi

Izraze, katerih vrednost ne moremo izračunati, imenujemo nedefinirani izrazi. Za nas bodo zanimivi:

$\boxed{\infty - \infty = ?}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} = ?}$ $\boxed{\dfrac{0}{0} = ?}$

Nekaj posebnih limit

Vzemimo, da je $|k| < 1$. Potem je

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} k^n = 0}$$

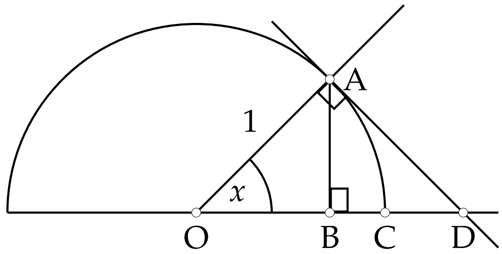
Vzemimo, da je $\varepsilon > 0$ poljubno majhno števil in, da je $0 < k < 1$. (če je pretežko, pa vzemimo, da je $\varepsilon = 0{,}001$ in $k = 1/2$), torej tako, ki se zelo malo loči od števila 0. Poiščimo vse rešitve (spremenljivka n)neenačbe $k^n \geq \varepsilon$ (v izbranem primeru $(1/2)^n \geq 0{,}001$). Ker gre za eksponentno enačbo, jo logaritmirajmo, kar z desetiškim logaritmom, ki je naraščajoča funkcija, zato ohranja znak neenakosti. Dobimo: $\log k^n \geq \log \varepsilon$ (vposebnem primeru $\log(1/2)^n \geq \log 0{,}001 = -3$). Uporabimo pravilo logaritmiranja za potence, da dobimo $n \cdot \log k \geq \log \varepsilon$ ($n \cdot \log(\frac{1}{2}) \geq -3$ ali $-n \cdot \log 2 \geq -3$). Ker je $k < 1$ je logaritem $\log k$ negativno število. Zato je $n \leq \frac{\log \varepsilon}{\log k}$ (v posebnem primeru $n \leq \frac{-3}{-\log 2} \doteq 9{,}9658$). Če si ogledamo poseben primer, ugotovimo, da je le za $n < 10$ izraz $(1/2)^n$ večji od $0{,}001$, za vse večje n, torej tudi za ogromne, pa je vrednost potence $(1/2)^n$ manjša od 0,001, torej približno enaka 0. Podobno sklepamo tudi v spološnem primeru: le za tista števila n, ki so kvečjemu $\frac{\log \varepsilon}{\log k}$, je vrednost potence večja od ε. Za vse ostale n, tudi ogromne pa je vrednost k^n približno enaka 0.

V primeru, ko je $-1 < k < 0$, bi ločili sode in lihe stopnje potence k^n, za vsako pa bi ugotovili, da se bližajo številu 0, ko se stopnja povečuje.

Vzemimo poljuben pozitiven kot x, ga položimo v kotomerno krožnico in v presečišču premičnega kraka kota x s kotomerno krožnico načrtamo tangento na kotomerno krožnico. Opisano prikažimo s sliko
Na sliki opazimo, da je $|AB| \leq |\widehat{AC}| \leq |AD|$. Daljica AB je nasprotna kateta (nasproti kota x) pravokotnega trikotnika OAB, zato je njena dolžina $\sin x$. Lok $\widehat{AC}$ ustreza središčnemu kotu x, ki ga merimo v radianih, zato je njegova dolžina enaka $|\widehat{AC}| = x$ ($\frac{\pi \cdot 1 \cdot x}{180^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot x = 1\,\mathrm{rad} \cdot x = x\,\mathrm{rad} = x$), dolžina tangentnega odseka AD pa je nasprotna kateta v pravokotnem ODA in je zato enaka $\tan x$ ($\tan x = \frac{|AD|}{|OA|} = \frac{|AD|}{1} = |AD|$). Zato je $\sin x \leq x \leq \tan x$. Ker so količine, ki jih primerjamo pozitivne, se za obratne vrednosti urejenost obrne, torej velja $\dfrac{1}{\tan x} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$. Potem pa velja:

$$\cos x = \sin x \cdot \frac{1}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

Z upoštevanjem lihosti funkcij sin in $\tan x$ ter obnašanja urejenosti obratnih vrednosti negativnih števil, bi do podobne neenakosti prišli tudi za negativne vrednosti x.



Slika 7: K izpeljavi limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Tako smo ugotovili, da je za poljuben kot x ulomek $\dfrac{\sin x}{x}$ ujet kot "nadev" v "sendvič"[3] količine $\cos x$ in števila 1. Ko se x približuje številu 0, se polovici sendviča $\cos x$ in 1 bližata številu 1 ($\cos 0 = 1$), zato se tudi "nadev" približuje številu 1, torej je:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

V matematiki (pa tudi v tehniki) igra izredno pomebno vlogo limita

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,,\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Pri tem je število e osnova naravnih logaritmov in je zaokroženo na štiri mesta tri decimalna mesta) enako 2.718. Utemeljitev bomo zaradi prezahtevnosti opustili. Alternativno obliko zadnje limite dobimo, če vpeljemo novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$. Ko gre $x \to \infty$, gre $t \to 0$. Torej je število e dobimo tudi iz naslednjih dveh limit:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,\ \lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{e} = e^{-1}}$$

Dodajmo, da v primeru uporabe praktičnega nasveta, torej vstavljanja $x = \infty$ ali $t = 0$, v obeh primerih dobimo nov nedefiniran izraz: $\boxed{1^\infty = ?}$.

5.2 Primeri

Še enkrat ponovimo praktično pravilo za računanje limit:

[3] V anglo-ameriški literaturi tako sklepanje imenujejo sandwich lemma, lahko tudi squeeze lemma

Vstavimo a namesto x v predpis funkcije f; če dobljeni izraz znamo izračunati, je to iskana limita, če ga ne znamo izračunati moramo izbrati kako drugo pot.

Zgled 26: Preveri pravilnost naslednjih trditev:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=\dfrac{5}{6}$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\tan x}{\sin 2x}=2$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=\dfrac{2}{3}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=1$

Sledimo navodilu. V prvem primeru dobimo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=\dfrac{2\cdot 4-2-1}{3\cdot 4-3\cdot 2}=\dfrac{5}{6}$, v drugem $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\tan x}{\sin 2x}=\dfrac{1+\tan\frac{\pi}{4}}{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})}=\dfrac{1+1}{1}=2$. V tretjem problemu pa že imamo "problem", saj vstavljanje $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=\dfrac{\infty-\infty-1}{\infty-\infty}$ pripelje do nedefiniranega izraza. V takih primerih (limita racionalne funkcije, ko gre $x\to\infty$) se pogosto poslužimo naslednjega načina iskanja limite. Števec in imenovalec delimo s potenco x^n, kjer je n večja od stopenj polinomov v števcu in imenovalcu, v našem primeru delimo z x^2. Dobimo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1|:x^2}{3x^2-3x|:x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{\cancel{x}}{x\cancel{2}}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{3\cancel{x}}{x\cancel{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{3}{x}}=\frac{2-\overbrace{\frac{1}{\infty}}^{=0}-\overbrace{\frac{1}{\infty^2}}^{=0}}{3-\underbrace{\frac{3}{\infty}}_{=0}}=\frac{2}{3}$$

V zadnjem primeru na začetku spet sledimo praktičnemu napotku: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-3x}=\dfrac{2\cdot 1^2-1-1}{3\cdot 1^2-3\cdot 1}=\dfrac{0}{0}$. Dobimo nedefiniran izraz, zato moramo za izračun limite ubrati kako drugo pot. Pri polinomih običajno pri nedefiniranosti $0/0$ uberemo naslednjo pot. Ker je vrednost polinoma v števcu in imenovalcu pri $x=1$ enaka 0, je število $x=1$ ničla obeh polinomov. Zato lahko polinoma razstavimo, če ne gre drugače, pa s Hornerjevim algoritmom, recimo za polinom v števcu je

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -1\\ 1 & & 2 & 1\\ \hline & 2 & 1 & ||0\end{array}$$

, kar pripelje do razstavljanja $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$, v imenovalcu pa uporabimo kar preprosto izpostavljanje $3x^2 - 3x = 3x(x-1)$. Zato je:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\,(2x+1)}{3x\,\cancel{(x-1)}} = \frac{2\cdot 1 + 1}{3\cdot 1} = 1$$

Tako smo ugotovili, da so vse štiri trditve v nalogi pravilne. ■

Zgled 27: Izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^2 + 13x + 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

3. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 9} - x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sqrt{3x-2} - 4}{x^3 - 4x}$

V prvem primeru po vstavljanju dobimo izraz $\frac{5}{0}$, ki gre preko vsake meje, bodisi v pozitivno (∞, ko se bližamo številu 2 z desne strani), bodisi v negativno stran ($-\infty$, ko se bližamo številu 2 z leve strani). Zato v tem primeru limite ni. Če bi vzeli namesto funkcije $\frac{x+3}{x-2}$ funkcijo $\frac{x+3}{(x-2)^2}$ bi limita obstajala, in sicer bi bila enaka ∞.

V drugem primeru po vstavljanju dobimo nedefiniranost $(\frac{0}{0})$, ki jo uženemo z razstavljanjem, kjer si spet lahko pomagamo s Hornerjevim algoritmom: števec $\begin{array}{c|ccc} & 3 & 13 & 4 \\ \hline -4 & & -12 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & \|0 \end{array}$, torej $3x^2 + 13x + 4 = (x+4)(3x+1)$, imenovalec $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline -4 & & -4 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \|0 \end{array}$, zato $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x+4)(x^2+1)$. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^2 + 13x + 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}\,(3x+1)}{\cancel{(x+4)}\,(x^2+1)} = \frac{3\cdot(-4)+1}{(-4)^2+1} = -\frac{11}{17}$$

V tretjem primeru $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^3+27}{x^2-9} - x\right)$ vstavljanje dá izraz $\frac{0}{0} + 3$, ki je nedefiniran v prvem delu. Zato preuredimo prvi del $\frac{x^3+27}{x^2-9}$ v $\dfrac{\cancel{(x+3)}\,(x^2-3x+9}{(x-3)\,\cancel{(x+3)}} = \frac{x^2-3x+9}{x-3}$, ki po vstavljanju $x = -3$ dá definiran izraz $\frac{9+9+9}{-3-3} = -\frac{9}{2}$. Zato je $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^3+27}{x^2-9} - x\right) = -\dfrac{9}{2} + 3 = -1\dfrac{1}{2}$.

Praktični nasvet v zadnjem primeru pripelje do nedefiniranega izraza $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sqrt{3x-2}-4}{x^3-4x} = \dfrac{2\sqrt{4}-4}{2^3-8} = \dfrac{0}{0}$. Spomnimo se, kako smo odpravljali korene v imenovalcu (racionalizacija). Podoben postopek uporabimo za odpravo korena v števcu, ulomek razširimo z $x\sqrt{3x-2}+4$, da dobimo:

$$\frac{x\sqrt{3x-2}-4| \cdot (x\sqrt{3x-2}+4)}{x^3-4x| \cdot (x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{x^2(3x-2)-16}{x(x^2-4)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{3x^3-2x^2-16}{x(x-2)(x+2)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{\cancel{(x-2)}\ (3x^2+4x+8)}{x\ \cancel{(x+2)}\ \cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{3x^2+4x+8}{x(x+2)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)}$$

Polinom $3x^3-2x^2-16$ smo razstavili z uporabo "Hornerja". Po vstavljanju $x=2$, dobimo $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sqrt{3x-2}-4}{x^3-4x} = \dfrac{3\cdot 4+4\cdot 2+8}{2(2+2)\cdot(2\sqrt{3\cdot 2-2}+4)} = \dfrac{28}{8\cdot 8} = \dfrac{7}{16}$. ■

Zgled 28: Izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2\sin 4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$

V vseh primerih po vstavljanju dobimo nedefiniran izraz $\frac{0}{0}$. Spomnimo se na limito $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ in jo uporabimo v naših primerih. V limiti imamo vzorec:

- v limiti nastopa ulomek,
- v števcu (imenovalcu) nastopa izraz **sinus (kot)**, v imenovalcu (števcu) nastopa **kot**,
- **kot** potuje proti 0 (**kot** $\to 0$)

V računih poskušamo doseči opisani vzorec, tudi z vpeljavo nove neznanke. V prvem primeru imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} \underbrace{=}_{3x=t} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} 3\cdot\frac{\sin t}{t} = 3\cdot 1 = 3$$

S podobnim postopkom dobimo tudi koristen splošen rezultat:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x} = m}$$

V drugem primeru uporabimo pravkar zapisano splošni rezultat:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{2\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\sin 4x} = \frac{3}{2} : \frac{\sin 4x}{x} = \frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{8}$$

V tretjem primeru razširimo števec in imenovalec ulomka z $6x$, da dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin 2x}{x\cdot\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} : \frac{\sin 3x}{x} = \frac{2}{3}$$

V zadnjem primeru vpeljemo novo spremenljivko $1-x=t$. Potem gre $t\to 0$ kakor hitro gre $x\to 1$. Zato je $\pi x=\pi(1-t)=\pi-\pi t$ in $\sin\pi x=\sin(\pi-\pi t)=\sin\pi t$. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{t(2-t)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t)}{t}\cdot\frac{1}{2-t}=\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\blacksquare$$

Zgled 29: Izračunaj naslednji limiti:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3}$

Če vstavimo $x=\infty$ v prvi izraz, dobimo nedefiniranost 1^{∞}, ki jo poznamo iz limite števila e. Tudi v drugem primeru dobimo isto vrsto nedefiniranosti, saj $\frac{2x-3}{2x+3}=\frac{2-\frac{3}{x}}{2+\frac{3}{x}}\to\frac{2+0}{2+0}=1$, ko $x\to\infty$, eksponent $x+3$ pa v tem primeru potuje proti ∞. Oglejmo si, kakšen je glavni vzorec v limitah povezanih s številom e. V limiti nastopajo trije enaki izrazi, ki smo jih označimo z $\square$:

- enakrat v osnovi potence $\left(1\pm\frac{1}{\square}\right)^{\square}$,
- drugič v eksponentu potence $\left(1\pm\frac{1}{\square}\right)^{\square}$
- tretjič kot spremenljivka, ki gre preko vsake meje $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{\square}\right)^{\square}$

Izraz, katerega limito računamo, poskušamo preoblikovati v opisani vzorec. V prvem primeru preoblikovanje poteka takole:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot 3x}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{6x}{x}}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6}$$

Pri preoblikovanju smo upoštevali pravilo za potenciranje potenc ($a^{m\cdot n}=(a^m)^n$) ter dejstvo, da v primeru $x\to\infty$ velja, da je tudi $\frac{x}{2}\to\infty$. Obkrožen izraz se potem približuje številu e^{-1}, zato je iskana limita $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^{-6}$. Do podobnega rezultata bi prišli z uvedbo nove spremenljivke $t=\frac{x}{2}$. V drugem primeru najprej spremenimo osnovo v obliko $1\pm\frac{1}{\square}$:

$$\frac{2x-3}{2x+3}=1+\left(\frac{2x-3}{2x+3}-1\right)=1+\frac{(2x-3)-(2x+3)}{2x+3}=1-\frac{6}{2x+3}=1-\frac{1}{\frac{2x+3}{6}}$$

Vpeljimo novo spremenljivko $t = \dfrac{2x+3}{6}$, za katero ugotovimo, da $t \to \infty$, kakor hitro $x \to \infty$. Potem je $x = \dfrac{6t-3}{2}, x+3 = \dfrac{6t+3}{2}$ in

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{6t+3}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6t+3}{2t}}$$

Ko t potuje proti ∞, osnova zadnje limite potuje proti e^{-1}, eksponent $\dfrac{6t+3}{2t}$ pa proti $\frac{6}{2} = 3$. Zato je $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$.

Pravilnost rezultata ocenimo tako, da izračunamo vrednost izraza $\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3}$ za ogromen x, recimo za $x = 10^6$, za kar nam računalnik dá na pet decimalnih mest zaokroženo vrednost $0,04979$, enako vrednost pa na prav toliko zaokroženih decimalk dá $e^{-3} = 0,04979$. ■

6 Zveznost funkcij

Pojem **zvezna** funkcija je eden najpomembnejših pojmov v teoriji funkcij. Stroga definicija vsebuje za naše potrebe prezahtevno $\varepsilon - \delta$ definicijo. Za naše potrebe bo bolj koristna manj stroga, opisna definicija.

> Zvezna funkcija pomeni funkcijo, pri kateri majhna sprememba neodvisne spremenljivke povzroči majhno spremembo funkcijske vrednosti.

Zgled 30: Izrazi spremembo funkcijske vrednosti Δf za spodnji funkciji $y = f(x)$, če je bila sprememba neodvisne spremenljivke $\Delta x = h$:

1. $f(x) = 3x - 2$

2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Vzemimo poljuben x, ki ga spremenimo za $\Delta x = h$. Zato je nova vrednost neodvisne spremnljivke $x + h$ (h je lahko potiven ali negativen; v prvem primeru gre za povečanje vrednosti x, v drugem za zmanjšanje). Potem je sprememba funkcijske vrednosti $\Delta f = f(x+h) - f(x)$.

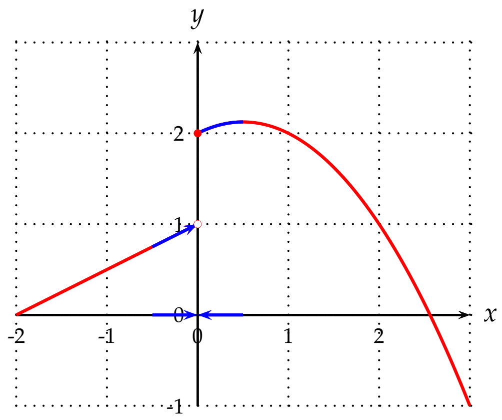
V prvem primeru je $\Delta f = (3(x+h) - 2) - (3x - 2) = 3x + 3h - 2 - 3x + 2 = 3h$. Preprost razmislek nam pove, da je pri mali vrednosti h tudi sprememba $\Delta f = 3h$ majhna, še enostavneje pa to pokažemo z limito: $\lim\limits_{h\to 0} \Delta f = \lim\limits_{h\to 0}(3h) = 0$.

V drugem primeru je $\Delta f = f(x+h) - f(x) = \big((x+h)^2 - 2(x+h) - 3\big) - (x^2 - 2x - 3) = \cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{2x} - 2h - \cancel{3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{3} = 2xh + h^2 - 2h$. Torej je tudi v tem primeru $\lim\limits_{h\to 0} \Delta f = 0$. ∎

leva desna limita

> Število L imenujemo leva limita funkcije $f(x)$ v točki $x = a$, če se funkcijske vrednosti $f(x)$ umirijo okoli števila L, ko se x približuje številu a z leve strani, torej $x \to a$; $x < a$. Podobno označimo z D desno limito funkcije $f(x)$ v točki $x = a$, če se funkcijske vrednosti umirijo okrog D, ko se z x bližamo številu a z desne strani, torej $x \to a$; $x > a$. Levo in desno limito označimo:
>
> $$\boxed{L = \lim_{x\to a-} f(x) \text{ in } D = \lim_{x\to a+} f(x)}$$

Za funkcijo f, katere graf prikazuje spodnja slika, je leva limita v točki $x = 0$ enaka $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$, desna limita je enaka $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$, funkcijska vrednost $f(0)$ pa je prav tako enaka 2.



Zgled 31: Nariši graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x+3)(x-4) & ; \quad x < 0 \\ 2^{-x} + 2 & ; \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2^x} + 1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

in izračunaj $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$ **in** $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$**.**

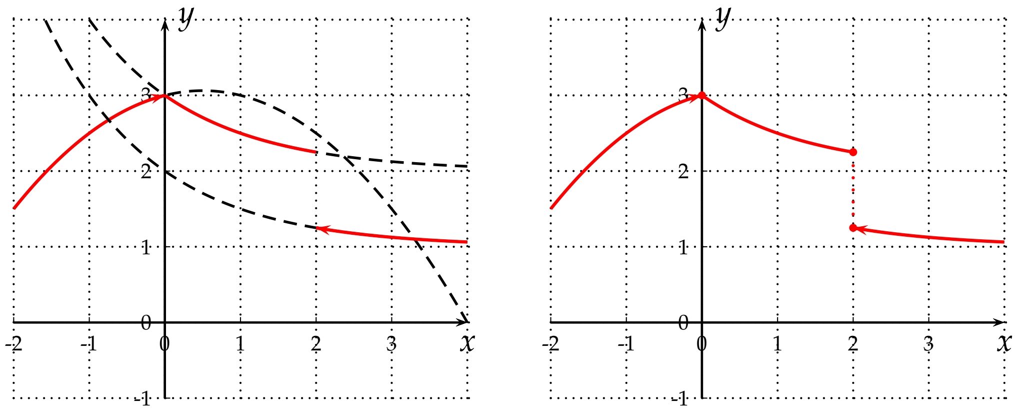
Funkcija f se sestoji iz treh predpisov. Prvi predpis, $y = -\dfrac{1}{4}(x+3)(x-4)$ je predpis za kvadratno funkcijo v ničelni obliki z ničlama $x_1 = -3$ in $x_2 = 4$ ter temenom $(1/2, 49/16)$. Njen graf narišemo le za $x < 0$. Drugi predpis, ki je definiran za $0 \leq x$ 2, je premaknjena eksponentna funkcija $y = 2^{-x} + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, tretji predpis pa je premaknjena eksponentna funkcija $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$. Narišemo vsako posebej vzdolž cele abscisne osi in potem izbrišemo dele, kjer ustrezni predpisi ne veljajo:

Ustrezne limite so

$$\begin{array}{lclclcl} \lim_{x \to 0-} f(x) & = & \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{4}(x+3)(x-4)\right) & = & -\frac{1}{4}(0+3)(0-4) & = & 3 \\ \lim_{x \to 0+} f(x) & = & \lim_{x \to 0} (2^{-x} + 2) & = & 2^0 + 2 & = & 3 \\ \lim_{x \to 2-} f(x) & = & \lim_{x \to 2} (2^{-x} + 2) & = & 2^{-2} + 2 & = & 2\frac{1}{4} \\ \lim_{x \to 2+} f(x) & = & \lim_{x \to 2} (2^{-x} + 1) & = & 2^{-2} + 1 & = & 1\frac{1}{4} \end{array} \quad \blacksquare$$

Omenili smo, da je funkcija $f(x)$ v točki $x = a$ **zvezna**, če se vrednosti funkcije f malo pred in malo po $x = a$ **poljubno malo razlikujejo** od funkcijske vrednosti $f(a)$. Še drugače povedano: **definicija zveznosti**

Graf zvezne funkcije ni nikjer pretrgan (prekinjen, strgan).



Slika 8: Graf funkcije f iz zgleda

V primeru funkcije v prejšnjem zgledu je graf pretrgan v točki $x = 2$, zato funkcija f v $x = 2$ ni zvezna, v točki $x = 0$ pa je zvezna, saj se tam graf ne pretrga, kljub temu, da se je predpis spremenil.

Bolj strogo definiramo zveznost takole:

Funkcija $y = f(x)$ je zvezna v točki $x = a$, če sta v tej točki leva in desna limita enaki funkcijski vrednosti v tej točki, torej:

$$\boxed{\text{Funkcija } y = f(x) \text{ je zvezna v točki } x = a, \text{ če je } \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)}$$

Če je funcija $y = f(x)$ zvezna v **vsaki** točki nekega obravnavanega območja, pravimo, da je zvezna na tem območju.

Točkam, kjer funkcija ni zvezna, pravimo točke nezveznosti. Poznamo nezveznosti dveh vrst:

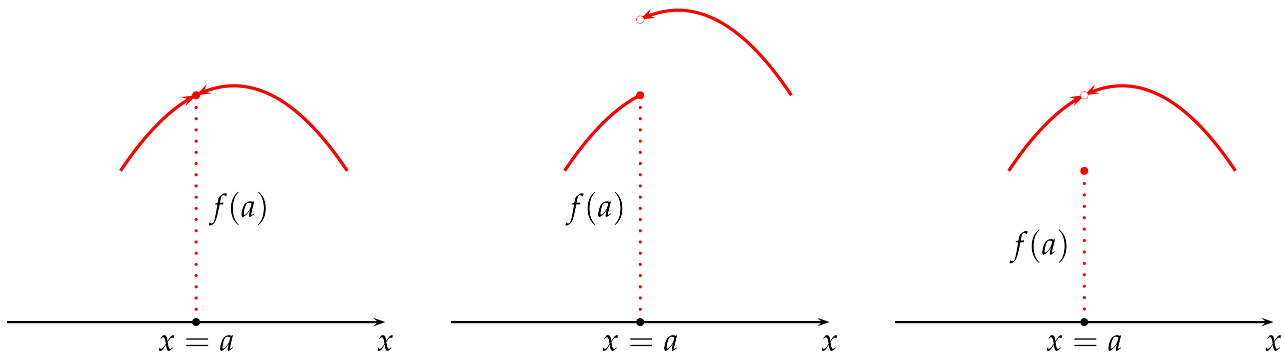
- Nezveznost 1. vrste ima funkcija v točki, v kateri bodisi leva, bodisi desna ali pa celo obe limiti nista enaki funkcijski vrednosti v tej točki. V taki točki ima funkcija skok, ki je enak absolutni vrednosti razlike med levo in desno limito.
- Nezveznost 2. vrste ima funkcija v točki, v kateri bodisi leva, bodisi desna ali pa celo obe limiti ne obstajata.

V tabeli na sliki 4 so prikazane osnovne elementarne funkcije in njihove morebitne točke nezveznosti ter vrsta nezveznosti.

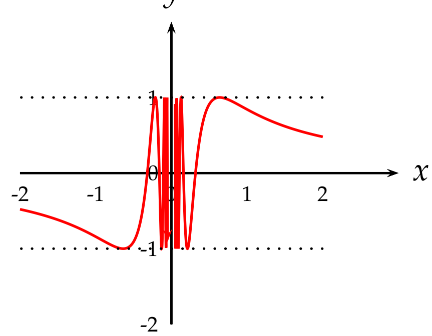
Zgled 32: Naj bosta a in b poljubni realni števili in

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; \quad x < 0 \\ ax + b & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

1. **Nariši graf funkcije za $a = -1$ in $b = 1$. Ali je v tem primeru funkcija zvezna?**
2. **Izračunaj konstanto a in b tako, da bo funkcija zvezna.**

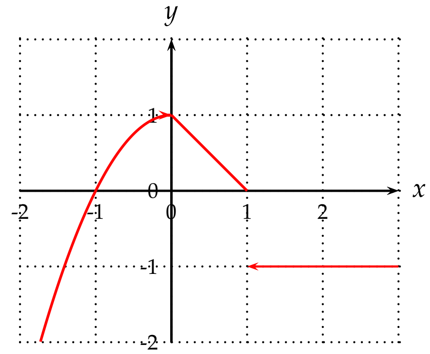


Slika 9: Leva funkcija je v točki $x = a$ zvezna, srednja in desna funkcija pa imata v točki $x = a$ nezveznost s skokom (nezveznost 1. vrste)

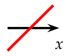
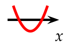
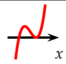
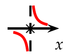
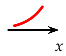
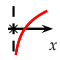
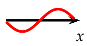
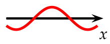
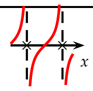
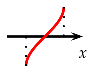
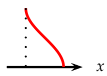
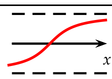


Slika 10: Funkcija $\sin(1/x)$ ima v $x = 0$ nezveznost 2. vrste

Funkcija je sestavljena iz treh predpisov. Na negativnem delu abscisne osi ($x < 0$) je predpis kvadratna funkcija $y = 1 - x^2$, na intervalu $[0, 1]$ je predpis linearna funkcija $y = x - 1$, na poltraku $(1, \infty)$ pa je predpis konstantna funkcija $y = -1$.



Vsak od predpisov predstavlja zvezno funkcijo. Nezveznosti se lahko pojavijo pri takih funkcijah le v točkah spremembe predpisa, v našem primeru pri $x = 0$ in $x = 1$. Ker je $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (1 - x^2) = 1$ in $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (-x + 1) = 1$, je funkcija v točki $x = 0$ zvezna, v točki $x = 1$ pa nezvezna, ker je $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (-x + 1) = 0$ in $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-1) = -1$. $\square$

ime funkcije	enačba $f(x) =$	graf	točke nezveznosti	vrsta nezveznosti
linearna	$kx + n$		—	—
kvadratna	$ax^2 + bx + c$		—	—
polinom	$ax^n + \ldots + a_1 x + a_0$		—	—
racionalna	$\frac{p(x)}{q(x)}$ p in q sta polinoma		poli	1. vrsta
eksponentna	a^x		—	—
logaritemska	$\log_a x$		—	—
sinus	$\sin x$		—	—
kosinus	$\cos x$		—	—
tangens	$\tan x$		poli	1. vrsta
arkus sinus	$\arcsin x$		—	—
arkus kosinus	$\arccos x$		—	—
arkus tangens	$\arctan x$		—	—

Slika 11: Elementarne funkcije in zveznost

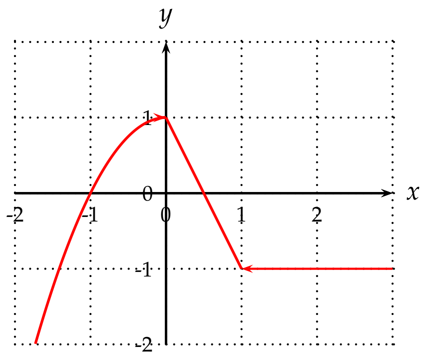
Da bo funkcija f zvezna v $x = 0$, mora veljati

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (1 - x^2) = 1 = b = \lim_{x \to 0+} (ax + b) = \lim_{x \to 0+} f(x)$$

Če naj bo zvezna v $x = 1$, mora veljati

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (ax + b) = a + b = -1 = \lim_{x \to 1+} (-1) = \lim_{x \to 1+} f(x)$$

Konstanti a in b torej zadoščata sistemu enačb $b = 1$ in $a + b = -1$. Le ta pa ima rešitev $a = -2$ in $b = 1$. Narišimo še graf funkcije v primeru izračunanih konstant a in b:

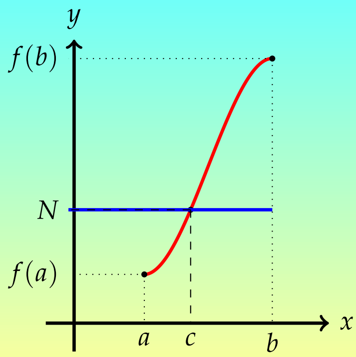


■

Zvezne funkcije imajo pomembno lastnost vmesne vrednosti:

izrek o vmesni vrednosti

Oglejmo si sliko na desni. Na njej je narisan graf zvezne funkcije f na (zaprtem) intervalu $[a, b]$, število N pa naj bo poljubno število med $f(a)$ in $f(b)$, $f(a) \neq f(b)$. Potem obstaja tako število $c \in (a, b)$, da je velja $f(c) = N$. Stroga utemeljitev te trditve presega naše znanje, zato se zadovoljimo s slikovnim prikazom utemeljitve. Trditev imenujemo izrek o vmesni vrednosti.



Oglejmo si primer, v katerem izkoristimo lastnost vmesne vrednosti.

Zgled 33: Pokaži, da ima enačba $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ rešitev med 1 in 2.

Označimo $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ in izračunamo $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$ ter $f(2) = 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2 = 12$. Ker je funkcija f polinom, je zvezna in zato zanjo velja izrek o vmesni vrednosti. Število 0 leži med $-1 = f(1)$ in $12 = f(2)$, zato obstaja v intervalu $[1, 2]$ tako število c, da bo $f(c) = 0$.