Potence in koreni

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.

2020

Kazalo

1 Potence s celimi eksponenti

Potenca je izraz oblike a^n, kjer je a poljubno število ($a \in \mathbb{R}$), n pa poljubno naravno ali celo število ($n \in \mathbb{N}$ ali $n \in \mathbb{Z}$). Število a imenujemo osnova, n je stopnja ali eksponent. Če je eksponent naravno število, potenco a^n izračunamo tako, da osnovo a pomnožimo samo s sabo tolikokrat, kolikor je je eksponent n, recimo $1{,}01^6$ pomeni produkt $1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01$, kar po opravljenih množenjih dá rezultat $1{,}061520150601$.

Če je eksponent negativno celo število, vzemimo $-n$, je potenca a^{-n} ulomek $\frac{1}{a^n}$, torej $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Tako je $0{,}01^{-3} = \frac{1}{0{,}01^3} = \frac{1}{0{,}000001} = 1\,000\,000$.

S potencami lahko računamo, zato pa je treba poznati pravila:

Pravila

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
9. $a^0 = 1$
10. $(-1)^{\text{sodo}} = 1$
11. $(-1)^{\text{liho}} = -1$

Pravila utrdimo z nekaj zgledi.

Rešeni primeri

Zgled 1: Preveri, če veljajo naslednje enakosti. Če ne veljajo, jih popravi tako, da bodo veljale:

1. $ab^{-1} = \frac{1}{ab}$ **2.** $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ **3.** $(3a^3b^{-3})^2 = 6a^6b^9$

Vse tri enakosti so napačne. Popravimo jih lahko tako, da spremenimo levo ali desno stran enakosti,lahko pa popravimo obe strani.

Če v prvem primeru popravljamo desno stran in ohranimo levo stran, dobimo $ab^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Če pa ohranimo desno stran, moramo zapisati $\frac{1}{ab} = (ab)^{-1}$. V drugem primeru enakost dobimo, če oba znaka $+$ zamenjamo z znakom $\cdot$; tako dobimo $(ab)^3 = (a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3 = a^3b^3$, lahko pa levo stran razvijemo s formulo za ”kub” (tretjo potenco) binoma, da dobimo $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

V zadnjem primeru ohranimo levo stran, desno pa pravilno izračunamo z zapisanimi pravili:

$$\left(3a^3b^{-3}\right)^2 = \left(3^1a^3b^{-3}\right)^2 = (3^1)^2(a^3)^2(b^{-3})^2 = 3^2a^6b^{-6} = 9a^6b^{-6}$$

Torej je pravilna enakost $\left(3a^3b^{-3}\right)^2 = \left(3^1a^3b^{-3}\right)^2 = 9a^6b^{-6}$.

Zgled 2: Poenostavi izraz $\left(-2a^3b^2\right)^2 \cdot \left(-3a^2b\right)^3$.

- Najprej odpravimo oklepaje. Zato uporabimo pravilo o potenciranju produkta:

$$\left(-2a^3b^2\right)^2 \cdot \left(-3a^2b\right)^3 = (-2)^2(a^3)^2(b^2)^2(-3)^3(a^2)^3b^3$$

- Nadaljujemo z uporabo pravila o potenciranju potence in potenciranju predznaka $-$:

$$(-2)^2(a^3)^2(b^2)^2(-3)^3(a^2)^3b^3 = 4a^6b^4 \cdot (-27)a^6b^3$$

- Končamo z uporabo pravila o množenju potenc z isto osnovo: $4a^6b^4 \cdot (-27)a^6b^3 = -108a^{12}b^7$ ■

Zgled 3: Poenostavi izraz $(-a)^{3m-2} \cdot \left(-a^2\right)^{m-1}$, kjer je m naravno število, torej $m \in \mathbb{N}$.

Parnosti (lihost ali sodost) eksponentov $3m-2$ in $m-1$ nemoremo določiti. Zato izraz zapišemo v obliki $((-1)\cdot a)^{3m-2} \cdot \left((-1)\cdot a^2\right)^{m-1}$ in potem odpravimo oklepaje:

$$((-1)\cdot a)^{3m-2} \cdot \left((-1)\cdot a^2\right)^{m-1} = (-1)^{3m-2} \cdot a^{3m-2} \cdot (-1)^{m-1} \cdot a^{2m-2} =$$

$$= (-1)^{3m-2+m-1}a^{3m-2+2m-2} = (-1)^{4m-3}a^{5m-4} = -a^{5m-4}$$

Pri končnem rezultatu smo upoštevali, da je $4m-3$ liho naravno število in je zato $(-1)^{4m-3} = -1$. ■

Zgled 4: Izračunaj $(-2)^{-1} + (-4)^0 - (-4)\cdot(-5)^3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}$.

$(-2)^{-1} + (-4)^0 - (-4)\cdot(-5)^3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4} = -\frac{1}{2} + 1 - (-4)\cdot(-125) + 2\cdot 4^4 = -\frac{1}{2} + 1 - 500 + 2\cdot 256 =$
$12\frac{1}{2}$ ■

Zgled 5: **Poenostavi izraz $\left(\frac{2a^{-1}}{b^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{4a^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-1}$.**

Uporabimo pravila za računanje s potencami. Najprej odpravimo oklepaje:

$$\left(\frac{2a^{-1}}{b^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{4a^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-1} = \frac{2^{-2}a^{-1\cdot(-2)}}{b^{-3\cdot(-2)}} : \frac{4^{-1}a^{-2\cdot(-1)}}{b^{-4\cdot(-1)}} = \frac{2^{-2}a^{2}}{b^{6}} : \frac{4^{-1}a^{2}}{b^{4}}$$

Negativne eksponente pri enočlenikih spremenimo v pozitivne tako, da potence s takimi eksponenti preselimo iz števca v imenovalec ali obratno. Istočasno še deljenje spremenimo v množenje in na koncu še uporabimo pravila o množenju in deljenju potenc z isto osnovo:

$$\frac{2^{-2}a^{2}}{b^{6}} : \frac{4^{-1}a^{2}}{b^{4}} = \frac{a^{2}}{2^{2}b^{6}} \cdot \frac{4b^{4}}{a^{2}} = \frac{1}{b^{2}} = b^{-2}$$

■

Zgled 6: **Zelo velika ali zelo majhna števila lahko predstavimo v eksponentni ali znanstveni oblik (uporabljamo tudi izraz standardna oblika). Recimo Avogadrovo število 602 300 000 000 000 000 000 000 zapišemo v obliki $6,023\cdot 10^{23}$ ali v obliki $6\cdot 10^{23}$, premer vodikovega atoma $0,000\,000\,000\,25$ cm pa v obliki $2,5\cdot 10^{-10}$ cm. V splošnem ima eksponentni zapis števila obliko $a\cdot 10^{n}$, kjer je $1 \le a < 10$, n pa je celo število. Rešimo naslednje naloge:**

1. **Zapiši v znanstveni obliki naslednja števila: $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67$ g (masa vodikovega atoma), $510\,000\,000$ km^2 (površina Zemlje), $300\,000$ km/s (hitrost svetlobe)**
2. **Neka zvezda je 500 svetlobnih let oddaljena od Zemlje. Svetlobno leto je dolžina, ki jo svetloba prepotuje v enem (neprestopnem) letu. Kolika je razdalja od Zemlje do te zvezde v km? Zapiši v znanstveni obliki.**
3. **Oceni brez uporabe računala rezultat računa $\frac{10023000\cdot 0,000000001023}{300000\cdot 0,00000030005}$**

V mestnem decimalnem (desetiškem) zapisu so celi deli sestavljeni iz enic, desetic, stotic in tako dalje. Števka na mestu enic pomeni po eno enoto preštevanja, števka na mestu enic pomeni po deset enot (števka 3 recimo pomeni $3\cdot 10$ osnovnih enot), na mestu stotic vsaka števka pomeni po sto osnovnih enot. Količine, ki so manjše od ene enote razdelimo na desetine, stotine, tisočine …osnovne enote. Za primer vzemimo število 123,4567. Zapis tega števila pomeni samo krajši zapis vsote $1\cdot 10^{2}+2\cdot 10^{1}+3\cdot 10^{0}+4\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}+6\cdot 10^{-3}+7\cdot 10^{-4}$. V splošnem pomeni števka na n-tem mestu levo od decimalne vejice po 10^{n-1} osnovnih enot $(10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, \ldots)$, števka na n-tem mestu desno od decimalne vejice pa po $\frac{1}{10^{n}} = 10^{-n}$ osnovne enote.

Uporabimo opisano na primeru mase vodikovega atoma $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67$ g. Prva neničelna števka se nahaja na 24 tem decimalnem mestu na desni, druga in tretja neničelna števka pa na 25 in 26 mestu. Zato je $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67 = 1\cdot 10^{-24}+6\cdot 10^{-25}+7\cdot 10^{-26}$. Na desni strani izpostavimo faktor 10^{-24}. Dobimo:

$$0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,67 = 1\cdot 10^{-24}+6\cdot 10^{-25}+7\cdot 10^{-26} = 10^{-24}\left(1+6\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}\right) = 1,67\cdot 10^{-24}$$

Površino Zemlje zapišemo v obliki 510 000 000 km^2 $= 5,1 \cdot 10^8$ km^2, hitrost svetlobe pa je enaka 300 000 km/s = $3 \cdot 10^5$ km/s = $3 \cdot 10^8$ m/s.
V drugem primeru najprej izračunajmo, koliko km pomeni eno svetlobno leto:

$$1 \text{ svetlobno leto} = 3 \cdot 10^5 \text{km/s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\text{s} = 3 \cdot 10^5 \cdot 3,65 \cdot 10^2 \cdot 2,4 \cdot 10^1 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \doteq 95 \cdot 10^{11}\,\text{km} = 9,5 \cdot 10^{12}\,\text{km}$$

Zato je zvezda iz naloge oddaljena od Zemlje

$$500 \text{ svetlobnih let} = 5 \cdot 10^2 \cdot 9,5 \cdot 10^{12}\,\text{km} = 47,5 \cdot 10^{14}\,\text{km} \doteq 5 \cdot 10^{15}\,\text{km}$$

Še zadnja naloga. Števila, ki nastopajo v računu zapišimo v znanstveni obliki:

$$10023000 = 1,0023 \cdot 10^7,\ 0,000000001023 = 1,023 \cdot 10^{-9},\ 300000 = 3 \cdot 10^5,\ 0,00000030005 = 3,0005 \cdot 10^{-7}$$

Zato je

$$\frac{10023000 \cdot 0,000000001023}{300000 \cdot 0,00000030005} \doteq \frac{1 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-7}} = 0,11 \cdot 10^0 = 0,11$$

■

Zgled 7: Poenostavi izraza

1. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}} : \dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}}$ **2.** $\dfrac{1-x^{-1}-6x^{-2}}{x^{-1}-9x^{-3}} : \dfrac{x^{-1}+4x^{-2}+4x^{-3}}{x^{-1}+3x^{-2}-4x^{-3}-12x^{-4}}$

Izraza bomo poenostavili na dva načina. Na prvi način potence z negativno stopnjo spremenimo v potence s pozitivno stopnjo in poračunamo z dobljenimi dvojnimi ulomki:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}} : \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}} : \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{1}{a^2b^2}} : \frac{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{1}{ab}} = \frac{(b-a)a^2b^2}{ab} : \frac{(b^2-a^2)ab}{a^2b^2} = \frac{\cancel{(b-a)}\ \cancel{a^2b^2}}{\cancel{ab}} \cdot \frac{a^2b^2}{\cancel{(b-a)}\ (b+a)\ \cancel{ab}} = \frac{a^2b^2}{a+b}$$

V drugem načinu reševanja uporabimo pravilo razširjanja ulomkov. Začnemo lahko enako kot v prvem načinu, potem pa dobljena dvojna ulomka razširimo s skupnim imenovalcem števca in imenovalca dvojnega ulomka:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}} : \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\,|\cdot a^2b^2}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\,|\cdot a^2b^2} : \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\,|\cdot a^2b^2}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\,|\cdot a^2b^2} = \frac{ab^2-a^2b}{1} : \frac{b^2-a^2}{ab} = \frac{ab\ \cancel{(b-a)}}{1} \cdot \frac{ab}{\cancel{(b-a)}\ (b+a)} = \frac{a^2b^2}{a+b}$$

Rahla sprememba drugega načina reševanja je, če razširimo ulomek že pred spremembo v dvojne ulomke:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}} : \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}b^{-1}} = \frac{a^{-1}-b^{-1}\,|\cdot a^2b^2}{a^{-2}b^{-2}\,|\cdot a^2b^2} : \frac{a^{-2}-b^{-2}\,|\cdot a^2b^2}{a^{-1}b^{-1}\,|\cdot a^2b^2} = \frac{ab^2-a^2b}{1} : \frac{b^2-a^2}{ab} = \frac{ab\ \cancel{(b-a)}}{1} \cdot \frac{ab}{\cancel{(b-a)}\ (b+a)} = \frac{a^2b^2}{a+b}$$

Drugi izraz preoblikujemo z zadnjim opisanim načinom. Ustrezne komentarje naj postavi bralec sam.

$$\frac{1-x^{-1}-6x^{-2}\,|\cdot x^3}{x^{-1}-9x^{-3}\,|\cdot x^3} : \frac{x^{-1}+4x^{-2}+4x^{-3}\,|\cdot x^4}{x^{-1}+3x^{-2}-4x^{-3}-12x^{-4}\,|\cdot x^4} = \frac{x^3-x^2-6x}{x^2-9} : \frac{x^3+4x^2+4x}{x^3+3x^2-4x-12} = \frac{x(x^2-x-6)}{(x-3)(x+3)} : \frac{x(x^2+4x+4)}{x^2(x+3)-4(x+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{x}\,\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+3)}} \cdot \frac{\cancel{(x+3)}\,(x-2)\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{x}\,\cancel{(x+2)}^2} = x-2$$

■

Zgled 8: * **Poenostavi izraz** $\dfrac{\left((a^2)^{m-1}+a^{2m-1}\right)^3}{\left(a^{3m-1}+(a^3)^m\right)^2}$**, če je** m **naravno število (**$m \in \mathbb{N}$**).**

Uredimo števec in imenovalec ter ju razstavimo:

$$\left((a^2)^{m-1}+a^{2m-1}\right)^3 = \left(a^{2m-2}+a^{2m-1}\right)^3 = \left(a^{2m-2}\,(1+a)\right)^3 = a^{6m-6}(1+a)^3$$

$$\left(a^{3m-1}+(a^3)^m\right)^2 = \left(a^{3m-1}+a^{3m}\right)^2 = \left(a^{3m-1}\,(1+a)\right)^2 = a^{6m-2}(1+a)^2$$

Zato je $\dfrac{\left((a^2)^{m-1}+a^{2m-1}\right)^3}{\left(a^{3m-1}+(a^3)^m\right)^2} = \dfrac{a^{6m-6}(1+a)^3}{a^{6m-2}(1+a)^2} = \dfrac{1+a}{a^4}$ ■

1.1 Naloge

1. Zapiši števila $1, 4, 8, 16, 32, 0.5, 0.25$ in 0.125 kot potenco z osnovo 2. $[2^0, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}]$

2. Zapiši števila $1, 9, 27, 81, 0.\overline{3}$ in $0.\overline{1}$ kot potenco z osnovo 3. $[3^0, 3^2, 3^3, 3^4, 3^{-1}, 3^{-2}]$

3. Preveri pravilnost naslednje tabele:

	-3	-2	-1	2	3	4
2	$\frac{1}{8}=0,125$	$\frac{1}{4}=0,25$	$\frac{1}{2}=0,5$	4	8	16
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	9	27	81
4	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}=0,25$	16	64	256
5	$\frac{1}{125}=0,008$	$\frac{1}{25}=0,04$	$\frac{1}{5}=0,2$	25	125	625

   V tabeli so v prvi vrstici zapisani eksponenti, v prvem stolpcu osnove, v ostalih celicah tabele pa so izračunane ustrezne potence.

4. Poenostavi:

(a) $x^5 : x^{-3} \cdot x^{-7}$ (b) $\frac{1}{a^3} \cdot a^{-5} \cdot \frac{1}{a^7} \cdot a^{-9}$ (c) $(8x)^2 : (6x^{-2}a^{-3})^3 \cdot 9(a^{-3})^3$

[x, $\frac{1}{a^{24}}$, $\frac{8x^8}{3}$]

5. Poenostavi:

(a) $\cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot (10^{-2})^{-3}$ (b) $5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} : \left(-\frac{3}{5}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{25}{49}\right)^{-1}$

[600, 25]

6. Preveri naslednji enakosti:

(a) $(8xy^{-4}) : (4x^3y^{-7}) : (2x^{-2}y^5) = \frac{1}{y^2}$ (b) $\left(\frac{2a^3b^{-3}}{3^{-1}b^{-2}a^5}\right)^5 : \left(\frac{a^3}{12}\right)^{-3} = \frac{27}{2a}$

7. Poenostavi:

(a) $\left(5a^{-3}b^2\right)^3 : \left(50a^{-8}b^6\right)$ (b) $\left(\frac{3b^{-1}a^7}{2^{-2}a^3b}\right)^{40} : \left(\frac{a^{-4}}{12b^{-2}}\right)^{-38}$

[$\frac{1}{10a}$, $144\left(\frac{a}{b}\right)^4$]

8. Zapiši približne rezultate naslednjih računov brez uporabe računala:

(a) $0,000200345 \cdot 0,003 : 0,0000000060057$ (b) $0,0010023^{-4} \cdot 0,001^3$

[$10^2 = 100$, 1000]

9. * Poenostavi naslednja izraza:

(a) $(a^{-3}b^{-1} - a^{-2}) : (1 - a^{-2}b^{-2})$ (b) $\frac{4^{x-1} \cdot 3^{x+2} - 4^x \cdot 3^x}{12^x}$

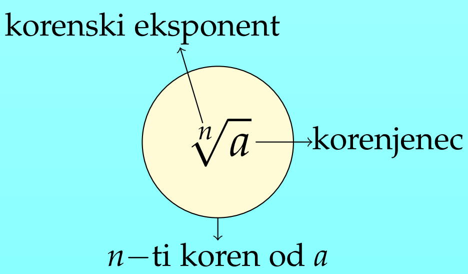
[$-\frac{b}{a(ab+1)}$, $\frac{5}{4}$]

2 Koreni

Ko računamo vrednost potence poznamo osnovo in stopnjo (eksponent), recimo 3^4: 3 je osnova, 4 stopnja, vrednost potence pa $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Pogosto pa imamo opravka z obratno nalogo: poznamo vrednost potence, stopnjo potence, ne poznamo pa osnove potence, recimo: $x^4 = 64$. V takem primeru uporabimo za izračun osnove **obratno** operacijo **potenciranja**, **korenjenje** ali na kratko **koren**.

Število x, ki reši enačbo $x^n = a$, imenujemo n-ti koren števila a in to označimo z $\sqrt[n]{a}$. Pri tem je n naravno število, a pa poljubno realno število.

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a}$$



Ker enačbo $x^1 = a$ reši kar število $x = a$, je $\sqrt[1]{a} = a$, pri drugem korenu (= kvadratni koren) pa številko dva opuščamo, torej je $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

V matematiki so obratne operacije običajno bolj komplicirane kot operacije. Tako je, recimo deljenje brez uporabe računala, že kar pozabljena veščina. Tudi računanje korenov (= korenjenje) prepustimo računalom. Običajno imajo računala tipko $\sqrt{\ }$ za kvadratni koren, tipko $\sqrt[3]{\ }$ za tretji (= kubični) koren, za ostale korene pa obstaja tipka $\sqrt[x]{\ }$. Seveda je pri nekaterih računalih treba dostopati do ustreznih tipk s pomožno tipko 2^{nd}.

Zgled 9: Izračunaj na dve decimalni mesti natančno naslednje račune:

1. $\sqrt{10}$ **2.** $\sqrt[3]{12}$ **3.** $\sqrt[10]{2100}$

Zaokroženi rezultati: 3.16, 2.29, 2.15. Kako smo pa do njih prišli, si pa oglej v videu **račun1**.

Za računanje s koreni veljajo podobna pravila, kot so pravila pri potenciranju.

Pravila korenjenja

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & ; \quad n = 2k-1 \\ |a| & ; \quad n = 2k \end{cases}$
3. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (zapis potenca $\leftrightarrows$ koren)

Rešeni primeri

Zgled 10: Preveri, če veljajo naslednje enakosti:

(a) $\sqrt{3^2} = 3$ **(c)** $\sqrt{(-3)^2} = 3$ **(e)** $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

(b) $\sqrt[3]{3^3} = 3$ **(d)** $\sqrt{(-3)^2} = -3$ **(f)** $\sqrt{(-3)}^2 = -3$

Korenjenje je obratna operacija potenciranja. Če je $\sqrt[n]{a} = b$, je $b^n = a$. V obeh zapisih je b izračunan koren, a korenjenec in n korenski eksponent. Prvemu zapisu ($\sqrt[n]{a} = b$) pravimo **eksplicitni** ali **razviti** zapis korena, drugemu ($b^n = a$) pa **implicitni** ali **nerazviti** zapis korena. V vseh naših nalogah je zapisan eksplicitni zapis, zato bomo pravilnost preverili, če sta v implicitnem zapisu leva in desna stran enaki:

(a) $\sqrt{3^2} = 3 \Rightarrow 3^2 = 3^2 \Rightarrow 9 = 9$; pravilno

(b) $\sqrt[3]{3^3} = 3 \Rightarrow 3^3 = 3^3 \Rightarrow 27 = 27$; pravilno

(c) $\sqrt{(-3)^2} = 3 \Rightarrow (-3)^2 = 3^2 \Rightarrow 9 = 9$; pravilno

(d) $\sqrt{(-3)^2} = -3 \Rightarrow (-3)^2 = (-3)^2 \Rightarrow 9 = 9$; pravilno

(e) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3 \Rightarrow (-3)^5 = (-3)^5 \Rightarrow -243 = -243$; pravilno

(f) $\sqrt{-3^2} = -3 \Rightarrow (-3)^2 = -3^2 \Rightarrow 9 \neq -9$; ni pravilno.

V primerih (c) in (d) sta korenjenca 3^2 in $(-3)^2$ enaka, oba sta 9, pa kljub temu dobimo različna rezultata: 3 in -3. V matematika imajo računske operacije enolične rezultate (samo ena številka). Zato se v primeru **sodih korenskih eksponentov** dogovorimo, da je pri sodih korenih rezultat korenjenja vedno **pozitiven**, torej je $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ in tudi $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. V splošnem velja dogovor, da velja pravilo 2, torej:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|,\ \sqrt[4]{a^4} = |a|, \ldots}$$

■

Zgled 11: Izračunaj točno vrednost izraza $\sqrt[3]{2+\frac{10}{27}}$.

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}.$$ ■

Zgled 12: Kaj je več: $\sqrt{2}$ ali $\sqrt[3]{3}$?

Razširimo oba korena na eksponent 6. Dobimo: $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2\cdot 3]{2^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{8}$ in $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3\cdot 2]{3^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$. Odtod pa že vidimo $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. ■

Zgled 13: Poenostavi izraz: $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 \cdot a}} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[2\cdot 3]{a^3} = \sqrt{a}$. Bolj običajna je pri enočlenih izrazih naslednja pot:

- Poiščemo skupni korenski eksponent (kar "skupni imenovalec" vseh korenov; v našem primeru $3 \cdot 2 = 6$) in razširimo nanj vse korene. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a^2 \cdot a}$ (pri tem upoštevamo, da je koren $\sqrt{a}$ tudi pod $\sqrt[3]{\ }$, zato ga vsled pravila 6 ni potrebno razširjati.
- Urejanje: $= \sqrt[6]{a^3}$
- Krajšanje: $= \sqrt{a}$

■

Zgled 14: Poenostavi izraz $\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{x^{-1}y^7}}}{\sqrt[3]{x^2y^2\sqrt{x^3y^6}}}$

- Poiščemo skupni korenski eksponent in razširimo nanj vse korene:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x^{-1}y^7}}}{\sqrt[3]{x^2y^2\sqrt{x^3y^6}}} = \sqrt[6]{\frac{x^2x^{-1}y^7}{x^4y^4x^3y^6}}$$

- Urejanje: $= \sqrt[6]{x^{-6}y^{-3}}$
- Krajšanje: $= \sqrt{x^{-2}y^{-1}}$
- Delno korenjenje: $= x^{-1}\sqrt{y^{-1}}$
- Spreminjanje v pozitivne eksponente: $= \dfrac{1}{x\sqrt{y}}$
- Racionalizacija imenovalca: $= \dfrac{1 \cdot \sqrt{y}}{x\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{y}}{xy}$ ■

Zgled 15: Odpravi koren iz imenovalca ulomkov $\frac{1}{\sqrt{5}}$ in $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$.

Če kvadratni koren množimo s samim seboj, koren izgine: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$. Zato v ulomku $\frac{1}{\sqrt{5}}$ števec in imenovalec množimo s $\sqrt{5}$ in dobimo: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

V primeru kubičnega korena (koren s korenskim eksponentom 3) množenje s samim korenom ne odpravi korena. V pravilu krajšanja odkrijemo recept. Kubični koren izgine, če z njim korenimo potence, katerih eksponenti so večkratniki števila 3. Zato: $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{a\sqrt[3]{a}}{a} = \sqrt[3]{a}$. ■

Zgled 16: Odpravi koren iz imenovalca v izrazu $\frac{15}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Uberemo drugačno pot, kot v primerih enočlenih izrazov. Spomnimo se enakosti $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ in sklepajmo: če sta na levi strani zadnje enakosti a ali b ali pa celo oba izraza kvadratna korena, na desni po kvadriranju kvadratni koreni izginejo. Zato ulomek razširimo z $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (zamenjamo vmesni znak) ter dobimo:

$$\frac{15}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{15 \mid \cdot\, 3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3} \mid \cdot\, 3\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{15(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{15} = 3\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

S podobnim razmišljanjem in zvezo $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ racionaliziramo lahko tudi kubične korene. Za primer:

$$\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)} = 3+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}$$

Zakaj je sploh koristna racionalizacija? Iz prvega letnika vemo, da so iracionalna števila tista realna števila, ki imajo v svojem decimalnem zapisu neskončno mnogo neperiodičnih decimalnih števk. Primeri iracionalnih števil so npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π, itd. Ko z njimi računamo, vedno izberemo njihov bolj ali manj natančen racionalni približek. Pri tem pridelamo napako. Absolutno vrednost razlike med pravo vrednostjo količine x in približkom te količine imenujemo absolutna napaka in jo označimo z Δx. Če za $\sqrt{3}$ izberemo približek 1.73, napravimo absolutno napako, ki je na osem decimalnih mest enaka $\Delta = 0.00205084$. Druga napaka, ki smo jo omenili v prvem letniku, je relativna napaka (r), ki je razmerje med absolutno napako in točno vrednostjo: $r = \frac{\Delta x}{x}$. Običajno jo zapišemo v %. Za $x = \sqrt{3}$ in približek 1.73 je za izračunano absolutno napako $r = 0.12\%$. Pri računanju s približki pridelamo še dodatne napake. Do največjih napak prihaja pri deljenju. Recimo: Računalnik nam izračuna vrednost izraza $\frac{1}{97-56\sqrt{3}} = 193.9948433$, če pa za $\sqrt{3}$ izberemo približek 1.73, je izračun $1/(97-56\cdot 1.73) = 8.333333333$. Odkod tako velika absolutna napaka? Izkaže se, da je absolutna napaka pri deljenju odvisna od velikosti delitelja. Če je ta majhen (po absolutni vrednosti) je napaka velika, in obratno, če je velik, je napaka majhna. Če izraz $\frac{1}{97-56\sqrt{3}}$ racionaliziramo v $97+56\sqrt{3}$ in za $\sqrt{3}$ izberemo približek 1.73, bo računalnik izračunal $97+56\sqrt{3} \doteq 193.88$, kar pa je že zelo blizu pravi vrednosti.

Včasih je koristno racionalizirati števec, da postane imenovalec velik in s tem rezultat točnejši. Recimo: Če v izrazu $\sqrt{401}-20$ za $\sqrt{401}$ izberemo približek 20, bo rezultat enak 0, če pa racionaliziramo števec, dobimo $\sqrt{401}-20 = \frac{1}{\sqrt{401}+20}$, kar s približkom $\sqrt{401} \doteq 20$ znese $1/40 = 0.025$, kar je neprimerno bolj blizu točni vrednosti 0.02498439449.

Zgled 17: Poenostavi izraz $(3+2\sqrt{2})\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{50}$**.**

Poenostavimo vsak člen posebej. V prvem členu $(3+2\sqrt{2})\sqrt{17-12\sqrt{2}}$, vstavimo izraz pred korenom pod koren. Pri tem moramo paziti na predznak izraza pred korenom ($x\sqrt{y} = \sqrt{x^2 \cdot y}$). V končnem rezultatu upoštevamo tisti predznak, ki je enak predznaku števila x; v našem primeru je $x = 3+2\sqrt{2} > 0$, zato bomo upoštevali pozitivni predznak:

$$(3+2\sqrt{2})\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2(17-12\sqrt{2})} = \sqrt{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})} = \sqrt{17^2-(12\sqrt{2})^2} = 1$$

V drugem členu odpravimo koren v imenovalcu:

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2} \mid \cdot\, (3+2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2} \mid \cdot\, (3+2\sqrt{2})} = \frac{9+12\sqrt{2}+8}{9-8} = 17+12\sqrt{2}$$

V tretjem členu le delno korenimo: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. Poenostavljene izrčune vstavimo v začetni izraz in dobimo:$(3+2\sqrt{2})\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{50} = 1 + 17 + 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 18 + 7\sqrt{2}$ ■

Zgled 18: Izraz $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2a\sqrt{b}}\,\sqrt[12]{b}a^{-\frac{1}{2}}}{8\left(a^3b^{-\frac{1}{3}}\right)^5}$ preoblikuj do oblike: $2^k \cdot a^n \cdot b^m$; $k,\ m,\ n \in \mathbb{Z}$.

V izrazu nastopajo potence in koreni. Računati znamo ali s samimi koreni ali pa s samimi potencami. Uberimo drugo pot. Vse korene zapišimo s potencami in uporabimo pravila za računanje s potencami:

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{2a\sqrt{b}}\,\sqrt[12]{b}a^{-\frac{1}{2}}}{8\left(a^3b^{-\frac{1}{3}}\right)^5} = \frac{2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{12}}a^{-\frac{1}{2}}}{2^3a^{15}b^{-\frac{5}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3} \cdot a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-15} \cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-(-\frac{5}{3})} = 2^{-2}a^{-15}b^2$$

2.1 Naloge

1. Poenostavi izraz $\sqrt[4]{a^5b^3} \cdot \sqrt[8]{a^6b^2}$, $a, b > 0$. [a^2b]
2. Poenostavi izraz $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}}$, $a > 0$. [$\sqrt[4]{a^3}$]
3. Izračunaj točno vrednost izraza $\sqrt[4]{a^{-1}b^3\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{6a^4b^{-2}}{\sqrt{2}}}$, če je $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$. [$3\sqrt[3]{2}$]
4. Poenostavi izraz $\sqrt[12]{x\sqrt{y^{-6}}} \cdot \sqrt[4]{x^3y^{-1}} : \sqrt[6]{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{y}}$. [$\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}$]
5. Poenostavi izraz $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^4\sqrt{xy}}} : \left(x^3\sqrt[4]{xy}\right)^{-2} \cdot y^{-6}$ [$\left(\frac{x}{y}\right)^7$]
6. Reši enačbo $(x+3) \cdot \sqrt{2} = (x+1)\sqrt{3}$ [$x = 3 + 2\sqrt{6}$]
7. Katera enakost ne velja?
   (a) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} = 19\sqrt{2}$
   (b) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$
   (c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{6^n}}}{\sqrt{6^n}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{6^n}}$
   (d) $\sqrt{2014^{16}} = 2014^4$

[p]

8. Izračunaj $\left(8\cdot\sqrt[20]{32}-9\sqrt[5]{\sqrt[6]{9}}-4\cdot\sqrt[16]{16}+4\cdot\sqrt[5]{\sqrt[9]{27}}+5\cdot\sqrt[5]{\sqrt[12]{81}}\right)\cdot\sqrt[4]{8}$. [8]

9. Izračunaj brez uporabe računala: $\left(16^{\frac{1}{8}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(2^{0,5}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$. [∠−]

10. Izračunaj brez uporabe računala $32^{0,6}-16^{0,75}-10\cdot 0,49^{0,5}$. [∠−]