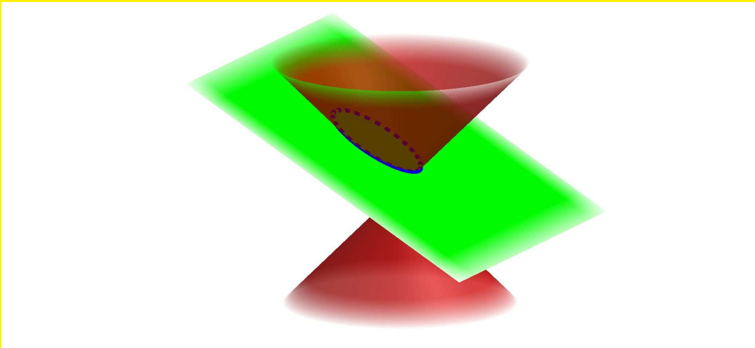
ni lektorirano, 2017

STOŽNICE



(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.

ni lektorirano, 2017

Kazalo

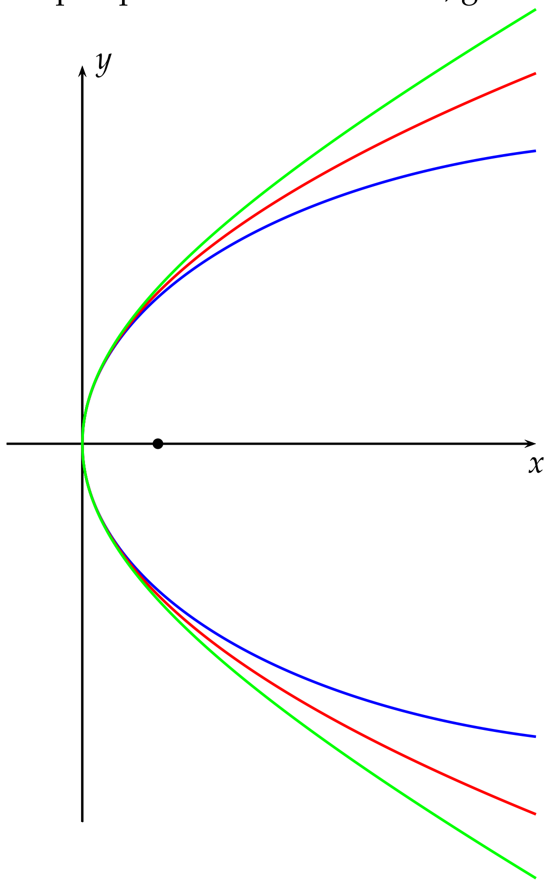
1 Uvod

Zakaj naslov STOŽNICE? Za pojasnilo si oglej priloženi video

V tem gradivu se bomo ukvarjali s krivuljami, ki imajo pomembno mesto v vsakdanjem življenju. O uporabnosti **krožnice** nima smisla uporabljati besed, toda tudi ostale nastopajo kar pogosto. **Elipsa** je krivulja po kateri se gibljejo planeti okrog sonc, **parabola** je tudi graf kvadratne funkcije, njena uporabnost v tehniki, pa tudi v umetnosti, ni sporna. Tudi **hiperbolo** lahko najdemo pri astronomskih krivuljah gibanja nebesnih teles, pa še kje.

Besede elipsa, parabola in hiperbola so (staro)grškega izvora in jih uporabljamo tudi v literarni teoriji, kajti elipsa pomeni pomankanje ali primankljaj, parabola pomeni primero, priliko, hiperbola pa pomeni presežek, pretiravanje.

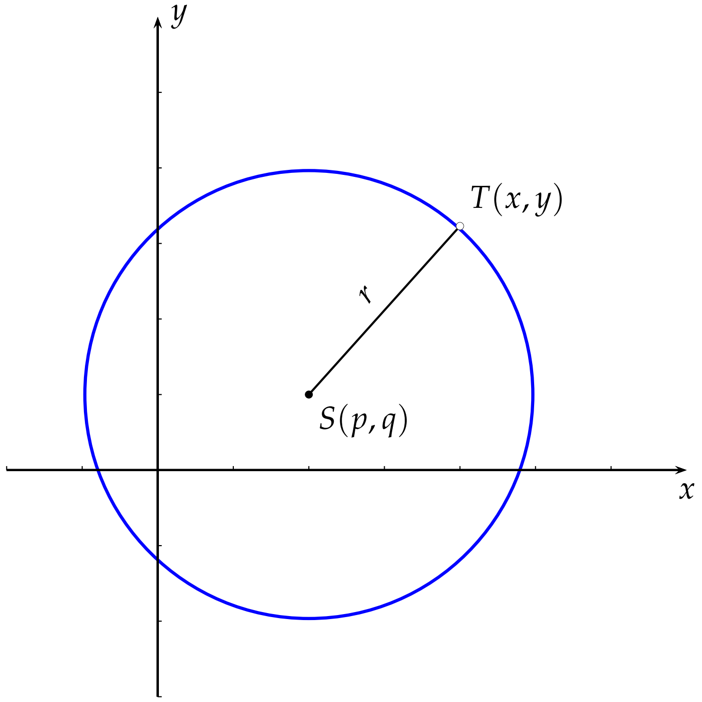
Imena pojasni tudi slika. Parabola (rdeča) je med elipso (modra) in hiperbolo (zelena), vse tri stožnice pa imajo skupno pomebno točko stožnic, gorišče.



2 Krožnica

definicija krožnice

Krožnica je množica točk ravnine, ki so enako oddaljene od dane točke, ki jo imenujemo **središče**. Oddaljenost od središča imenujemo **polmer** ali **radij** krožnice.



Središčna oblika enačbe

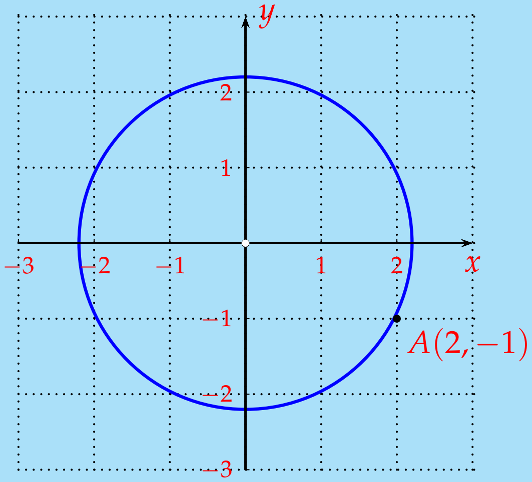
Enačba krožnice je zveza med podatki in koordinatama poljubne točke T (tekoča točka) na krožnici. Označimo koordinati točke T z x in y, središče krožnice pa naj se nahaja v točki $S(p,q)$. Polmer krožnice označimo z r. Po definiciji je $|TS| = r$, uporabimo formulo za računanje razdalje med dvema točkama ($d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$), pa dobimo središčno obliko enačbe krožnice:

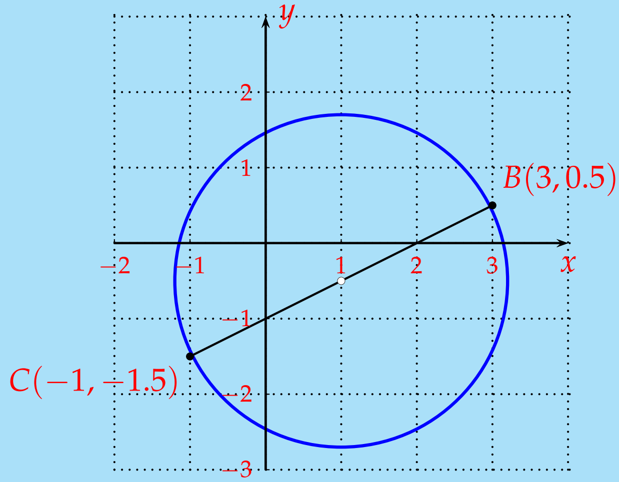
$$\boxed{(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2}$$

V posebnem primeru, ko je središče krožnice v koordinatnem izhodišču, je $p = q = 0$ in je zato enačba v tem primeru:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Zgled 1: Zapiši enačbi krožnic na spodnjih slikah:





Krožnica na levi sliki ima središče v izhodišču sistema, zato ima njena enačba obliko $x^2 + y^2 = r^2$. Ker točka $A(2,-1)$ leži na krožnici njen polmer izračunamo tako, da izračunamo razdaljo $|OA|$, ali pa vstavimo koordinate točke A v nastavljeno enačbo $x^2 + y^2 = r^2$. V obeh primerih dobimo $r^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$, zato je enačba krožnice $x^2 + y^2 = 5$.

V drugem primeru opazimo, da sta točki B in C diametralni kar pomeni, da je $|BC|$ premer (diameter) krožnice. Zato je središče S krožnice sredina daljice BC. Koordinati sredine daljice sta aritmetični sredini ustreznih koordinat krajišč daljice, zato je $S(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0.5+(-1.5)}{2}) = (1, -\frac{1}{2})$. Uporabimo središčno obliko enačbe krožnice in upoštevamo, da je $p = 1$ in $q = -\frac{1}{2}$. Dobimo $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = r^2$ Polmer r izračunamo bodisi tako, da vstavimo v nastavljeno enačbo koordinati ene od točk B ali C, bodisi izračunamo razdaljo med B in C $(2r)$, bodisi izračunamo razdaljo med središčem in eno od točk B ali C. V vseh primerih dobimo, da je $(3-1)^2 + (0.5-(-0.5))^2 = r^2$ in tako $r = \sqrt{5}$. Tako je iskana enačba $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 5$. ■

Splošna oblika enačbe

Če v središčni obliki enačbe odpravimo oklepaje, recimo v enačbi $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 5$, dobimo: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = 5$. Odpravimo ulomke in vse člene prenesimo na levo stran enačbeTako dobimo enačbo $4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 19 = 0$. Tudi v primeru splošne središčne enačbe ravnajmo enako in vpeljimo oznake: $a = -2p$, $b = -2q$ in $c = p^2 + q^2 - r^2$. Tako dobimo **splošno obliko** enačbo krožnice:

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

Malenkost težja izgleda obratna naloga, to je, kako iz splošne oblike enačbe dobiti središčno obliko. Poskusimo na primeru enačbe $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$. Središčna oblika enačbe krožnice je na levi strani sestavljena iz dveh kvadratov binoma, v prvem so zbrani x, v drugi y, na desni strani pa spremenljivk ni. Ko kvadrat binoma razvijemo, dobimo tričlenik. Pri preoblikovanju splošne oblike v središčno bomo ubrali obratno pot: na en konec leve strani splošne oblike bomo zbrali oba člena, v katerih nastopa x in ju potem dopolnili do tričlenika, ki ga bomo lahko zapisali kot kvadrat dvočlenika. Na drugem koncu leve strani bomo podobno storili s členi, v katerih nastopa y:

$$x^2+y^2-4x+6y+9=0 \Rightarrow \underbrace{(x^2-4x+4)}_{A^2+2\cdot A\cdot B+B^2}+\underbrace{(y^2+6y+9)}_{A^2+2\cdot A\cdot B+B^2}=-9+4+9 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$$

Zgled 2: Preveri, če zapisane enačbe predstavljajo krožnice in, če jih, krožnice nariši:

(a) $x^2+(y-1)^2=-1$;

(b) $x^2+(y-1)^2=0$;

(c) $x^2+(y-1)^2=1$;

(d) $x^2+y^2-4x+2y=0$;

(e) $4x^2+4y^2-4x+8y+4=0$.

Prvi primer ne predstavlja nobene točke v koordinatni ravnini, kajti vsota dveh kvadratov ne more biti negativno število. Zapisani enačbi pravimo tudi imaginarna krožnica s središčem $(0,1)$ in imaginarnim polmerom $r=\sqrt{-1}=i$.

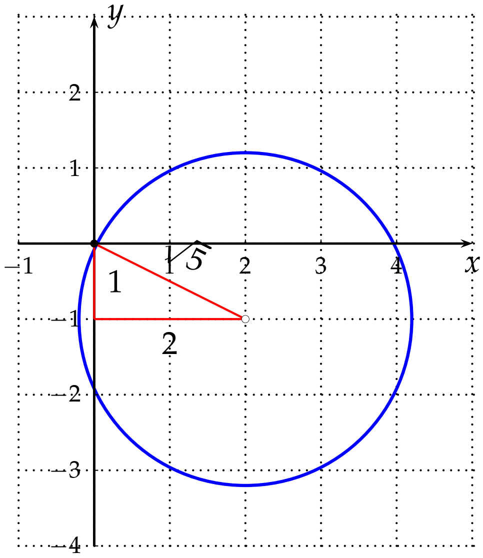
Drugi primer predstavlja "krožnico" s središčem v točki $(0,1)$ in polmerom $r=\sqrt{0}=0$, torej enačba prestavlja le točko $(0,1)$.

Tretji primer predstavlja krožnico s središčem $(0,1)$ in polmerom $r=\sqrt{1}=1$.
Zadnji enačbi nista zapisani v središčni obliki, zato ju spremenimo v središno obliko z zgoraj opisanim postopkom:

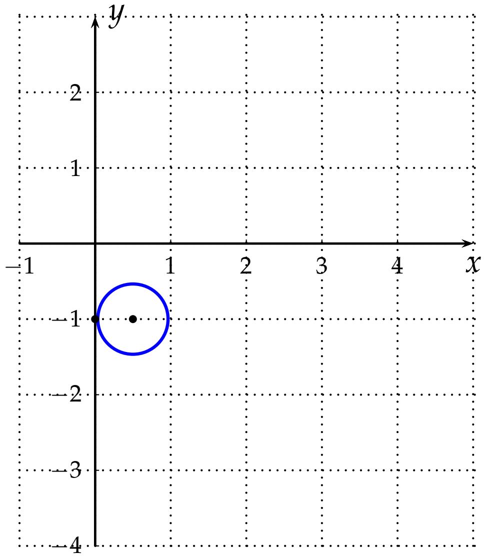
$$x^2+y^2-4x+2y=0 \Rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0+4+1 \Rightarrow (x-2)^+(y+1)^2=5$$

$$4x^2+4y^2-4x+8y+4=0|:4 \Rightarrow x^2+y^2-x+2y+1=0 \Rightarrow (x^2-x+\frac{1}{4})+(y^2+2y+1)=-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$$

Četrta enačba torej predstavlja krožnico s središčem $S(2,-1)$ in polmerom $r=\sqrt{5}$, zadnja enačba pa predstavlja krožnico s središčem v $S(\frac{1}{2},-1)$ in polmerom $r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$. S slikama prikažimo le zadnji dve krožnici, k prvi sliki pa dodajmo, da $\sqrt{5}$ konstruiramo s preprostim Pitagorovim izrakom $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$. ■



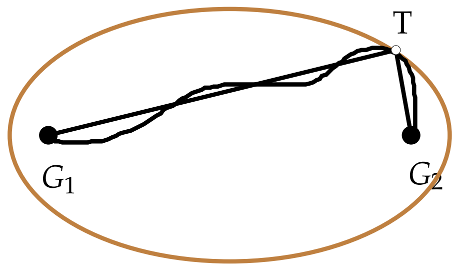
y
x
2
1
−1
−2
−3
−4
−1
1
2
3
4
1
2
$\sqrt{5}$



y
x
2
1
−1
−2
−3
−4
−1
1
2
3
4

3 Elipsa

V ravnini izberimo točki G_1 in G_2. Zamislimo si, da v izbrani točki zapičimo dva količka in nanju ovijemo vrvico. S tretjim količkom raztegnimo vrvico in njegov položaj označimo s točko T.



Slika 1: Vrtnarska metoda

S tretjim količkom začnemo potovati okoli točk G_1 in G_2 in pri tem pazimo, da je vrvica ves čas enako napeta. Med potovanjem konec količka, torej točka T, v ravnini zarisuje sled, ki jo imenujemo **elipsa**. Opisani način risanja elipse uporabljajo vrtnarji, zato se tej metodi pravi **vrtnarska** metoda.

Zapišimo zgornje ugotovitve bolj učeno in temu recimo **geometrijska definicija** elipse:

geometrijsk definicija elipse

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere je **vsota** razdalj od dveh danih točk G_1 in G_2 iste ravnine **stalna**. Točki G_1 in G_2 imenujemo **gorišči (fokusa)** elipse, vsoto razdalj $r_1 + r_2 = 2a$ **velika os** elipse, sredino daljice G_1G_2 **središče** elipse, razdaljo od središča do gorišča pa imenujemo **linearna ekscentričnost** elipse in jo označimo z e.
Točke elipse, ki so najbolj ali najmanj oddaljene od središča elipse, imenujemo **temena** elipse. Ni se težko prepričati, da ima elipsa štiri temena.

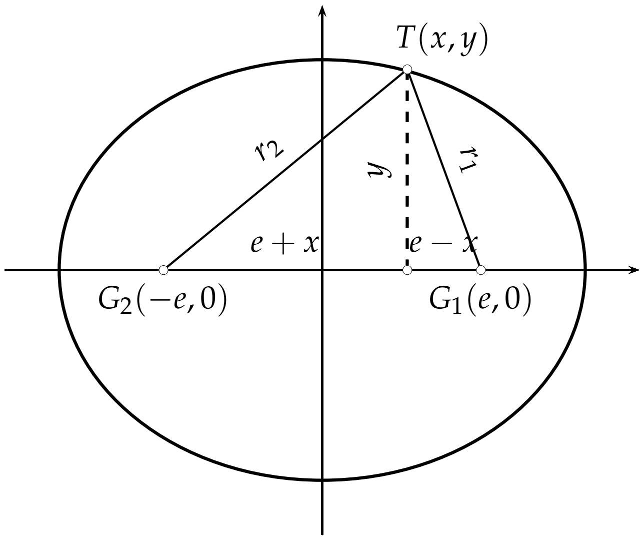
enačba elipse

Naj bo velika os elipse enaka $2a$, razdalja med goriščema pa $2e$. Središče elipse postavimo v koordinatno izhodišče, gorišči pa na abscisno os. Izberimo poljubno točko T na elipsi (**tekoča točka** elipse). Enačba elipse pomeni zvezo med koordinatama točke $T(x, y)$. Označimo dolžino daljice G_1T z r_1 in dolžino daljice G_2T z r_2. Količini r_1 in r_2 imenujemo radij vektorja točke T. Geometrijske definicija elipse pravi, da je $r_1 + r_2 = 2a$. V to enačbo vpletimo koordinati x, y tekoče točke T,da dobimo želeno enačbo. Uporabimo formulo za razdaljo med točkama ali preprosta Pitagorova izreka na zadnji sliki.

$r_1^2 = |G_1T|^2 = (x-e)^2 + y^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2$ in $r_2^2 = |G_2T|^2 = (x+e)^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2 + y^2$

V nadaljevanju izračunamo $r_2^2 - r_1^2$ in upoštevamo, da je $r_1 + r_2 = 2a$:

$$r_2^2 - r_1^2 = (x^2 + 2ex + e^2 + y^2) - (x^2 - 2ex + e^2 + y^2) = 4ex \Rightarrow (r_2 - r_1) \cdot 2a = 4ex \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\frac{e}{a}x$$



Slika 2: K izpeljavi enačbe elipse

Količino $\frac{e}{a}$ označimo z ε in jo poimenujmo **numerična ekscentričnost** elipse. Torej: $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$. Sistem enačb $r_1 + r_2 = 2a,\ r_2 - r_1 = 2\varepsilon x$ ima rešitev:

$$r_1 = a - \varepsilon x \text{ in } r_2 = a + \varepsilon x$$

Zadnji izraz za r_1 uvrstimo v enačbo $r_1^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2$. Dobimo:

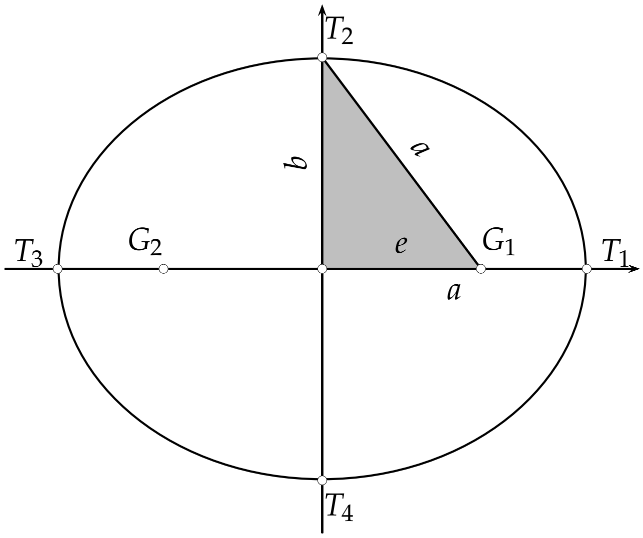
$$a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2 \Rightarrow a^2 - 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2$$

Odpravimo ulomek in nastalo enačbo uredimo tako, da bodo na levi strani členi z neznankami x^2 in y^2, na desni pa členi brez neznank:

$$e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4 \Rightarrow (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Označimo $\boxed{a^2 - e^2 = b^2}$. Količino b imenujemo mala polos elipse. Z novimi oznakami zapišemo kanonsko (vzorčno) enačbo elipse s središčem v izhodišču in polosema a in b:

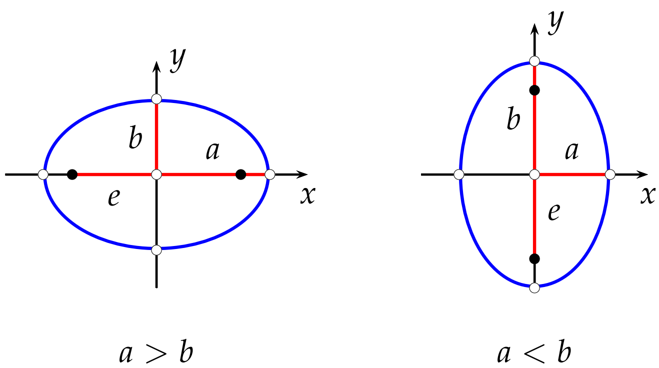
$$\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \qquad \text{ali} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Slika 3: Zveza med e, a in b ter temena elipse

Količino b imenujemo **mala polos** elipse. Enačba $b^2 = a^2 - e^2$ nas spominja na Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku s hipotenuzo a in katetama e in b. Na naslednji sliki je ta trikotnik umeščen v elipso.

Na sliki so prikazana še temena elipse $T_{1,3}(\pm a, 0)$ in $T_{2,4}(0 \pm b)$. Pomen posameznih konstant lahko ugotavljamo tudi s katerim od programov dinamične geometrije, recimo z Geogebro ali C.a.R-om (`elipsa.ggb`). Gorišči elipse ležita lahko tudi na ordinatni osi v točka $(0, e)$ in $(0, -e)$. V takem primeru je $b > a$ in zato $\boxed{e^2 = b^2 - a^2}$, numerična ekscentričnost pa $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{b}}$.



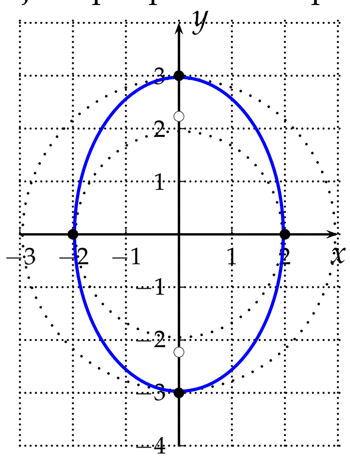
Slika 4: Elipsa v primeru gorišč na abscisni in ordinatni osi

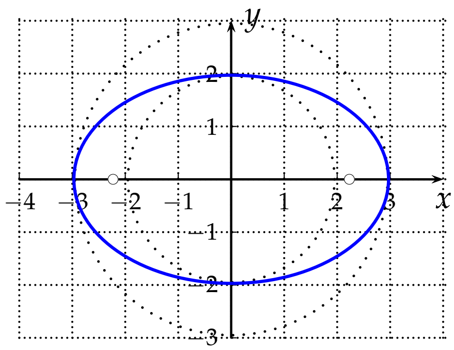
Zgled 3: **Skiciraj elipso z enačbo $9x^2 + 4y^2 = 36$ in zapiši koordinati njenih gorišč. Zapiši še enačbo elpse, ki jo dobiš, če dano elipso zavrtiš za 90° v pozitivni smeri okoli izhodišča.**

Poiščimo polosi elipse, ki jih ugledamo, ko enačbo preoblikujemo v vzorčno obliko $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 | : 36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{4}_{=a^2}} + \frac{y^2}{\underbrace{9}_{=b^2}} = 1$$

Torej je $a = 2$ in $b = 3$, zato sta gorišči na ordinatni (y) osi v točkah $G_1(0, \sqrt{5})$ in $G_2(0, -\sqrt{5})$. Elipso skiciramo tako, da narišemo krožnici s središčem v izhodišču in polmeroma a in b, v kolobar med njima pa spravimo elipso:





Če elipso zavrtimo za 90° okoli izhodišča, gorišči postaneta točki $G_1(\sqrt{5}, 0)$ in $G_2(-\sqrt{5}, 0)$, pa tudi osi se številčno zamenjata: $a = 3$, $b = 2$. Zato je enačba nove elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ali v drugi vzorčni obliki $4x^2 + 9y^2 = 36$. ■

Zgled 4: **Izračunaj enačbo elipse s središčem v koordinatnem izhodišču, če je razdalja med goriščema $\sqrt{29}$, mala polos elipse pa meri 7 enot.**

Glavni količini v enačbi elipse sta velika polos a in mala polos b. Ker je $b = 7$, moramo izračunati še a. To storimo iz enačbe $a^2 = b^2 + e^2 = 7^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} \Rightarrow a = \frac{15}{2}$. Zato je iskana enačba $\frac{4x^2}{225} + \frac{y^2}{49} = 1$. ■

Zgled 5: **Zapiši enačbo elipse s središčem v koordinatnem izhodišču in goriščema na eni od koordinatnih osi, če vemo, da premica $3x - 4y - 12 = 0$ vsebuje dve temeni te elipse.**

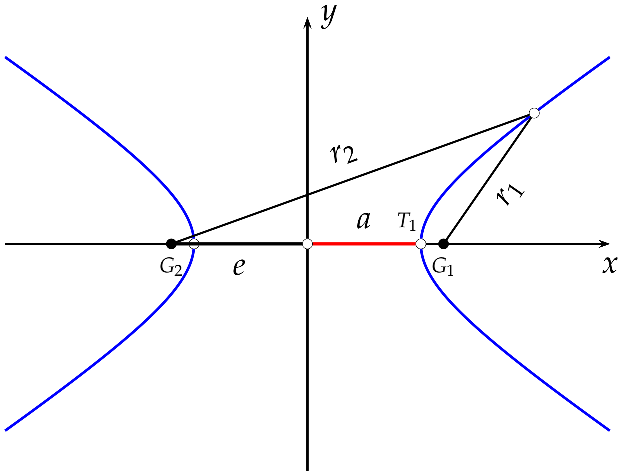
Ker gorišči ležita na eni od koordinatnih osi, tudi temena ležijo na koordinatnih oseh. Ker pa dve temeni ležita tudi na dani premici, sta temeni ravno presečišči premice z osema: z abscisno ($y = 0$) je presečišče točka $(4, 0)$, z ordinatno osjo ($x = 0$) pa je presečišče točka $(0, 3)$. Zato je $a = 4$ in $b = 3$ ter iskana enačba $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. ■

4 Hiperbola

Podobno definicijo kot elipsa ima tudi hiperbola:

geometrijsk definicija hiperbole

Hiperbola je množica točk v ravnini, za katere je absolutna vrednost **razlike** razdalj od dveh danih točk G_1 in G_2 iste ravnine **stalna**. Razdalji označimo tako kot pri elipsi z r_1 in r_2. Točki G_1 in G_2 imenujemo **gorišči (fokusa)** hiperbole, absolutno vrednost razlike razdalj $|r_1 - r_2| = 2a$ **velika os** hiperbole, sredino daljice G_1G_2 **središče** hiperbole, razdaljo od središča do gorišča pa imenujemo **linearna ekscentričnost** hiperbole in jo označimo z e.



Za razliko od elipse ali krožnice hiperbola ni zaključena krivulja. Sestavljata jo dve veji, in sicer je na eni $r_1 - r_2 = 2a$, na drugi pa $r_2 - r_1 = 2a$.

Točki hiperbole, ki sta najmanj oddaljeni od središča, imenujemo **temeni** hiperbole. Na zgornji sliki sta to točki $(\pm a, 0)$. Gorišči hiperbole na gornji sliki sta točki $G_1(e, 0)$ in $G_2(-e, 0)$.

Podobno kot smo to storili pri elipsi, iz geometrijske definicije izpeljemo enačbo hiperbole, ki ima središče v izhodišču, gorišči pa na oseh. Dobimo:

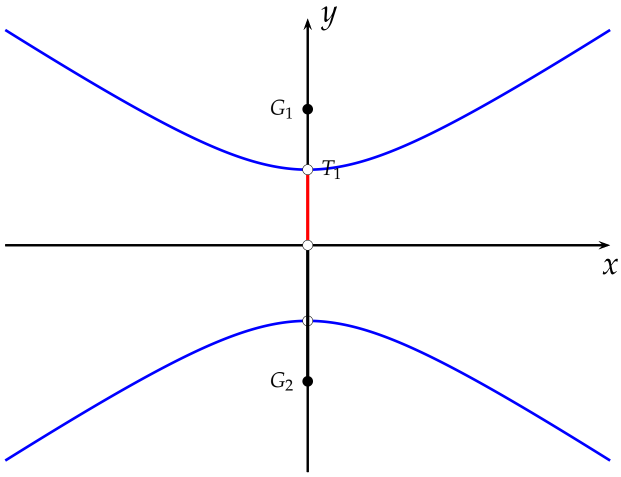
$$\boxed{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2} \quad \text{ali} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Količino $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$ imenujemo **numerična ekscentričnost**hiperbole, količino b pa imenujemo **imaginarna polos** hiperbole in jo izračunamo iz enačbe $\boxed{a^2 + b^2 = e^2}$

Če sta gorišči hiperbole na ordinatni osi v točkah $G_1(0, e)$ in $G_2(0, e)$, je enačba hiperbole

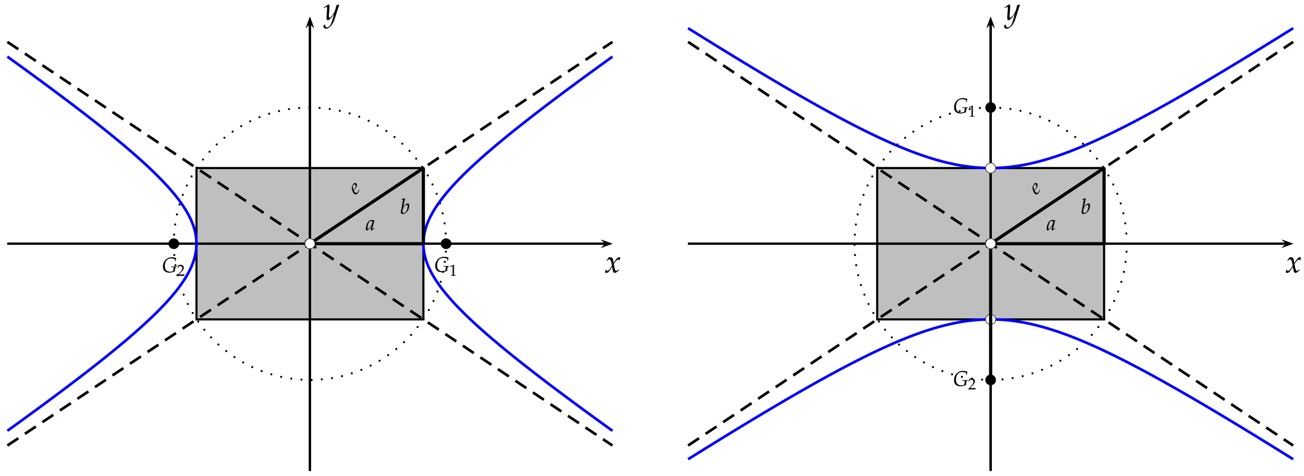
$$\boxed{b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2} \quad \text{ali} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

njena slika pa je



V obeh primerih pravokotnik z oglišči $(\pm a, 0)$ in $(0, \pm b)$ imenujemo **osnovni pravokotnik** hiperbole, nosilki njegovih diagonal pa **asimptoti** hiperbole; njuni enačbi sta

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$$



Pojasnimo, zakaj sta premici $y = \pm\frac{b}{a}x$ asimptoti hiperbole. Izrazimo iz enačbe $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ koordinato y: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Zadnjo enačbo gledamo lahko tudi kot zapis dve korenskih funkcij. Obe sta definirani za tiste x, za katere je $x^2 - a^2 \geq 0$, torej za $|x| \geq a$, kar je enakovredno zapisu $x \geq a$ ali $x \leq -a$. Dobljeni izraz preoblikujmo v obliko:

$$y = \pm \frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

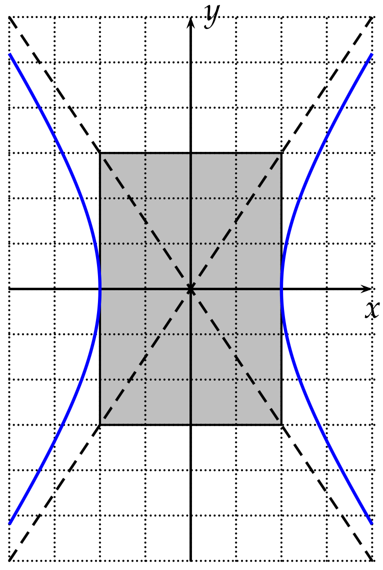
Opazujmo, kaj se dogaja z vrednostjo y, ko $|x| \to \infty$. Ulomek $\frac{a^2}{x^2}$ postaja vedno manjši, zato se vrednost y približuje vrednost $\pm\frac{bx}{a}$. Torej se graf hiperbole vedno bolj bliža grafu dveh premic, prva ima enačbo $y = \frac{b}{a}x$, druga $y = -\frac{b}{a}x$. Kot smo navajeni, premice, ki se ji dana krivulja približuje, imenujemo asimptota krivulje.

Zgled 6: Skiciraj hiperbolo z enačbo $9x^2 - 4y^2 = 36$ in zapiši koordinati njenih gorišč.

Poiščimo polosi hiperbole Enačbo preoblikujemo v vzorčno obliko $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$9x^2 - 4y^2 = 36| : 36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{4}_{=a^2}} - \frac{y^2}{\underbrace{9}_{=b^2}} = 1$$

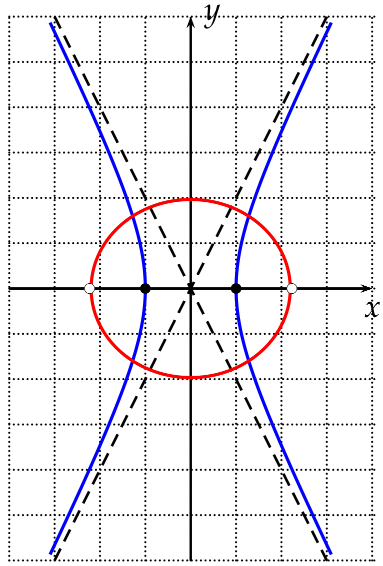
Torej je $a = 2$ in $b = 3$. Gorišči hiperbole sta v tem primeru na abscisni osi $(\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = +1)$ v točkah $G_1(\sqrt{13}, 0)$ in $G_2(-\sqrt{13}, 0)$. Hiperbolo skiciramo tako, da narišemo njen značilni pravokotnik s središčem v izhodišču, njegovi diagonali pa sta asimptoti hiperbole:



■

Zgled 7: Zapiši enačbo hiperbole, ki ima gorišči v dveh temenih elipse, temeni pa v goriščih elipse z enačbo $4x^2 + 5y^2 = 20$.

Poiščimo osnovne količine elipse: $4x^2 + 5y^2 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{5}$, $b = 2$. Zato je $e^2 = a^2 - b^2 = 1$ in sta tako gorišči elipse točki $G_1(1,0)$ in $G_2(-1,0)$. Ker sta gorišči tudi temeni hiperbole, je $a_H = 1$. Gorišči hiperbole sta tako tudi na abscisni osi, in sicer v temenih elipse $(\pm\sqrt{5}, 0)$. Zato je $e_H = \sqrt{5}$. Ker je $e_H^2 = a_H^2 + b_H^2$, je $b_H^2 = \sqrt{5}^2 - 1^2 = 4$. Zato je enačba iskane hiperbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ ali v drugi obliki $4x^2 - y^2 = 4$. Za konec prikažimo še obe vpleteni krivulji na sliki:



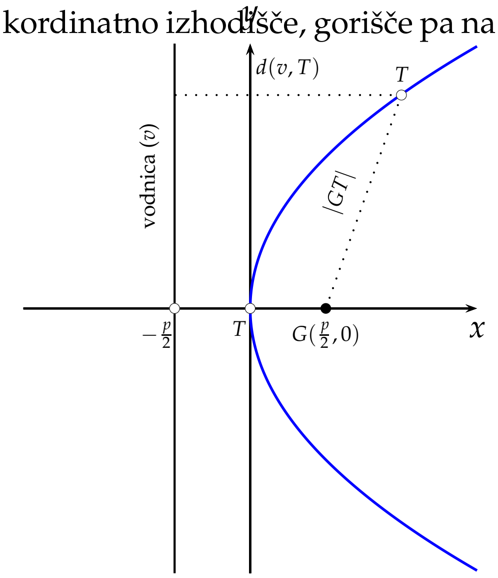
■

5 Parabola

geometrijska definicija parabole

V ravnini ležita točka G, ki jo imenujemo **gorišče** in premica, ki jo imenujemo **vodnica**. **Parabola** je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od gorišča kot od vodnice. Točko parabole, ki je najbliže gorišču imenujemo **teme** parabole.

Postavimo teme parabole v kordinatno izhodišče, gorišče pa na abscisno os v točko $G(\frac{p}{2}, 0)$:



Potem je enačba vodnice $x = -\frac{p}{2}$, enačbo parabole pa poiščemo takole:

Vzemimo poljubno (tekočo) točko $T(x, y)$ na paraboli. Naša naloga je poiskati zvezo med x in y te točke. Ker je razdalja $d(T, v)$ od točke T do vodnice v enaka razdalji med T in goriščem G, je:

$$\underbrace{x + \frac{p}{2}}_{d(T,v)} = \underbrace{\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}}_{|GT|} \Rightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 2px$$

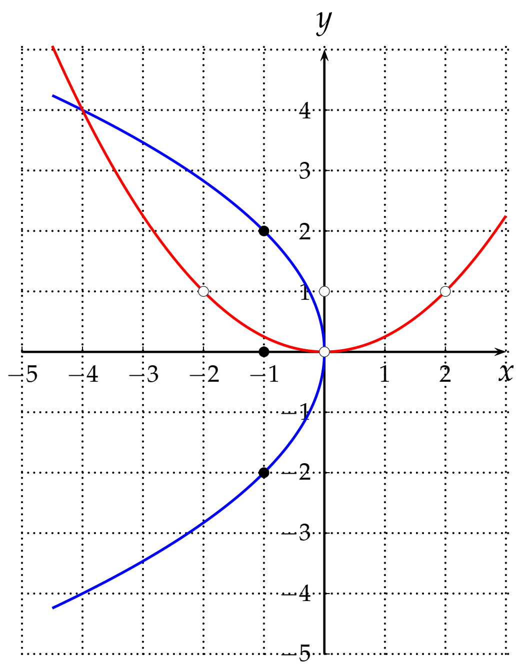
je zato enačba opisane parabole

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Zrcaljenje parabole $y^2 = 2px$ prek simetrale lihih kvadrantov privede do slike klasične parabole, ki je graf kvadratne funkcije $y = \frac{1}{2p}x^2$. V tem primeru je gorišče v točki $(0, \frac{p}{2})$, vodnica pa ima enačbo $y = -\frac{p}{2}$.

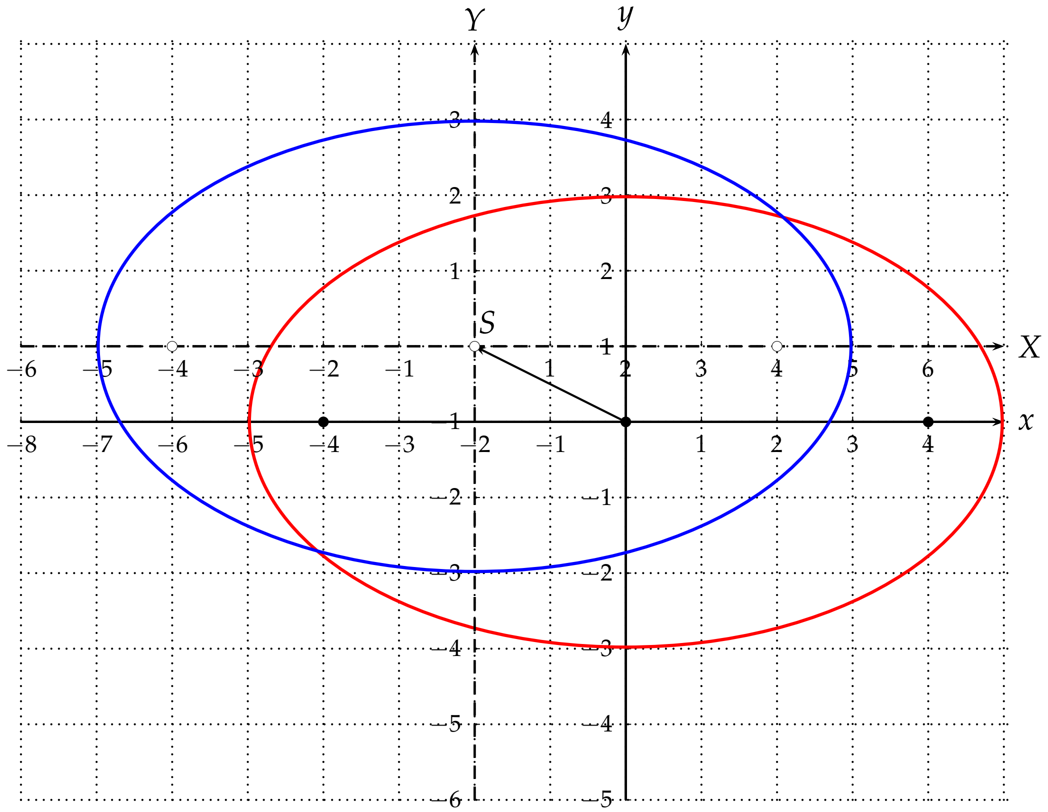
Zgled 8: Skiciraj v istem koordinatnem sistemu paraboli z enačbama $y^2 = -4x$ in $y = \frac{1}{4}x^2$.

V prvem primeru je parameter p parabole enak -2 ($2p = -4 \Rightarrow p = -2$), zato je gorišče točka $(\underbrace{-1}_{=\frac{p}{2}}, 0)$, teme pa ima parabola v izhodišču. Še dve točki parabole nam da preprosta tabela $\begin{array}{|c|c|}\hline x & \frac{p}{2} \\ \hline y & \pm p \\ \hline\end{array}$. Torej ima prva parabola teme v $(0,0)$, poteka pa skozi točki $(\frac{p}{2}, p) = (-1, 2)$ in $(\frac{p}{2}, -p) = (-1, -2)$. Drugo parabolo zapišemo v obliki $x^2 = 4y$ in ugotovimo, da ima gorišče v točki $(0, 1)$ in vsebuje točki $(-2, 1)$ ter $(2, 1)$. Skozi dobljene točke napeljemo obe paraboli.



6 Vzporedni premik stožnice

Premaknimo elipso $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ tako, da bo njeno središče v točki $S(-2, 1)$, osi nove elipse pa vzporedne osem stare elipse.



Zanima nas enačba premaknjene elipse. Točka S naj postane izhodišče novega koordinatnega sistema, ki ima abscisno os X vzporedno stari abscisni osi x, novo ordinatno os Y pa vzporedno stari ordinatni osi y. Preprost razmislek pove, da so zveze med starimi in novimi koordinatami v našem primeru: $X = x + 2$, $Y = y - 1$. V novem sistemu je enačba elipse $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$, zato je v starem sistemu (x, y) enačba $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

Povzemimo zgornja dejanja v splošni obliki:

Če vzporedno premaknemo elipso $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tako, da bo središče premaknjene elipse v točki $S(p, q)$, ima nastala elipsa enačbo:

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1}$$

Polosi elipse se ne spremenita, temena in gorišči pa se ustrezno premaknejo. V začetnem primeru so tako temena v točkah $(3, 1)$, $(-2, 4)$, $(-7, 1)$ in $(-2, -2)$, gorišči pa sta v točkah $(2, 1)$ in $(-6, 1)$.

Podobni enačbi dobimo tudi za hiperbolo in parabolo. Če središče hiperbole premaknemo v točko $S(p, q)$, bo enačba hiperbole s polosema a in b:

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1} \text{ ali } \boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1}$$

enačbi asimptot pa

$$\boxed{y - q = \pm\frac{b}{a}(x-p)}$$

Ce teme parabole $y^2 = 2px$ premaknemo v točko (x_0, y_0), bo enačba parabole

$$\boxed{(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)}$$

7 Splošna oblika enačbe stožnice

Splošna oblika enačbe stožnice, ki smo jih obravnavali, je kvadratna enačba z dvema neznankama (včasih jim starinsko pravimo tudi krivulje drugega reda):

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

Vrsta stožnice je je odvisna od koeficientov A in B kvadratnega dela:

1. Če je $A = B$ ”sumimo”[1] , da enačba predstavlja **krožnico**,
2. če je $AB > 0$ ”sumimo” na **elipso** (A in B imata isti predznak),
3. če je $AB < 0$ ”sumimo” na **hiperbolo** (A in B imata različni predznak; hiperbola je lahko izrojena v dve premici),
4. če je $AB = 0$ ”sumimo” na **parabolo** ($A = 0$ ali $B = 0$; torej v enačbi ni enega kvadrata, ne pa obeh).

[1]Lahko se zgodi, da kvadratni enačbi $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ne ustreza nobena točka (x, y), kot recimo v primeru enačbe $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ali pa predstavlja le eno točko, kot v primeru enačbe $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, ki predstavlja točko $(1/2, -1/2)$

Zgled 9: Opiši krivuljo z enačbo $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Kaj pa predstavlja krivulja z enačbo $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$

Pogled na kvadratni del nam vzbudi sum, da enačba predstavlja hiperbolo. Enačbo uredimo do središčne oblike tako, kot smo začeli s krožnicami: združimo dele s premenljivko x in dele s spremenljivko y, števila prestavimo na desno stran enačbe, torej

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0 \Rightarrow (4x^2 - 16x \quad) - (9y^2 + 18y \quad) = 29$$

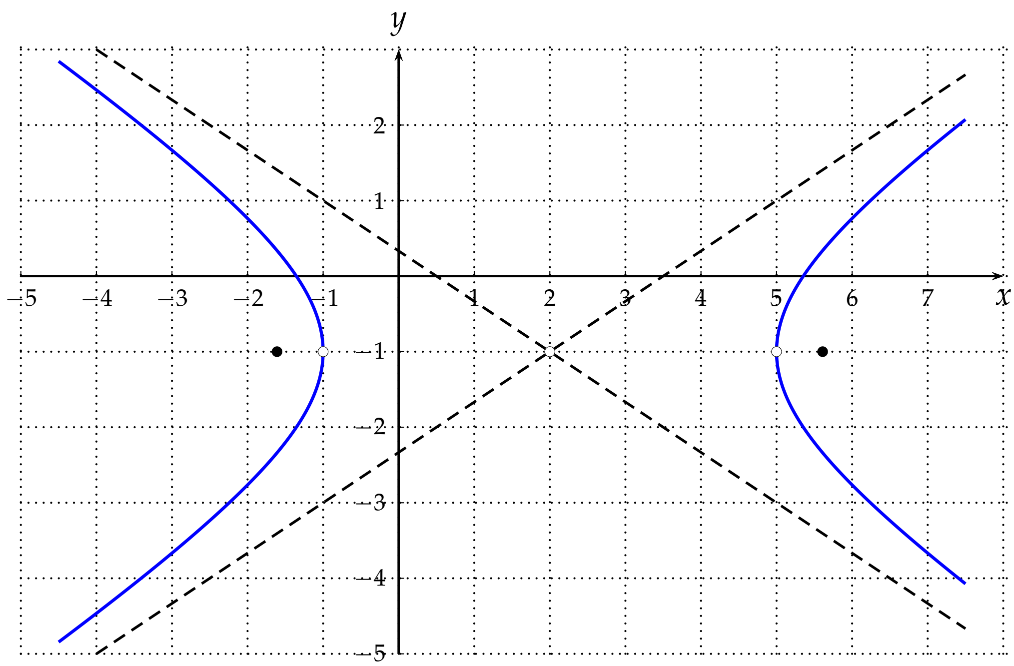
V dobljenih izrazih na desni izpostavimo številski skupni faktor in nastale izraze dopolnimo do popolnih kvadratov. Pri tem pazimo, da z ustreznimi števili dopolnimo tudi desno stran enačbe :

$$(4(x^2 - 4x \quad) - 9(y^2 + 2y \quad) = 29 \Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) = 29 + 4 \cdot 4 - 9 \cdot 1$$

Dobljeno zapišemo v obliki:

$$4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36 \quad \text{ali} \quad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Sum smo opravičili. Res imamo opravka s hiperbolo, ki ima središče v točki $S(2, -1)$ in parametri $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Gorišči hiperbole sta za e premaknjeni levo in desno središča hiperbole v točkah $G_1(2 + \sqrt{13}, -1)$, $G_1(2 - \sqrt{13}, -1)$, temeni pa sta točki $(-1, -1)$, $(5, -1)$. Še slika:



Tudi v tem primeru nam pogled na kvadratni del $4x^2 - 9y^2$ porodi sum, da enačba predstavlja hiperbolo. Enačbo preoblikujemo na podoben način kot zgoraj, toda vzorčne oblike z 1 na desni strani ne moremo dobiti, saj po urejanju, na desni strani enačbe dobimo število 0. Če imamo enačbo z veččlenikom na levi ureno na "nič" (desna stran je 0), poskušamo levo stran razstaviti. V našem primeru uspemo z uporabo formule za razliko kvadratov:

$$4x^2-9y^2-16x-18y+7=0 \Rightarrow 4(x^2-4x+4)-9(y^2+2y+1)=-7+16-9 \Rightarrow 4(x-2)^2-9(y+1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2(x-2)-3(y+1))\cdot(2(x-2)+3(y+1))=0 \Rightarrow (2x-3y-7)(2x+3y-1)=0$$

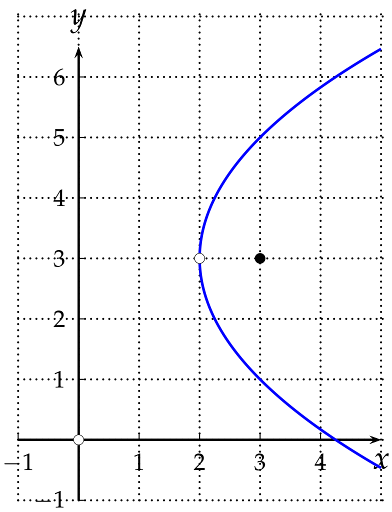
Produkt je enak 0 le, če je vsaj en faktor enak 0. Zato naša enačba predstavlja unijo dveh premic: $2x-3y-7=0$ in $2x+3y-1=0$. ■

Zgled 10: Opiši krivuljo z enačbo $y^2-6y-4x+17=0$.

Kvadratni del je brez člena z x^2, zato enačba predstavlja parabolo. Člene z y zapišemo na levi strani, člene z x in brez spremenljivke pa na desni strani; desni izraz dopolnimo do kvadrata binoma:

$$y^2-6y-4x+17=0 \Rightarrow y^2-6y=4x-17 \Rightarrow y^2-6y+9=4x-8 \Rightarrow (y-3)^2=4(x-2)$$

Enačba torej predstavlja parabolo s temenom v točki $(2,3)$ in parametrom $p=2$. Zato je gorišče v točki $(3,3)$, slika pa naslednja:



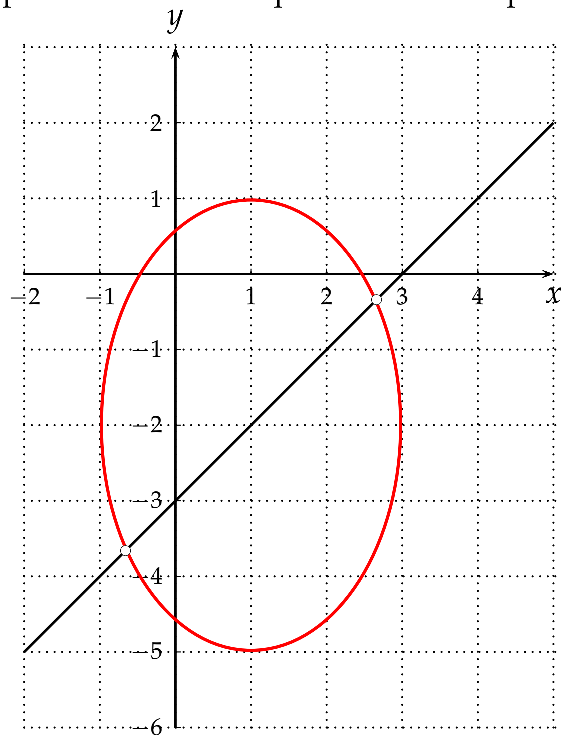
■

8 Medsebojni položaji premic in stožnic

Medsebojni položaj premice $ax + by + c = 0$ in stožnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ razberemo iz števila rešitev ustreznega sistema enačb. Sistem običajno rešimo tako, da iz linearne enačbe $ax + by + c = 0$ izrazimo eno od neznank in dobljeni izraz vstavimo v kvadratno enačbo. Nastalo kvadratno enačbo z eno neznanko rešimo in ugotovimo ali premica seka stožnico, ali se je dotika, ali pa ji je mimobežna.

Zgled 11: Razišči medsebojno lego elipse $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$ in premice $x - y - 3 = 0$.

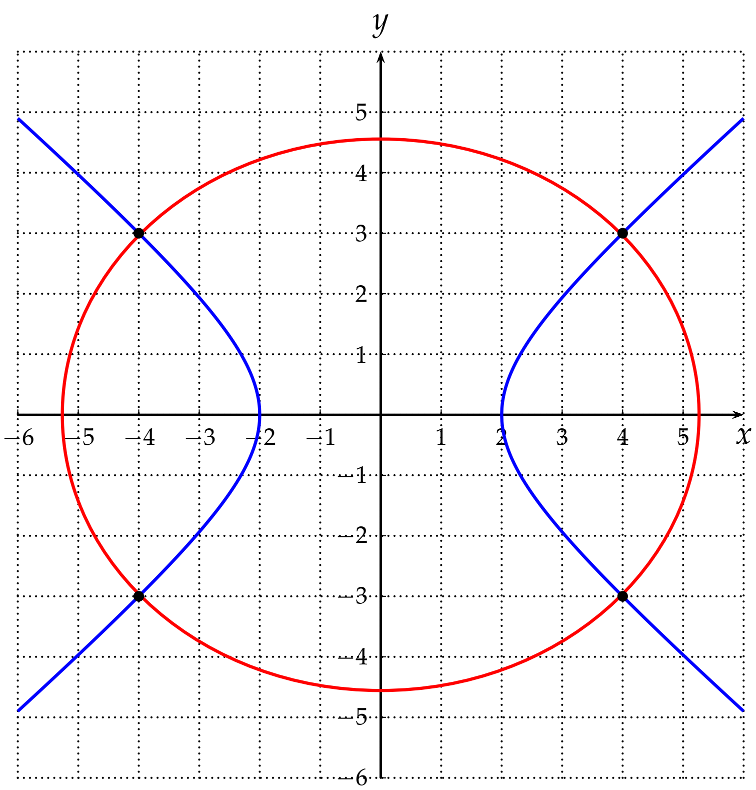
Izrazimo $y = x - 3$ in dobljeno vstavimo v enačbo elipse. Po urejanju dobimo enačbo: $13x^2 - 26x - 23 = 0$ z diskriminanto $D = 1872 = 16 \cdot 9 \cdot 13$ in rešitvama $x_1 = \frac{13+6\sqrt{13}}{13} \doteq 2,66$ in $x_2 = \frac{13-6\sqrt{13}}{13} \doteq -0,66$. Ustrezni ordinati sta $y_1 = \frac{-26+6\sqrt{13}}{13} \doteq -0,34$ in $y_2 = \frac{-26-6\sqrt{13}}{13} \doteq -3,66$. Torej je premica sekanta elipse. Izračunano potrdimo še s sliko.



Dve stožnici se lahko sekata v največ štirih točkah. Presečišča poiščemo tako, da rešimo ustrezni sistem dveh kvadratnih enačb. To nas privede do reševanja polinomske enačbe 4 stopnje.

Zgled 12: Opiši mesebojni položaj elipse $3x^2 + 4y^2 = 84$ in hiperbole $3x^2 - 4y^2 = 12$. Rezulte kontroliraj grafično.

Presečišča dobimo tako, da rešimo ustrezni sistem enačb $3x^2 + 4y^2 = 84$, $3x^2 - 4y^2 = 12$, ki ga lahko preoblikujemo v linearni sistem $\left.\begin{array}{rcrcr} 3a & + & 4b & = & 84 \\ 3a & - & 4b & = & 12 \end{array}\right|$ s preprosto uvedbo novih spremenljivk $x^2 = a$ in $y^2 = b$. Sistem rešimo z eno od metod, recimo z metodo nasprotnih koeficientov. Dobimo $a = 16$, $b = 9$. Zato je $x^2 = 16$ in $y^2 = 9$, kar na da štiri presečišča: $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$ in $(4, -3)$. Še slika; obe krivulji preoblikujemo v vzorčni obliki $x^2/28 + y^2/21 = 1$ in $x^2/4 - y^2/3 = 1$ in iz njih preberemo polosi obeh krivulj: $a_E = 2\sqrt{7}$, $b_E = \sqrt{21}$, $a_H = 2$, $b_H = \sqrt{3}$. Stožnici skiciramo in na sliki potrdimo presečišča.



9 Naloge

1. Zapiši enačbo krožnice z danimi podatki:

   (a) **M** je koncentrična s krožnico $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, vsebuje točko $A(-4, -1)$. $[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 39 = 0]$.

   (b) točki $A(-2, 7)$, $B(-2, 1)$ sta diametralni. $[(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16]$.

   (c) točke $A(-2, 3)$, $B(4, -2)$ in $C(-2, -2)$ ležijo na krožnici. $[(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9]$.

   (d) na krožnici ležita točki $A(-2, 3)$ in $B(2, 1)$, središče pa leži na premici z enačbo $2x - 3y + 7 = 0$. $[(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4]$.

   (e) krožnica se dotika koordinatnih osi in vsebuje točko $A(4, 2)$.

   $[(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,\ (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16]$.

2. **M** Natančno izračunaj ploščino kolobarja, ki ga določata krožnici z enačbama $x^2 - 2x + y^2 = 0$ in $x^2 - 2x + y^2 = 8$. $[8\pi]$.

3. **M** Krožnici, s središčem v koordinatnem izhodišču, se ena z zunanje in druga z notranje strani dotikata elipse z enačbo $9x^2 + 4y^2 = 36$. Izračunaj točno vrednost ploščine kolobarja med obema krožnicama. $[5\pi]$.

4. Izračunaj točno vrednost ploščine kolobarja, ki ga določata krožnici z enačbama $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ in $x^+ y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. $[12\pi]$.

5. **M** Napiši enačbo krožnice, ki poteka skozi točko $A(-8, -5)$ in ima središče v točki $S(4, 0)$. $[(x - 4)^2 + y^2 = 169]$.

6. **M** Napiši enačbo krožnice, katere središče leži na premici z enačbo $3x - 4y + 11 = 0$, premici $x = -1$ in $x = 7$ pa sta njeni tangenti. $[(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16]$.

7. **M** Krožnica ima središče v desnem gorišču elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ in se dotika ordinatne osi. Zapiši enačbo krožnice. $[(x - 4)^2 + y^2 = 16]$.

8. Nariši v koordinatni ravnini $\mathbb{R}^2$ množico $K = \{T(x, y)\,;\, 4x^2 + 4y^2 - 4x + 6y + 1 = 0\}$. [krožnica, $S(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, $r = \frac{3}{4}$].

9. **MV** Dana je enačba krožnice: $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 3 = 0$.

   (a) Nariši krožnico in izračunaj presečišča krožnice s koordinatnima osema.

   $[P_1(1, 0),\ P_2(3, 0)]$.

   (b) Določi realno število c tako, da bo premica z enačbo $y = x + c$ razpolavljala krožnico. $[c = -3]$.

(c) Abscisna os razdeli krog, omejen z dano krožnico, na dva dela. Natančno izračunaj razmerje ploščin večjega in manjšega dela. $[\frac{3\pi+2}{\pi-2}]$.

10. Dani sta krožnici $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ in $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0$. Poišči polmera obeh krožnic in središčno razdaljo med krožnicama. S pomočjo dobljenih rezultatov utemelji, da se dani krožnici ne sekata. $[S_1(2,1),\ r_1 = 3,\ S_2(-1,5),\ r_2 = 1,\ |S_1S_2| = 5 > r_1 + r_2]$.

11. $^{\mathbf{M}}$ Premica $3x - 4y - 12 = 0$ poteka skozi dve temeni elipse (v središčni legi). Napiši enačbo elipse in koordinate njenih gorišč. $[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,\ G_1(\sqrt{7},0),\ G_2(-\sqrt{7},0)]$.

12. $^{\mathbf{M}}$ Elipso z enačbo $x^2 + 4y^2 = 4$ zavrtimo za 90° okrog izhodišča. Zapiši enačbo dobljene elipse in njeni gorišči. $[x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ G_1(0,\sqrt{3}),\ G_2(0,-\sqrt{3})]$.

13. Natančno izračunaj dolžine skupne tetive elipse $x^2 + 2y^2 = 9$ in krožnice $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 8$. $[2\sqrt{2}]$.

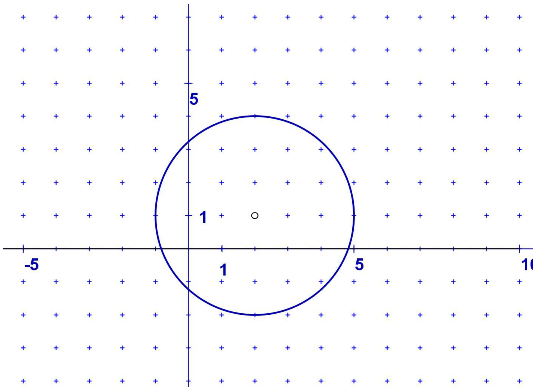
14. Zapiši enačbo elipse, ki ima gorišči v temenih hiperbole $7x^2 - 10y^2 = 70$, dve temeni pa sta v goriščih iste hiperbole. $[\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{7} = 1]$

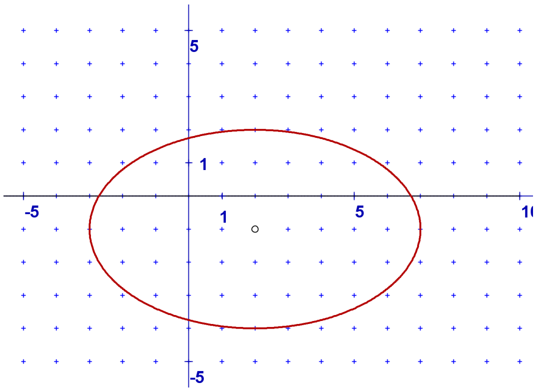
15. Določi enačbo hiperbole z realno osjo na abscisni osi, če je ena njena asimptota $y = -\frac{1}{2}x$, razdalja med njenima goriščema pa je $4\sqrt{5}$. $[\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1]$

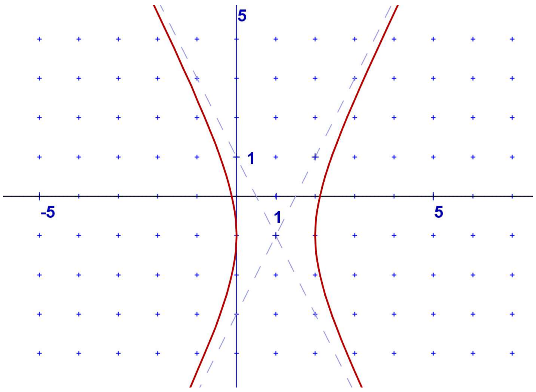
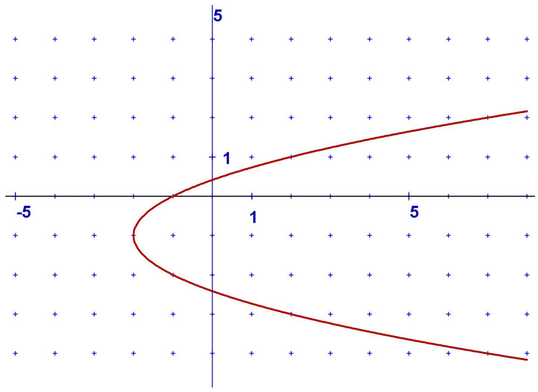
16. Zapiši enačbo množice točk, ki so enako oddaljene od premice $x = -1$ in točke $F(1,0)$ in množico tudi nariši. $[y^2 = 4x]$

17. Izračunaj število a tako, da bo točka $A(2, 2\sqrt{3})$ ležala na krivulji z enačbo $y^2 = ax$. Krivuljo tudi nariši. $[a = 4]$

18. Zapiši enačbe krivulj na spodnji sliki (zadnja je parabola):






5
1
-5
1
5

5
1
-5
1
5