# DOLOCENI INTEGRAL

(Interno gradivo)

Sestavil I.K.



2016-21

# Kazalo

1 **Uvod** **2**

2 **Newton Leibnizova formula** **9**

3 **Uporaba določenega integrala** **12**

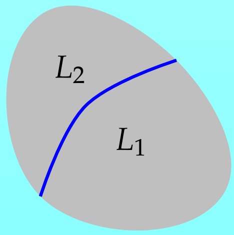
# 1 Uvod

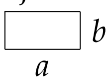
V matematiki, pa tudi v naravoslovnih vedah, ki uporabljajo matematiko, se pogosto znajdemo pred nalogo, kako izračunati ploščino nekega lika. Lik je del ravnine, ki je omejen s krivimi in ravninmi črtami. Kaj mislimo pod pojmom **ploščina lika**?

Med liki in realnimi števili vzpostavimo preslikavo, ki vsakemu liku priredi realno število. Tako liku $L$ ta preslikava, označimo jo s $p$, priredi število(=ploščina) $p(L)$. Preslikava $p$ ustreza naslednjim pogojem:

1. $p(L) \geq 0$
2. Skladna lika imata enako ploščino, torej $L_1 \cong L_2 \Rightarrow p(L_1) = p(L_2)$.
3. Če lik razdelimo na dva lika, ki nimata skupnih notranjih točk (skupno imata kvečjemu del meje), je ploščina lika enaka vsoti ploščin nastalih likov:

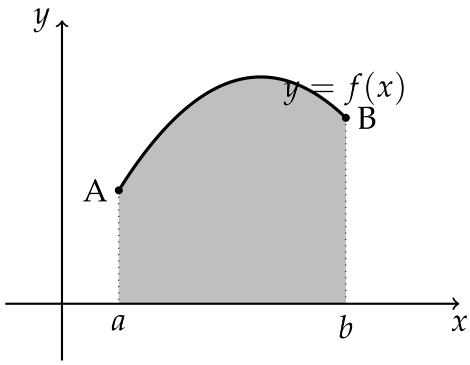
   $$p(L) = p(L_1) + p(L_2)$$

   
   
   $L = L_1 \cup L_2$
4. Enotski kvadrat ima ploščino 1 eno (kvadratno) enoto.

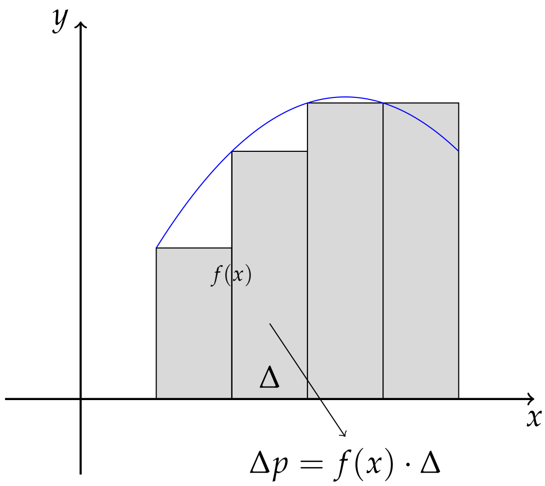
V primeru omejenosti z ravnimi črtami nam na pomoč priskoči geometrija. Tako je ploščina pravokotnika 

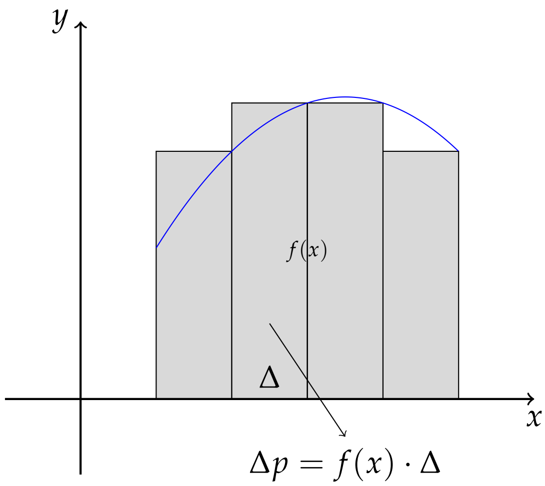
enaka $p = a \cdot b$. Iz trikotnik s primernimi razrezi ustvarimo ploščinsko enak pravokotnik in ugotovimo, da je ploščina trikotnika enaka $\frac{c \cdot v_c}{2}$. Večkotnike razrežemo na trikotnike, izračunamo vsoto ploščin posameznih trikotnikov in potem njihove ploščine seštejemo.

Preusmerimo pozornost na lik, ki je prikazan na spodnji sliki:

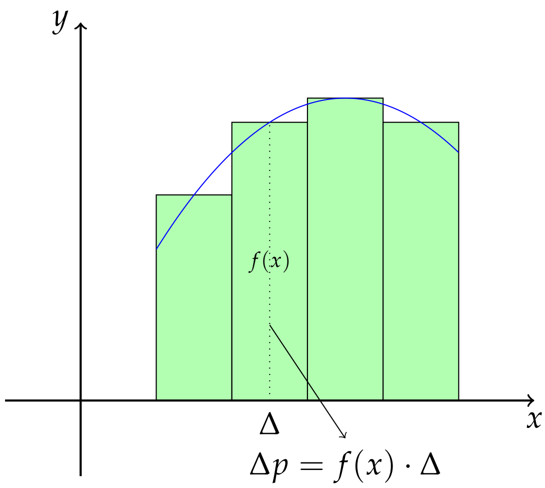


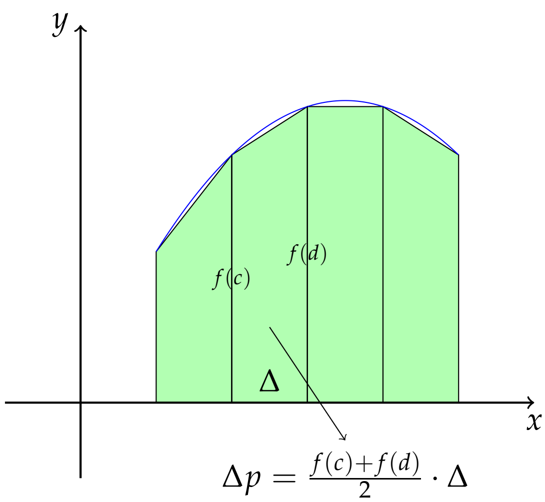
Lik je omejen z abscisno osjo, grafom funkcije $y = f(x)$ in premicama $x = a$ ter $x = b$. Lik je podoben trapezu z osnovnica $aA$ in $bB$ ter krakoma $ab$ in $\widehat{AB}$. Ker je eden od krakov kriva črta, bomo lik imenovali krivočrtni trapez $abBA$. Naša naloga bo izračunati ploščino tega trapeza. Kako to storiti?
Ena od možnost je, krivočrtni trapez razdelimo na pravokotnike (delilni pravokotniki), izračunamo ploščine posameznih pravokotnikov, tako dobljene ploščine pa seštejemo. Tako dobimo bolj ali manj dober približek ploščine krivočrtnega trapeza.
Običajno pravokotnike zgradimo tako, da interval $[a, b]$ na abscisni osi razdelimo na enako velike delilne intervale, ki predstavljajo dolžino delilnih pravokotnikov, za njihovo višino pa izberemo funkcijske vrednosti v levem ali desnem krajišču intervala:



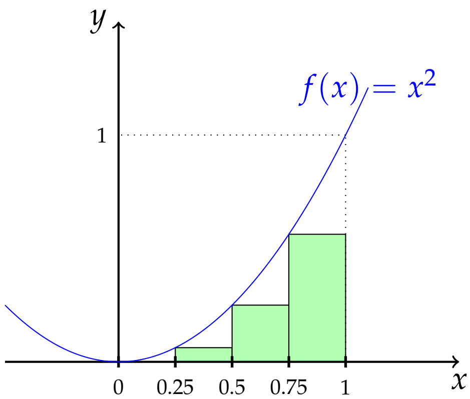

Za višino delilnih pravokotnikov lahko izberemo tudi kakšno drugo funkcijsko vrednost znotraj delilnega intervala, recimo funcijsko vrednost na sredini intervala, lahko pa izberemo namesto pravokotnikov v krivočrtni trapez včrtane trapeze:

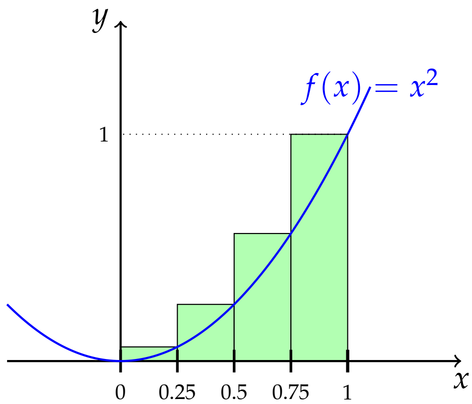


**Zgled 1:** **Na vse štiri opisane načine oceni ploščino krivočrtnega trapeza, ki ustvarja funkcija $f(x) = x^2$ z abscisno osjo na intervalu $[0, 1]$. V vseh primerih izberi štiri delilne intervale.**

Izbrali bomo štiri delilne intervale, zato bo dolžina enega enaka $\Delta = \frac{1-0}{4} = 0.25$. Na spodnjih slikah sta naslikana primera, kjer izberemo za višino delilnega pravokotnika levo in desno funkcijsko vrednost:




Pravokotniki imajo vsi dolžino $\Delta = 0.25$, višino pa enkrat funkcijsko vrednost v levem spodnjem oglišču pravokotnika, drugič v desnem spodnjem oglišču. Izračunamo ploščine posameznih pravokotnikov in jih na koncu seštejemo:

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta p = f(x) \cdot \Delta$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.25 | $0.25^2$ | 0.015625 |
| 0.5 | $0.5^2$ | 0.0625 |
| 0.75 | $0.75^2$ | 0.140625 |
| vsota | | 0.21875 |

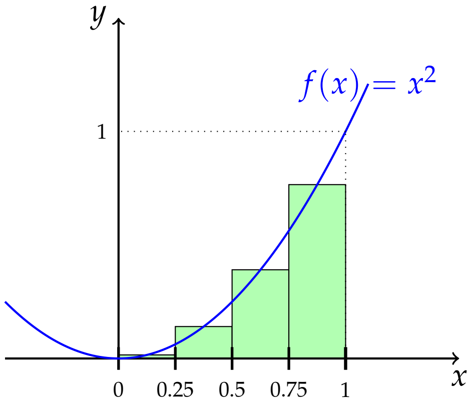
| $x$ | $f(x)$ | $\Delta p = f(x) \cdot \Delta$ |
|---|---|---|
| 0.25 | $0.25^2$ | 0.015625 |
| 0.5 | $0.5^2$ | 0.0625 |
| 0.75 | $0.75^2$ | 0.140625 |
| 1.00 | $1^2$ | 0.25 |
| vsota | | 0.46875 |

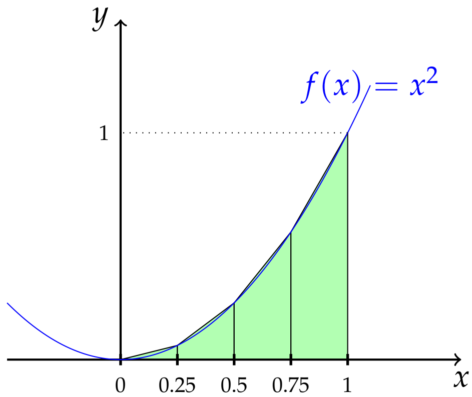
Dobili smo grobi oceni ploščine krivočrtnega trapeza: 0.22 in 0.47, če zaokrožimo na dve decimalni mesti. Če bi izbrali več delilnih intervalov in tako več pravokotnikov, bi približki bili bliže realni vrednosti.

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta p = f(x) \cdot \Delta$ |
|---|---|---|
| 0.125 | $0.125^2$ | 0.0390625 |
| 0.375 | $0.375^2$ | 0.0351625 |
| 0.625 | $0.625^2$ | 0.09765625 |
| 0.875 | $0.875^2$ | 0.19140625 |
| vsota | | 0.3281325 |

| $x$ | $f(c)$ | $f(d)$ | $\Delta p = \frac{f(c)+f(d)}{2} \cdot \Delta$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $0^2$ | $0.25^2$ | 0.078125 |
| 0.25 | $0.25^2$ | $0.5^2$ | 0.0390625 |
| 0.5 | $0^5$ | $0.75^2$ | 0.1015625 |
| 0.75 | $0.75^2$ | $1^2$ | 0.1953125 |
| vsota | | | 0.34375 |

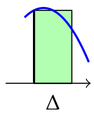
Gornji tabeli prikazujeta iskanje približka s sredino delilnega intervala in s trapezi. Še ustrezni sliki:

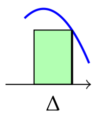


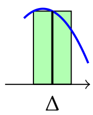



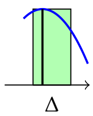

V tem primeru sta približka na stotinko zaokrožena enaka 0.33 in 0.34. ■

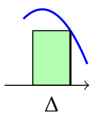
Povzemimo: Ploščino krivočrtnega trapeza $abBA$, ki ga omejujeta graf funkcije $y = f(x)$, abscisna os in premici $x = a$, $x = b$ (desna slika) približno izračunamo tako, da interval $[a, b]$ razdelimo na delilne intervale in nad njimi konstruiramo pravokotnike ali trapeze. Običajno delilne intervale izberemo enako dolge intervale. V takem primeru je dolžina intervala $\Delta = \frac{b-a}{n}$, če izberemo $n$ intervalov. Za višine pravokotnikov lahko izberemo poljubno funkcijsko vrednost v delilnem intervalu, najpogosteje pa izberemo:

- funkcijsko vrednost v levem krajišču delilnega intervala 

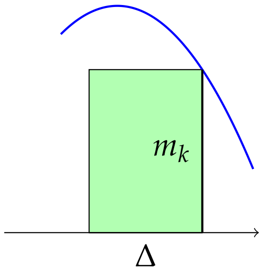
- funkcijsko vrednost v desnem krajišču delilnega intervala 

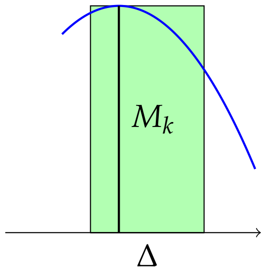
- funkcijsko vrednost v sredini delilnega intervala 

- maksimalno funkcijsko vrednost v delilnem intervalu 

- minimalno funkcijsko vrednost v delilnem intervalu 


Izbranim vrstam delilnih pravokotnikov izračunamo ploščine in jih seštejemo. Tako dobljene vsote so boljši ali slabši približki za ploščino krivočrtnega trapeza. Pri večjem številu delilnih pravokotnikov so tudi približki vedno bližje pravi vrednosti. Vzemimo, da je delilnih pravokotnikov $n$, za višino pravokotnikov pa izberemo enkrat maksimalno in drugič minimalno funkcijsko vrednost v delilnem intervalu (za zvezno, nepretrgano funkcijo taki vrednosti vedno obstajata). Vzemimo, da je minimalna vrednost v $k$ tem od $n$ delilnih intervalov $m_k$, maksimalna vrednst pa $M_k$.

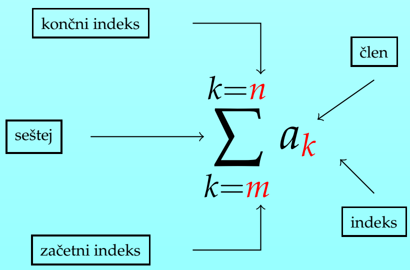



Seštevek ploščin pravokotnikov z minimalno višino nam postreže s spodnjim približkom za ploščino $p_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta$, če pa izberemo maksimalno višino, dobimo zgornji približek za ploščino $P_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta$. Ni se težko prepričati, da je ploščina krivočrtnega trapeza, recimo $p$, ujeta med ploščini $p_n$ in $P_n$:

$$p_n < p < P_n$$

V zadnjem odstavku smo uporabili simbol $\sum$ (sigma), ki v matematiki pomeni znak za seštevanje. Desno od znaka so zapisani členi vsote, ki so običajno členi nekega zaporedja, v našem primeru $a_k$ z indeksom $k$. Pod znako sigma je zapisano kateri indeks zaporedja izberemo za prvi člen vsote, naslednje člene dobimo tako, da prejšnji indeks povečamo za 1. Seštevanje končamo, ko doseže indeks končno vrenost, ki je zapisana nad simbolom $\sum$.




Za primer izračunajmo $\sum_{k=3}^{k=7} ak^2$. Ker je začetni indeks 3, je prvi člen vsote enak $a \cdot 3^2 = 9a$, v naslednjih členih pa se indeks povečuje za ena, dokler ne dosežemo končnega indeksa 7:

$$\sum_{k=3}^{k=7} ak^2 = a \cdot 3^2 + a \cdot 4^2 + a \cdot 5^2 + a \cdot 6^2 + a \cdot 7^2 = 9a + 16a + 25a + 36a + 49a = 135a$$

Kaj se dogaja s spodnjim in zgornjim približkom, ko število delilnih intervalov povečujemo. Vzemimo, da smo jih povečali za dvakrat, torej smo nove delilne intervale in tako tudi pravokotnike dobili tako, da smo stare razpolovili:


Skupna ploščina dveh pravokotnikov, ki nastaneta pri izbiri minimalne višine, se poveča, pri izbiri maksimalne višine pa zmanjša (slika). Zato velja naslednja veriga neenakosti:

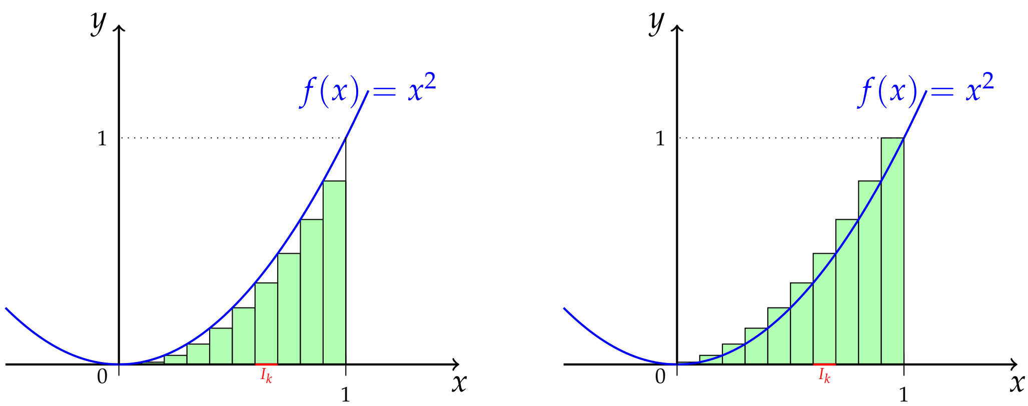
$$p_n < p_{2n} < p < P_{2n} < P_n$$

Ko število delilnih intervalov povečujemo ($n \to \infty$) se približka v spodnji in zgornji vsoti vedno bolj približujeta iskani ploščini krivočrtnega trapeza:

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta \text{ in } p = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta$$

**Zgled 2:** **Na opisani način izračunaj ploščino krivočrtnega trapeza, ki ga omejujeta funkcija $f(x) = x^2$ in abscisna os na intervalu $[0, 1]$.**

Razdelimo interval $[0, 1]$ na $n$ enakih delilnih intervalov. Prvi, označimo ga z$I_1$, ima krajišči 0 in $\frac{1}{n}$, drugi $I_2$ ima krajišči $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, tretji $I_3$ je s krajišči $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ in tako dalje do zadnjega intervala $I_n$, ki ima krajišči $\frac{n-1}{n}$ in $\frac{n}{n} = 1$. Poljubni vmesni interval, recimo $I_k$, je potem enak $[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.



Potem je spodnja vsota $p_n$ enaka:

$$p_n = \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k-1}{n}) \cdot \Delta = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(k-1)^2}{n^3} =$$

$$= \frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)$$

Podobno ugotovimo, da je zgornja vsota $P_n$ enaka:

$$P_n = \sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n}) \cdot \Delta = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(k)^2}{n^3} =$$

$$= \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Pri obeh vsotah se pojavi vsota kvadratov zaporednih naravnih števil. Iz poglavja o zaporedjih si sposodimo (dokažemo jo s pomočjo matematične indukcije) naslednjo formulo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2 = \frac{x \cdot (x+1) \cdot (2x+1)}{6}$$

Zato je v naših primerih:

$$p_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3}$$

$$P_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Iskano ploščino dobimo z limitiranjem. Limita spodnje vsote na dá:

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1) \mid : n^3}{6n^3 \mid : n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n}) \cdot (2-\frac{1}{n})}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$$

Limita zgornje vsote pa nam dá:

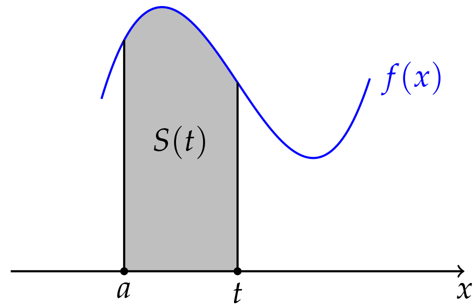
$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \mid : n^3}{6n^3 \mid : n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n}) \cdot (2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$$

Tako smo ugotovili, da je iskana ploščina enaka $\frac{1}{3}$. ■

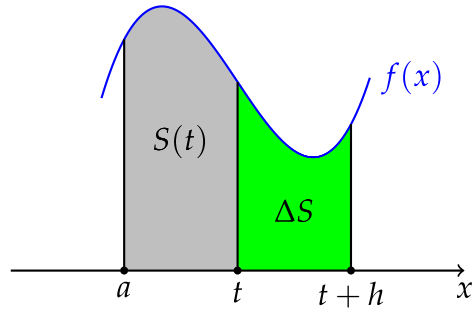
Opisano iskanje ploščine krivočrtnega trapeza z limitiranjem je zahtevno, zato bomo v naslednjem poglavju sledili enostavnejši poti, ki sta jo neodvisno drug od drugega odkrila utemeljitelja diferencialnega (odvodi) in integralnega računa, sir Isaac Newton (25. 12. 1642 – 20.3. 1726) in Gottfried Wilhelm Leibniz (1. 7. 1646 - 14. 11. 1716).

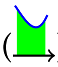
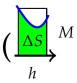
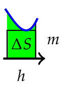
# 2 Newton Leibnizova formula

Vzmemimo krivočrtni trapez, ki ga oklepajo graf funkcije $f(x)$, abscisna os in premici $x = a$ ter $x = t$, pri čemer naj bo $t > a$. Če vrednost količine $a$ ne spreminjamo, spreminjamo pa vrednost količine $t$, se spreminja tudi oblika krivočrtnega trapeza in tako tudi njegova ploščina. Zato je omenjena ploščina funkcija spremenljivke $t$, ki jo označimo s $S(t)$.




Spremenimo vrednost spremenljivke $t$ do $t + h$ in ocenimo za koliko se spremeni vrednost ploščine (funkcije) $S$. Označimo spremembo z $\Delta S$,torej je $\Delta S = S(t+h) - S(t)$. Ocenimo velikost spremembe $\Delta S$. Vzemimo, da je največja vrednost funkcije $f$ na intervalu $[t, t+h]$ enaka $M$, najmanjša vrednost na tem intervalu pa $m$.




Očrtajmo krivočrtnemu trapezu () pravokotnik s stranicama $h$ in $M$ (). Potem je $\Delta S < M \cdot h$. Drugo stran ocene dobimo, če trapezu včrtamo pravokotni s stranicama $h$ in $m$ (). V tem primeru dobimo: $m \cdot h < \Delta S$. Obe oceni združimo v eno:

$$m \cdot h < \Delta S < M \cdot h \qquad \text{ali} \qquad m \cdot h < S(t+h) - S(t) < M \cdot h$$

Sistem neenakosti v zadnji zapisani oceni delimo s $h$ in privzemimo, da je $h > 0$ (drugače se le oba neenačaja v sistemu, $<, <$, zamenjata v $>, >$). Dobimo:

$$m < \frac{S(t+h) - S(t)}{h} < M$$

Preučimo, kaj se zgodi z izrazi $m$, $\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ in $M$, ko pošljemo prirastek $h$ proti 0, torej $h \to 0$:

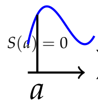
- Interval $[t, t+h]$ se v tem primeru skrči v točko $[t, t] = t$, zato je $\lim\limits_{h \to 0} = M \lim\limits_{h \to 0} m = f(t)$,
- vrednost količnika pa postane odvod funkcije $S(t)$, kar ugotovimo iz analitične definicije odvoda: $S'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$.

Ker je ulomek $\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ ujet kot nadev v sendviču s spodnjo polovico $m$ in zgornjo polovico $M$, je potem tudi limita (= odvod) funkcije $S(t)$ ujeta med $\lim_{h\to 0} m = f(t)$ in $\lim_{h\to 0} M = f(t)$. Zato velja:

$$\boxed{S'(t) = f(t)}$$

V zadnji enačbi preberemo, da je funkcija $S$ ena od primitivnih funkcij funkcije $f$, recimo, da je to funkcija $F$. Spomnimo se, da so vse primitivne funkcije dane funkcije $f$ nedoločeni integral funkcije $f$. Ker pa za ”lepe” (= ”nepretrgane” = zvezne) funkcije velja, da se vse primitivne funkcije medseboj ločijo le za konstanto $C$, velja naslednja enačba:

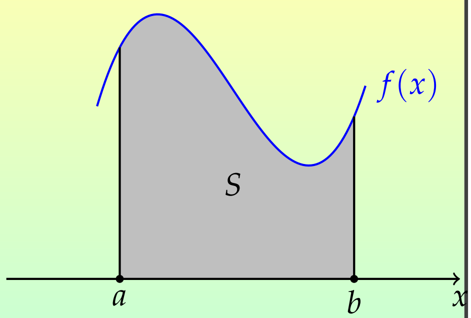
$$S(t) = F(t) + C$$

Vemo, da se naš krivočrtni trapez začne v točki $x = a$. Zato je $S(a) = 0$, saj je ploščina ravne črte enaka 0 ( 

). Zato je $0 = S(a) = F(a) + C$ in tako $C = -F(a)$. Zato je $S(t) = F(t) - F(a)$. Zadnjo razliko zapišemo tudi v obliki $F(t) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Povzemimo:

Ploščino krivočrtnega trapeza $abBA$, ki ga oklepajo graf pozitivne funkcije $y = f(x)$, abscisna os in premici $x = a$ ter $x = b$ izračunamo tako, da:




- Izračunamo nedoločeni integral funkcije $f$, torej: $\int f(x)\,dx$ in med vsemimi primitivnimi funkcijami izberemo tisto, ki ima inegracijsko konstanto enako 0; izbrano funkcijo označimo z $F(x)$,

- Ker je ploščina $S$ krivočrtnega trapeza povezana z nedoločenim integralom, jo označimo z integralskim znakom $\int_a^b f(x)\,dx$. Zapisano oznako imenujemo **določeni integral** funkcije $f$ v mejah od $a$ do $b$. Glavna razlika med obema integaloma je, da je nedoločeni integral neskončna družina funkcij, določeni integal pa število.

- Določeni integral funkcije izračunamo z osnovno formulo integralskega računa, Newton Leibnizova formulo (N-L formula):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Zgled 3: Izračunaj naslednje določene integrale:**

1. $\int_0^1 x\,dx$
2. $\int_0^1 x^2\,dx$
3. $\int_{-1}^0 x\,dx$
4. $\int_{-1}^0 x^2\,dx$

V vseh štirih primerih se držimo istega postopka: izračunajmo nedoločeni integral ustrezne funkcije, ki mu dodamo integracijsko konstanto 0, potem pa uporabim N-L formulo. Pojasnimo še, da izbira integracijske konstante ne vpliva na vrednost določenega integrala.

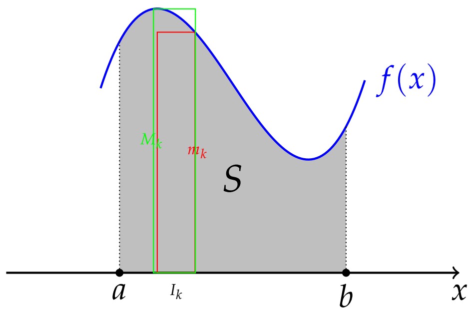
V prvem primeru je $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C$. Naj bo $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Uporabimo N-L formulo in dobimo:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2} + C\Big|_0^1 = (\frac{1^2}{2} + C) - (\frac{0^2}{2} + C) = \frac{1}{2} + \cancel{C} - \cancel{C} = \frac{1}{2}$$

V računu opazimo, da se integracijska konstanta v N-L formuli izniči. Zato lahko pri računanju določenega integrala izberemo konstantno $C = 0$.

# 3 Uporaba določenega integrala

Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ predstavlja ploščino krivočrtnega trapeza, ki ga ustvarjajo graf funkcije $f$, abscisna os in premici $x = a$ ter $x = b$.




Ploščino definiramo kot limito vsote ploščin včrtanih ali nadčrtanih pravokotnikov, ki jih zgradimo nad delilnimi intervali:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta_k$$

Pri tem je $n$ število delilnih intervalov intervala $[a, b]$, $m_k$ in $M_k$ minimalna in maksimalna vrednost funkcije $y = f(x)$ na $k-$ tem delilnem intervalu, $\Delta_k$ pa njegova dolžina (običajno izberemo enako dolge delilne intervale). Če funkcija dosega tudi negativne vrednosti, sta $m_k$ in $M_k$ na ustreznem delilnem intervalu lahko negativna, zato so ploščine $m_k\Delta_k$ in $M_k\Delta_k$ tudi negativne in take tudi ustrezne integralske vsote, zato je vrednost določenega integrala lahko tudi negativna. Podobno sklepamo, da zamenjava mej integriranja povzroči spremembo predznaka vrednosti delilnega integrala $I_k$ (prej $b_k - a_k$, sedaj $a_k - b_k = -(b_k - a_k)$). Povzemimo:

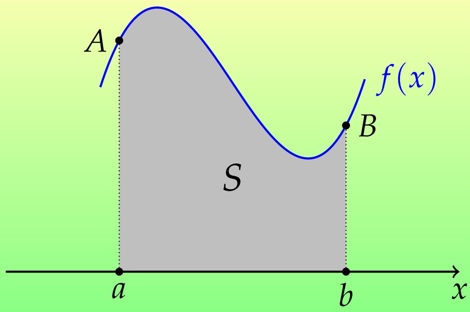
- Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ geometrijsko pomeni ploščino krivočrtnega trapeza, ki je ujet med grafom funkcije, abscisno osjo in premicama $x = a$ ter $x = b$.
- Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ je negativen za krivočrtne trapeze, ki so ujeti na spodnji strani abscisne osi.
- Če v določenemu integralu $\int_a^b f(x)\,dx$ zamenjamo meji, se vrednosti integrala spremeni predznak: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Oglejmo si v šestih slikah primere uporabe določenega integrala.

Slika 1

Ploščina $S = S_{abBA}$ krivočrtnega trapeza $abBA$, ki ga oklepajo graf funkcije $y = f(x)$, abscisna os in premici $x = a$ ter $x = b$ je enaka:

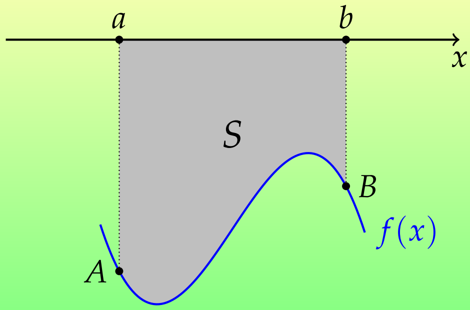
$$S_{abBA} = \int_a^b f(x)\,dx$$




Slika 2

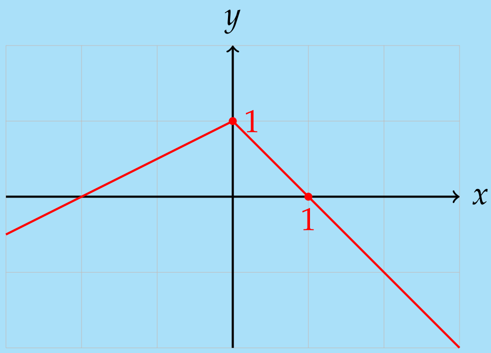
V primeru, ko je graf funkcije pod abscisno osjo, je ploščina $S = S_{abBA}$ krivočrtnega trapeza $abBA$ enaka:

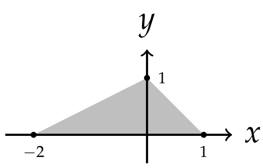
$$S_{abBA} = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$




**Zgled 4: Na desni sliki je prikazan graf funkcije $y = f(x)$. Izračunaj vrednosti naslednjih nedoločenih integralov:**

**1.** $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ **2.** $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

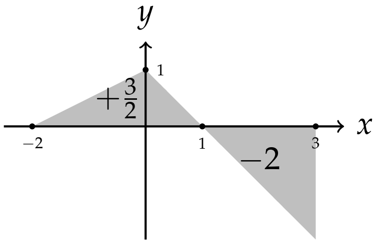



Geometrijsko pomeni $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ pomeni ploščino lika 

. Z elementarno geometrijo ugotovimo, da je iskana ploščina $\frac{(1-(-2)\cdot(1-0)}{2} = \frac{3}{2}$.

V primeru integrala $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ moramo paziti, da je integral likov, ki ležijo pod osjo $x$

negativen. Zato v ustrezni sliki

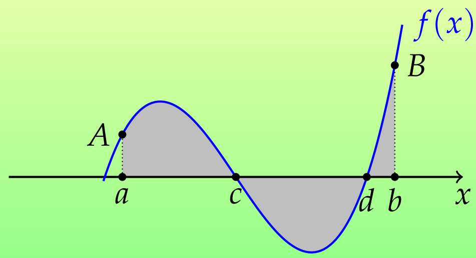



ploščini spodnjega trikotnika dodamo znak −. Tako je $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

**Slika 3**

Če funkcija $y = f(x)$ menja znak pri pri dveh točkah $c$ in $d$ v intervalu $[a, b]$, je ploščina $S$ lika omejenega z grafom funkcije $y = f(x)$ in abscisno osjo enaka

$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \int_d^b f(x)\,dx$$




**Zgled 5: (Matura 2018) Na sliki je graf zvezne funkcije $f$, ki ima natanko tri ničle: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 5$. Ploščina območja, ki ga omejujeta graf funkcije $f$ in abscisna os na intervalu $[0, 2]$ je $S_1 = 1,3$, ploščina območja, ki ga omejujeta graf funkcije $f$ in abscisna os na intervalu $[2, 5]$ pa je $S_2 = 3,9$ (glej desno sliko).Izračunaj:**

**1.** $\int_0^2 f(x)\,dx$

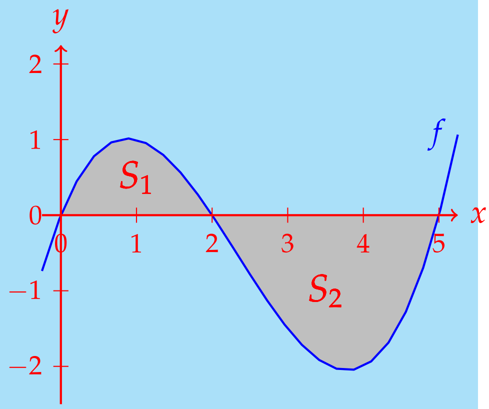
**2.** $\int_2^5 f(x)\,dx$

**3.** $\int_0^5 f(x)\,dx$

**4.** $\int_0^2 4 \cdot f(x)\,dx$

**5.** $\int_2^5 (f(x) + 2x^2)\,dx$

**6.** $\int_1^3 f(x-1)\,dx$

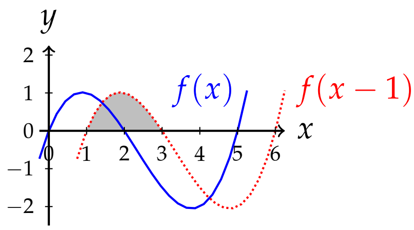



Sledimo geometrijskem pomenu določenega integrala. V prvem primeru je $\int_0^2 f(x)\,dx = S_1 = 1,3$, v drugem primeru upoštevamo, da je določeni integral krivočrtnih trapezov pod abscisno osjo negativen, zato: $\int_2^5 f(x)\,dx = -S_2 = -3,9$. V tretjem primeru upoštevamo izsledek slike 3: $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx = S_1 - S_2 = -2,6$. V četrtem primeru upoštevamo homogenost določenega integrala: $\int_0^2 4\cdot f(x)\,dx = 4\cdot\int_0^2 f(x)\,dx = 4\cdot S_1 = 5,2$, v petem primeru upoštevamo aditivnost določenega integrala:

$$\int_2^5 (f(x)+2x^2)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_2^5 2x^2\,dx = -S_2 + \frac{2x^3}{3}\Big|_2^5 =$$

$$= -3,9 + \frac{2\cdot 125}{3} - \frac{2\cdot 8}{3} = -3,9 + 78 = 74,1$$

V zadnjem primeru se spomnimo, da je graf funkcije $f(x-1)$ le za 1 v desno premaknjen graf funkcije $f$:

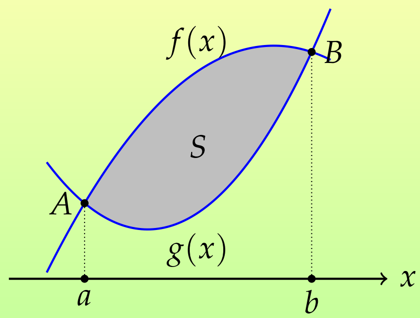



Zato je $\int_1^3 f(x-1)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx = S_1 = 1,3$. ■

**Slika 4**

Ploščino $S$ lika, omejenega med grafa funkcij z enabama $y = f(x)$ in $y = g(x)$, izračunamo kot razliko ploščin $S_{abBA(f)}$ in $S_{abBA(g)}$ dveh krivočrtnih trapezov na sosednji sliki:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

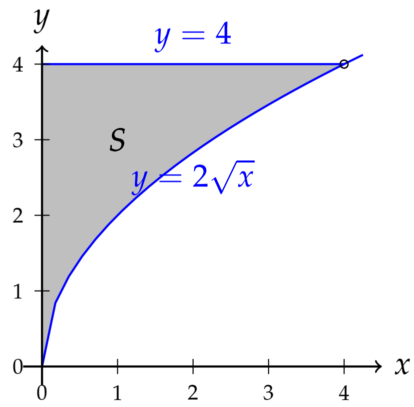



Praktični postopek računanja ploščine lika, ki ga omejujeta dve krivulji (grafa dveh funkcij):

1. Nariši skico krivulj.
2. Izračunaj abscisi presečišč krivulj; manjša abscisa je spodnja meja (= $A$), večja abscisa je zgornja meja (= $b$).
3. Izračunaj razliko enačb funkcij, ki omejujeta lik; pazi, da od "zgornje enačbe" odšteješ "spodnjo enačbo" (= $f(x) - g(x)$)
4. Izračunaj določeni integral razlike enačb v ustreznih funkcijah.

**Zgled 6:** **Poišči ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja $y = 2\sqrt{x}$, os $y$ in premica $y = 4$.**

Sledimo navodilom:




- Slika in presečišča:

$$y = y \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 4$$

- Zapis z integralom:

$$S = \int_0^4 (4 - 2\sqrt{x})\, dx$$

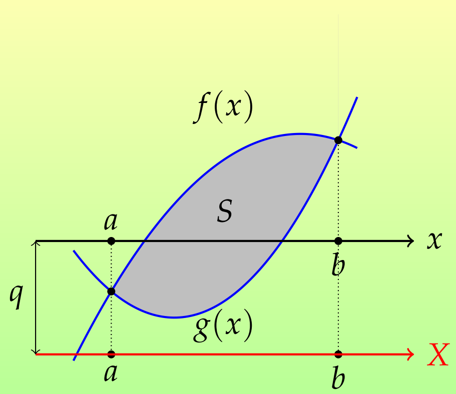
- Nedoločeni integral $\int (4 - 2\sqrt{x})\, dx = \int (4 - 2x^{\frac{1}{2}})\, dx = 4x - 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 4x - \frac{4 \cdot \sqrt{x^3}}{3}$

- N-L formula: $\int_0^4 (4 - 2\sqrt{x})\, dx = 4x - \frac{4 \cdot \sqrt{x^3}}{3}\Big|_0^4 = 4 \cdot 4 - \frac{4 \cdot \sqrt{4}^3}{3} = 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}$

Iskana ploščina je enaka $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$. ∎

## Slika 5

Oglejmo si desno sliko. Kako izračunati označeno ploščino lika omejenega med dve krivulji. V sliki 4 smo imeli primer, ko sta imeli obe mejni krivulje pozitvene vrednosti $y$-ov. Kako desno sliko prevoblikovati v sliko 4?




Pa zamenjajmo v koordinatnem sistemu $x$ os z novo abscisno osjo tako, da staro os pomaknemo za toliko navzdol, da bosta obe mejni krivulji imeli pozitivne ordinate. Glede na novo abscisno os imata sedaj krivulji enačbi: $y = f(X) + q$ in $y = g(X) + q$, abscise pa sta na obeh oseh enaki, torej $X = x$. Zato je glede na novi sistem ploščino $S$ izračunamo z enako formulo kot v sliki 4:

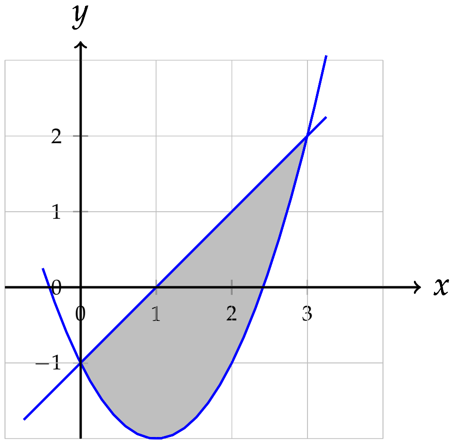
$$S = \int_a^b ((f(x) + \cancel{q}) - (g(x) + \cancel{q}))\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

**Zgled 7: Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica $y = x - 1$ in parabola $y = x^2 - 2x - 1$.**

- Slika in presečišča:

$$x^2 - 2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow a = 0,\ b = 3$$




- Zapis z integralom:

$$S = \int_0^3 ((x-1) - (x^2 - 2x - 1))\, dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x))\, dx$$

- Nedoločeni integral $\int (-x^2 + 3x))\, dx = -\int x^2\, dx + 3\int x\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}$

- N-L formula: $\int_0^3 (-x^2 + 3x))\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}|_0^3 = (-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}) - (-0 + 0) = -9 + \frac{27}{2} = 4\frac{1}{2}$

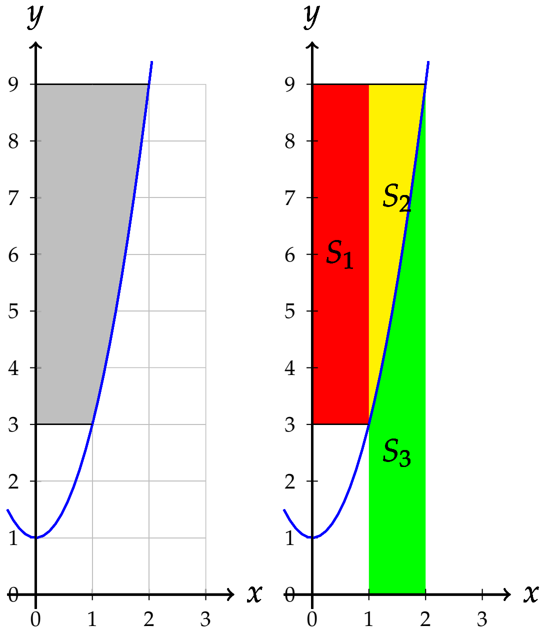
Iskana ploščina je enaka $\frac{9}{3} = 4\frac{1}{2}$. ■

**Zgled 8: Poišči ploščino območja, ki je omejeno s krivuljo $y = 2x^2 + 1$, osjo $y$ in premicama $y = 3$ in $y = 9$.**

Območje razdelimo na kose, katerih ploščine znamo izračunati. Najprej območju odrežemo pravokotnik, ki je na sliki označen rdeče. Njegovo ploščino označimo s $S_1$. Očitno je $S_1 = 6$.

- Območje razdelimo na kose, katerih ploščine znamo izračunati. Najprej območju odrežemo pravokotnik, ki je na sliki označen rdeče. Njegovo ploščino označimo s $S_1$. Očitno je $S_1 = 6$.

- Ploščino $S_2$ (rumena barva) preostalega kosa območja izračunamo tako, da od pravokotnika, ki ga sestavljata rumeno in zeleno območje, odštejemo ploščino $S_3$ zelenega območja.




- Ploščina opisanega pravokotnika (rumeno + zeleno) enaka $1 \cdot 9 = 9$.

- Zelena ploščina $S_3$ je ploščina krivočrtnega trapeza funkcije $f$ v intervalu $[1, 2]$, zato je:

$$S_3 = \int_1^2 (2x^2 + 1)\, dx = (\frac{2x^3}{3} + x)\Big|_1^2 = (\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2) - (\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1) = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

- Iskana ploščina $S$ je potem:

$$S = S_1 + S_2 = 6 + (9 - 5\frac{2}{3}) = 9\frac{1}{3}$$

Lotimo se računanja ploščine še na drugi način. Sivo območje je krivočrtni trapez, ki ima osnovnici vzporedni z $x$-osjo, običajni krivočrtni trapezi pa imajo osnovnici vzporedni z $y$-osjo. Če zamenjamo $x \leftrightharpoons y$, dobimo običajen krivočrtni trapez, katerega ploščino izračunamo z določenim integralom. Toda zamenjavo napravimo tudi v enačbi funkcije $y = 2x^2 + 1$, kar nas pripelje do inverzne funkcije $f^{-1}(x) : x = 2y^2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ in izračunamo integral inverzne funkcije $f^{-1}$ k funkciji, torej $\int_3^9 \sqrt{\frac{x-1}{2}}\, dx$. Ustrezni nedoločeni integral izračunamo z vpeljavo nove neznanke $t = \frac{x-1}{2}$, $x = 2t + 1$. Potem je $dt = \frac{1}{2}\, dx \Rightarrow dx = 2dt$. Zato je:

$$S = \int \sqrt{\frac{x-1}{2}}\, dx = \int \sqrt{t} \cdot 2dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = 2 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{t}^3}{3} = \frac{4\sqrt{\frac{x-1}{2}}^3}{3}$$

Iskana ploščina je potem: $S = \dfrac{4\sqrt{\frac{x-1}{2}}^3}{3}\Big|_3^9 = \dfrac{4 \cdot 2^3}{3} - \dfrac{4 \cdot 1^3}{3} = \dfrac{32}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{28}{3} = 9\dfrac{1}{3}$. ■