EKSPONENTNA FUNKCIJA in LOGARITEM

(INTERNO GRADIVO)

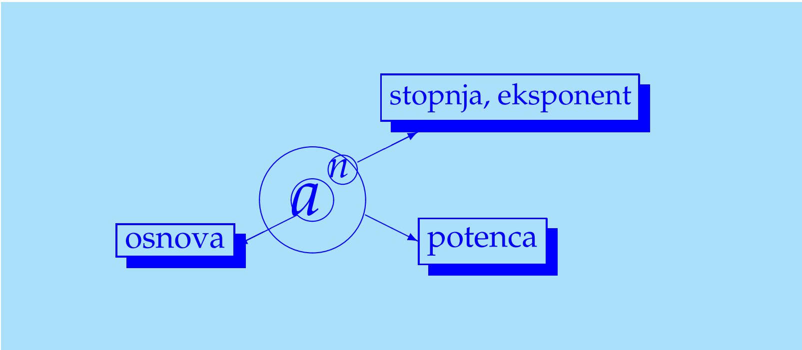
Sestavil I.K.

2017

Kazalo

1 Potence

Obnovimo najpomembnejše pojme o potencah. Potenca je zgrajena iz dveh števil: **osnove**, ki je poljubno realno število, in **eksponenta** ali **stopnje** potence. Osnova je lahko poljubno realno število, eksponent pa je (zaenkrat) naravno, celo ali racionalno število.



Če je stopnja potence naravno število, recimo n, in je stopnja potence a, je potenca izraz, ki ga dobimo z množenjem n enakih faktorjev a, torej:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - krat}}}$$

V primeru, ko je stopnja potence negativno celo število, uporabimo definiciji

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Primer, ko je stopnja potence racionalno število (ulomek), potenco zapišemo s koreni:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Za računanje s potencami veljajo naslednja pravila:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Za vajo reši naslednje naloge:

1. Zapiši števila $1, 4, 8, 16, 32, 0.5, 0.25$ in 0.125 kot potenco z osnovo 2.
2. Zapiši števila $1, 9, 27, 81, 32, 0.\overline{3}$ in $0.\overline{1}$ kot potenco z osnovo 3.
3. Preveri pravilnost naslednje tabele:

	-3	**-2**	**-1**	**2**	**3**	**4**
2	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{2} = 0,5$	4	8	16
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	9	27	81
4	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	16	64	256
5	$\frac{1}{125} = 0,008$	$\frac{1}{25} = 0,04$	$\frac{1}{5} = 0,2$	25	125	625

   V tabeli so v prvi vrstici zapisani eksponenti, v prvem stolpcu osnove, v ostalih celicah tabele pa so izračunane ustrezne potence.

4. Zapiši izraze $1, \frac{1}{a^3}, \sqrt[5]{\frac{1}{a^4}}$ kot potenco z osnovo a.
5. Preveri naslednje enakosti:
   (a) $(8xy^{-4}) : (4x^3y^{-7}) : (2x^{-2}y^5) = \frac{1}{y^2}$
   (b) $\left(\frac{2a^3b^{-3}}{3^{-1}b^{-2}a^5}\right)^5 : \left(\frac{a^3}{12}\right)^{-3} = \frac{27}{2a}$
   (c) $\frac{a^{3n} + a^{2n}b^n}{a^{2n} + 2a^nb^n + b^{2n}} : \frac{a^{2n+2}}{a^n + b^n} = \frac{1}{a^2}$
   (d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16^{-\frac{3}{8}}} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}} = \sqrt{2}$

2 Preproste potenčne in eksponentne enačbe

Preprosta **potenčna** enačba imenujemo tisto enačbo, ki jo lahko preoblikujemo v obliko **potenčna enačba**

$$\boxed{x^a = b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R}}$$

Ena od metod, kako tako enačbo rešimo je, da levo in desno stran urejene enačbe potenciramo z obratno vrednostjo eksponenta a. Oglejmo si primer:

Zgled 1: Reši enačbo: $a\sqrt[3]{a} = 16$.

Enačbo preoblikujemo jo v $a \cdot a^{\frac{1}{3}} = 16 \Rightarrow a^{\frac{4}{3}} = 16$. Zato: $a^{\frac{4}{3}} = 16 \Big| ()^{\frac{3}{4}} \Rightarrow a = 16^{\frac{3}{4}} \Rightarrow$
$a = \sqrt[4]{16}^3 = 8$ ■

Za drugi primer si izberimo naslednjo nalogo:

Zgled 2: Izračunaj osnovo a tako, da bo točka $A(-\frac{2}{3}, \frac{9}{4})$ ležala na grafu funkcije $f(x) = a^x$.

Ker točka A leži na grafu funkcije, njeni koordinati ustrezata enačbi funkcije. Zato $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ■

Preproste **eksponentne** enačbe so tiste, pri katerih neznanka nastopa v eksponentu in se z elementarnimi transformacijami prevedejo v eno od naslednjih oblik: **eksponentna enačba**

- $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ (enačbo preoblikujemo na **isto osnovo**). Enačbo rešujemo tako, da enačimo eksponenta (stopnji): $\boxed{f(x) = g(x)}$.
- $\boxed{a^{f(x)} = b^{f(x)} \text{ in } a \neq b}$ (enačbo preoblikujemo tako, da imata potenci na levi desni strani **različni** osnovi, a **ista eksponenta**). V tem primeru je potem eksponent enak 0 (le v tem primeru sta leva in desna stran enačbe enaki), torej rešujemo enačbo $\boxed{f(x) = 0}$.

Zgled 3: Reši enačbo $4^{x-1} = 0,125^{3-2x}$.

Enačbo preoblikujemo do enakih osnov. V gornji tabeli odkrijemo, da je $4 = 2^2$ in $0,125 = 2^{-3}$. Potem dobi enačba obliko:

$$\left(2^2\right)^{x-1} = \left(2^{-3}\right)^{3-2x}$$

in nato s pravili za računanje s potencami obliko:

$$2^{2x-2} = 2^{-9+6x}$$

Zato je $2x - 2 = -9 + 6x$ in $x = \frac{7}{4}$. ■

Zgled 4: Reši enačbo $\frac{1}{\sqrt{a^{2x+1}}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[4]{a^{3x}}$.

Osnove so že enake. Korene zapišemo v obliki potenc, s potencami poračunamo:

$$a^{\frac{-2x-1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3x}{4}} \Rightarrow a^{\frac{-6x+2}{6}} = a^{\frac{3x}{4}} \Rightarrow \frac{-6x+2}{6} = \frac{3x}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{21}$$ ■

Zgled 5: Reši enačbo $3^{6x-4} + 9^{3x-1} - 2 \cdot 27^{2x-1} = 36$.

V enačbi nastopajo z neznanko v eksponentih osnove 3, 9 in 27. V tabeli odkrijemo, da vse te osnove lahko zapišemo z osnovo 3: $3^{6x-4} + \left(3^2\right)^{3x-1} - 2 \cdot \left(3^3\right)^{2x-1} = 36$. Upoštevamo pravila računanja s potencami in dobimo: $3^{6x-4} + 3^{6x-2} - 2 \cdot 3^{6x-3} = 36$. Levo stran z izpostavljanjem skupnega faktorja razstavimo:$3^{6x-4} \cdot (1 + 3^2 - 2 \cdot 3) = 36$. Po kratkem računu je: $3^{6x-4} \cdot 4 = 36$ in $3^{6x-4} = 9$. Odtod je $6x - 4 = 2$ in $x = 1$. ■

Zgled 6: Reši enačbo $2^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} - 2^{x-2} + 5^{x-3}$.

V enačbi nastopata dve osnovi z neznanko v eksponentih: 2 in 5. Prenesimo člene z osnovo 2 na eno stran enačbe, z osnovo 5 pa na drugo stran:

$$2^{x-1} + 2^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 5^{x-3} + 4 \cdot 5^{x-3} \Rightarrow 2^{x-1} + 2^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 5 \cdot 5^{x-3}$$

Obe strani faktoriziramo (razstavimo), uredimo in rešimo:

$$2^{x-2}(2+1)=5^{x-3}(2\cdot 5+5)\Rightarrow 2^{x-2}=5^{x-2}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2. \qquad \blacksquare$$

Včasih uspemo do osnovne eksponentne enačbe pripeljati tudi bolj zahtevne enačbe tako, da vpeljemo novo neznanko.

Zgled 7: Reši enačbo $6^{1+x}-6^{2-x}=30$.

Izpostavljanje v tem primeru nima smisla, zato potenci z neznanko zapišemo takole:

$$6^{1+x}=6\cdot 6^x \quad \text{in} \quad 6^{2-x}=6^2\cdot 6^{-x}=\frac{36}{6^x}$$

Vpeljimo novo neznanko $6^x=z$, ki začetno enačbo preoblikuje v enačbo $6z-\frac{36}{z}=30$. Nastalo en preoblikujemo v kvadratno enačbo $z^2-5z-6=0$. Ta ima rešitvi $z_1=6$ in $z_2=-1$. Ker je $z=6^x$, je za nas smiselna le prva rešitev, ki nas pripelje do preproste enačbe $6^x=6$ z rešitvijo $x=1$. $\blacksquare$

Zgled 8: Reši enačbo $\sqrt[x]{2}-2\cdot\sqrt[2x]{2}=48$.

Korena spremenimo v potenci: $2^{\frac{1}{x}}-2\cdot 2^{\frac{1}{2x}}=48$. Vpeljemo novo neznanko $2^{\frac{1}{2x}}=t$. Tedaj je $2^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{1}{2x}}\right)^2=t^2$ in zato: $t^2-2t=48$. Rešitvi nastale kvadratne enačbe sta števili $t_1=8$ in $t_2=-6$. Spet je smiselna le pozitivna rešitev, ki privede do eksponentne enačbe $2^{\frac{1}{x}}=8=2^3$. Zato je $\frac{1}{2x}=3$ in $x=\frac{1}{6}$. $\blacksquare$

Naloge:

1. Reši naslednje eksponentne enačbe:

(a) $10^{4x+2} = 0^{\cdot}00001$

(b) $9^{2^x} = 6561$

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{2+x}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-1}}$

(d) $9^x : \sqrt[3]{3^{x-1}} = 3^{x-1} \cdot \sqrt{3^{3x-4}}$

(e) $2^{x(x-2)} \cdot 4^{x-2} \cdot 0,5^{x+2} = 1$

(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+2} = \frac{4}{9}$

(g) $16^x \cdot 4^{x+1} - 64^{2x-3} = 0$

2. Reši enačbe:

(a) $3 \cdot 2^{x+2} + 2^{x+1} = 8 \cdot 7^{x-1}$

(b) $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

(c) $\frac{4^{x+2} - 4^x}{4^{x+1} + 8} = 3$

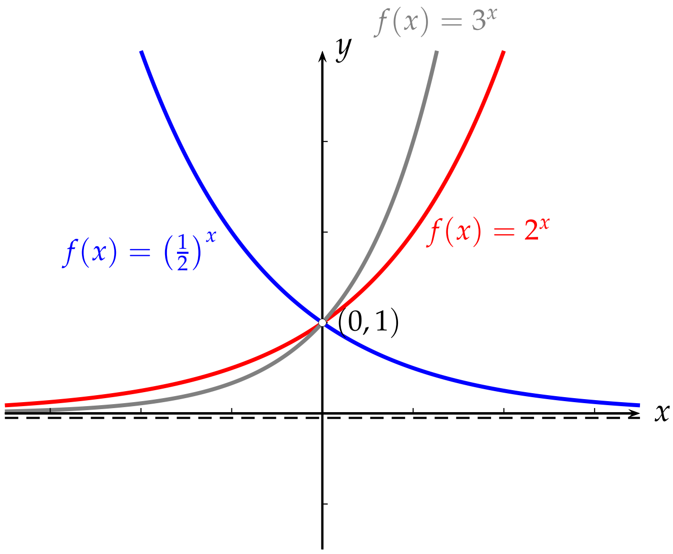
(d) $4^x + 2^x = 20$

(e) $5^x - 5^{3-x} = 20$

3 Graf in lastnosti eksponentne funkcije

Eksponentna funkcija imenujemo tako funkcijo, ki vsebuje potence z znano osnovo, v eksponentih pa nastopa spremenljivka. Najenostavnejša eksponentna funkcija je **osnovna** eksponentna funkcija, ki ima obliko $\boxed{f(x) = a^x}$, kjer je a realno število, torej $a \in \mathbb{R}$, in $a > 0$, $a \neq 1$. **definicija**

Graf novo definirane funkcije narišimo s tabelo. Za nas je to opravil računalnik na 200 točkah v ustreznem intervalu. Spodaj so narisani grafi eksponentnih funkcij z osnovami 2, 3 in $\frac{1}{2}$. **graf eksponentne funkcije**



Brez matematične strogosti glavne lastnosti eksponentne funkcije izluščimo iz narisanih grafov:

lastnosti

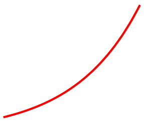
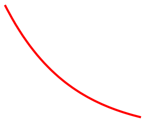
1. Za $a > 1$ je naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča.
2. Eksponentna funkcija je za vsak x pozitivna, kar pomeni, da eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ nima ničle.
3. Definicijsko območje so vsa realna števila ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$), zaloga vrednosti so pozitivna realna števila ($\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+$).
4. Značilne točke so: $(-1, \frac{1}{a})$, $(1, a)$ in začetna vrednost $f(0) = 1$, torej točka $(0, 1)$.

5. Abscisna os (= premica $y = 0$) je **asimptota** eksponentne funkcije. To pomeni, da se v primeru, ko je $a > 1$ graf eksponentne funkcije približuje abscisni osi, ko se vrednost spremenljivke x zmanjšuje (= gre v $-\infty$), v primeru, ko je $0 < a < 1$, pa se graf približuje abscisni osi za velike vrednosti spremenljivke x (= x gre v ∞).

Graf "osnovne" eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ narišemo z značilnimi točkami v tabeli

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{a}$	1	a

Pri risanju upoštevamo, da ima graf obliko "naleta smučarske skakalnice ":

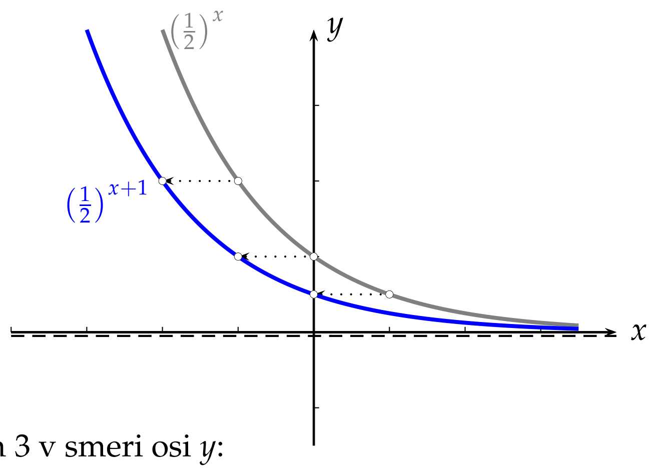

ali


Upoštevamo tudi, da je abscisna os asimptota grafa funkcije, torej se graf približuje x osi, ko se vrednost spremenljivke x približuje ∞ v primeru $0 < a < 1$ in $-\infty$ v primeru $a > 1$.

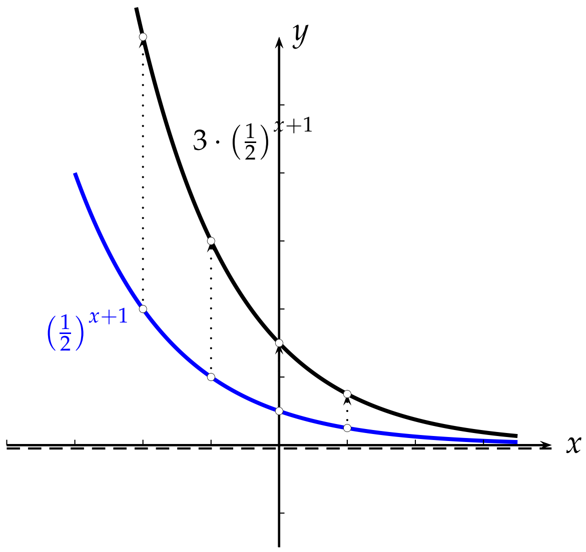
Grafe bolj kompliciranih eksponentnih funkcij rišemo s premiki in raztegi (**dodatek**)

Zgled 9: Nariši graf funkcije $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$.

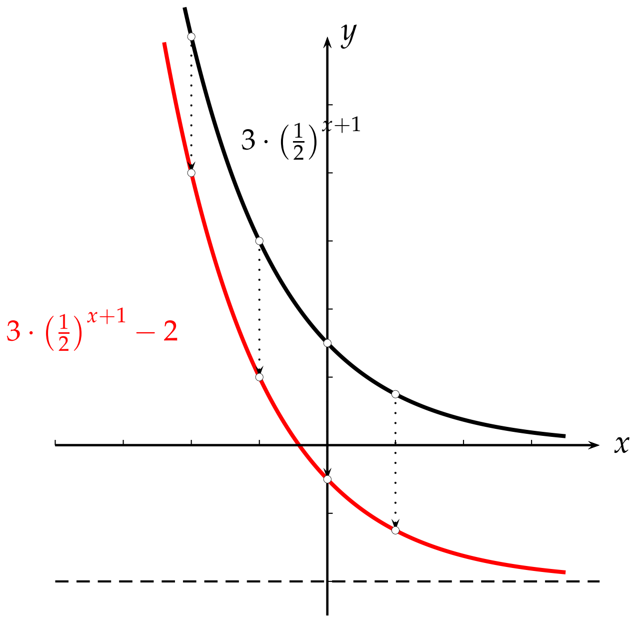
Najprej narišemo osnovno funkcijo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ z značilnimi točkami $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$ in jo premaknemo za 1 v levo:



Dobljeni graf raztegnemo s faktorjem 3 v smeri osi y:



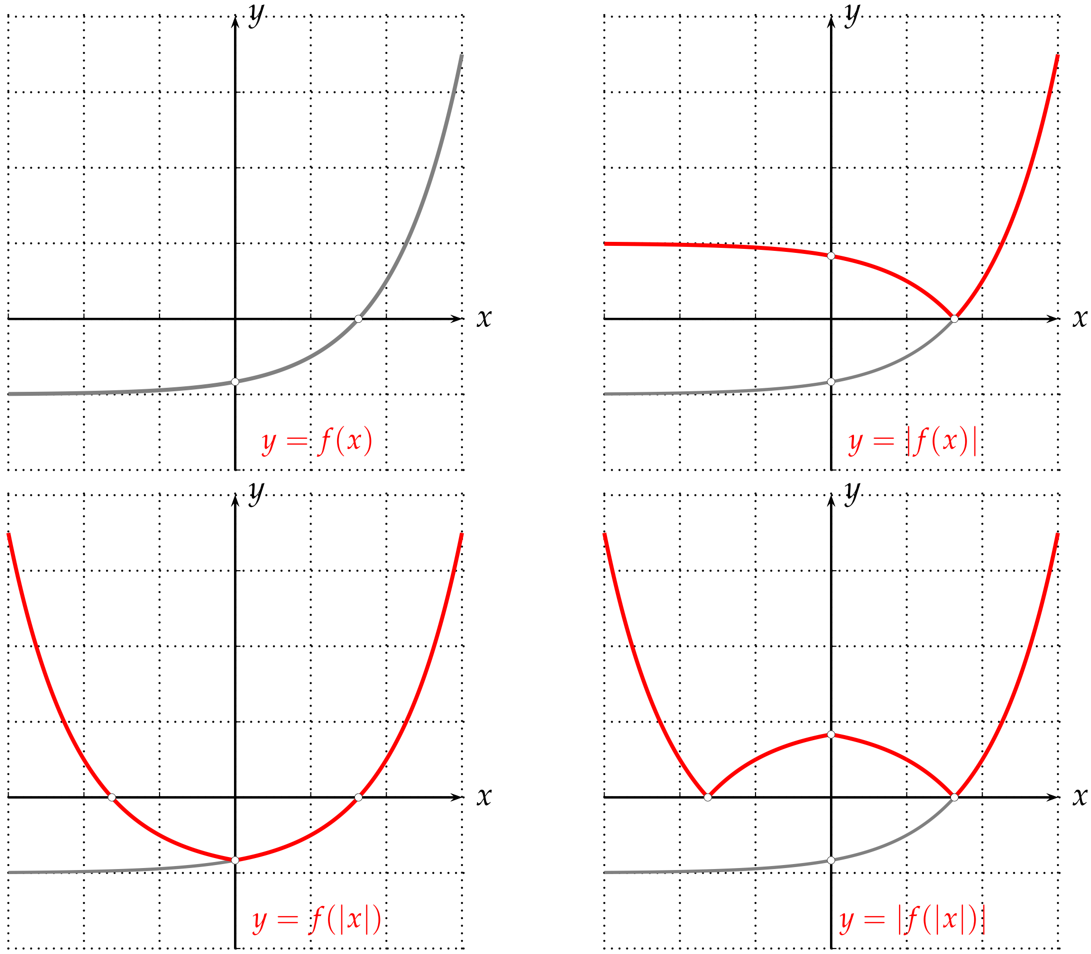
Na koncu dobljeni graf premaknemo v smeri osi y za 2 navzdol. Pri takem premiku se premakne tudi vodoravna asimptota.



V rdeče smo obarvali graf funkcije f. ■

Zgled 10: Nariši grafe funkcij $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x-1} - 1$, $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ in $r(x) = |f(|x|)|$.

Graf funkcije f narišemo podobno kot v prejšnjem primeru: narišemo osnovno funkcijo 3^x, graf premaknemo za eno v desno (3^{x-1}, dobljeni graf raztegnemo v smeri osi y s faktorjem $\frac{1}{2}$. Dobljeni graf premaknemo v smeri osi y za 1 navzdol. Grafe absolutnih vrednosti narišemo z zrcaljenji preko ustreznih osi.



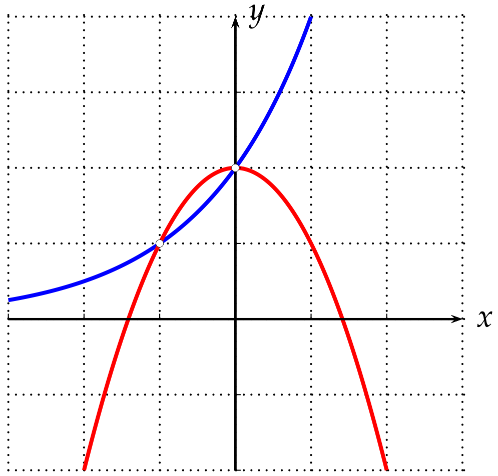
■

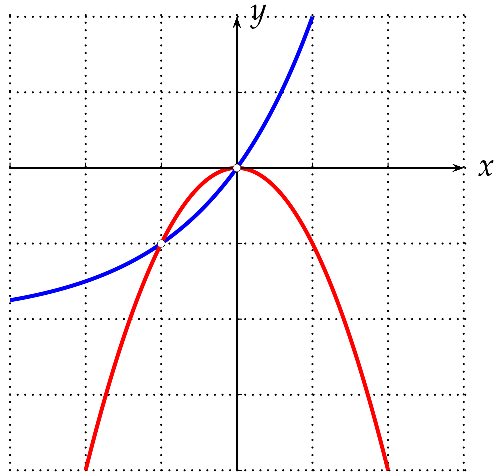
Zgled 11: Za eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$ vemo, da je $f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{8}$. Izračunaj $f(-1)$.

Ker je $f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{8}$, je $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$. Dobljeno potenčno enačbo rešimo s potenciranjem: $\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Zato je $f(-1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{4}$. ■

Zgled 12: Grafično reši enačbo $2^{x+1} + x^2 - 2 = 0$.

Grafično enačbo rešujemo tako, da jo preoblikujemo v obliko v kateri znamo narisati funkciji, ki nastaneta na preoblikovani levi in desni strani enačbe. Nastali funkciji narišemo in na sliki preberemo absciso presečišča. V našem primeru prvotno enačbo preoblikujemo v bodisi $2^{x+1} = -x^2 + 2$ bodisi v $2^{x+1} - 2 = -x^2$.





Na levi sliki je primer slike prve preoblikovane enačbe, na desni sliki pa primer druge preoblikovane slike. V obeh primerih opazimo, da imata grafa dve presečišči z abscisama $x_1 = -1$ in $x_2 = 0$, ki sta rešitvi naše enačbe. Premisli, zakaj ni drugih presečišč. ■

Naloge:

1. Izračunaj a in dopolni naslednjo tabelo:

x	-1		$-\frac{3}{8}$			$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
a^x	$\frac{256}{81}$	$\frac{16}{9}$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		

2. Poišči osnovo a eksponentne funkcije $f(x) = a^x$, če je:

   (a) $f(3) = 64$ (b) $f(2) = 36$ (c) $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{27}$ (č) $f(-\frac{5}{4}) = \frac{1}{32}$

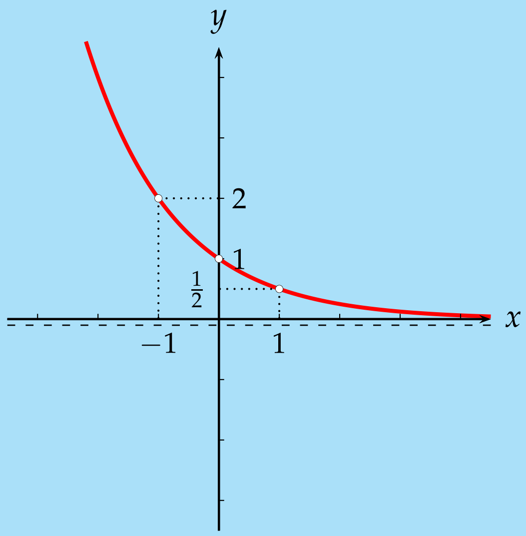
   (d) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{11}$ (e) $f(-\frac{2}{3}) = \frac{9}{4}$

3. Skiciraj grafe naslednjih eksponentnih funkcij v danih intervalih:

   a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ c) $y = 2 \cdot 3^x$ č) $y = 2^x - 2$

4. Načrtaj graf funkcije $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} - 1$ in grafe funkcij $g(x) = f(|x|)$, $h(x) = |f(x)|$, $k(x) = |f(|x|)|$.

5. Na spodnji sliki je narisan graf funkcije $f(x) = a^x$.



(a) Izračunaj konstanto a.

(b) Graf funkcije premaknemo za -2 v smeri osi x in -1 v smeri osi y. Dobljeni graf je graf funkcije $y = g(x)$. Nariši graf funkcije g in zapiši njeno enačbo.

(c) Izračunaj presečišča grafa funkcije g s koordinatnima osema.

Dodatek:

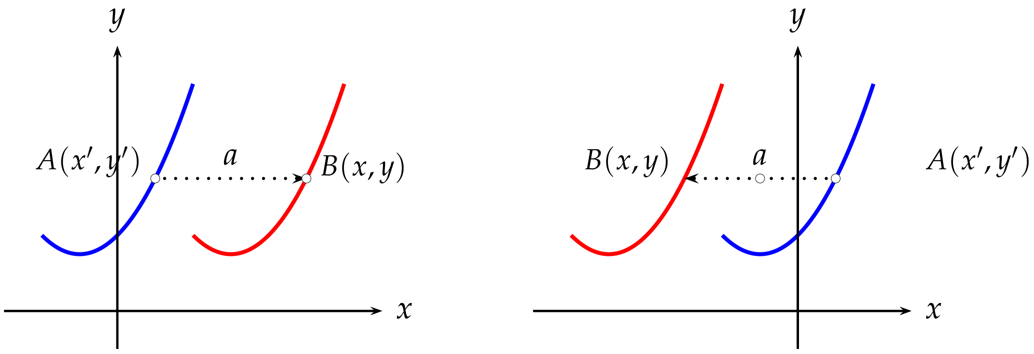
Premiki in raztegi grafa funkcije

Premik v smeri osi x

Imejmo v koordinatni ravnini graf funkcije $y = f(x)$. Premaknemo ga v smeri osi za pozitivno število a v desno ali levo, kot je prikazano na spodnjih slikah:

Zanima nas enačba funkcije, ki jo predstavlja premaknjeni graf. Recimo, da je iskana enačba $y = g(x)$. Obdelajmo najprej premik v desno. Vzemimo poljubno točko A na grafu funkcije $y = f(x)$. Njeni koordinati naj bosta A(x', y'). Ker točka leži na grafu funkcije, njeni koordinati ustrezata enačbi funkcije, torej $y' = f(x')$. Premik v smeri osi x premakne točko A v točko B(x, y) na grafu funkcije $y = g(x)$. Med koordinatami točk A in B očitno veljata zvezi: $x' = x - a$ in $y' = y$. Zato je $g(x) = y = y' = f(x') = f(x - a)$ in tako $g(x) = f(x - a)$.

V primeru premika funkcije v levo je $x' = x + a$ in $y' = y$. Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem primeru in dobimo $g(x) = f(x + a)$.



Slika 1: Pomik grafa v smeri abscisne osi (desno - levo)

Povzemimo: Če premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a vzdolž abscisne osi

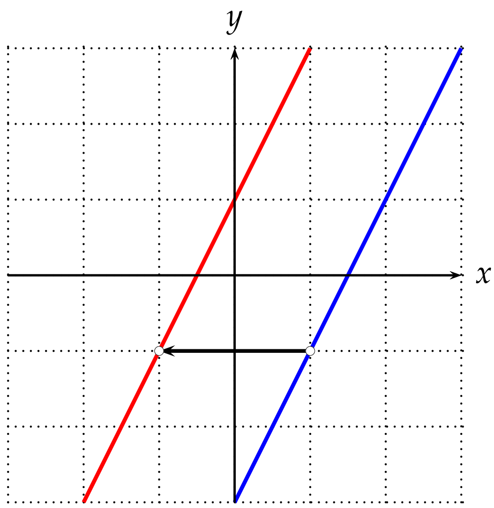
premik v smeri osi x

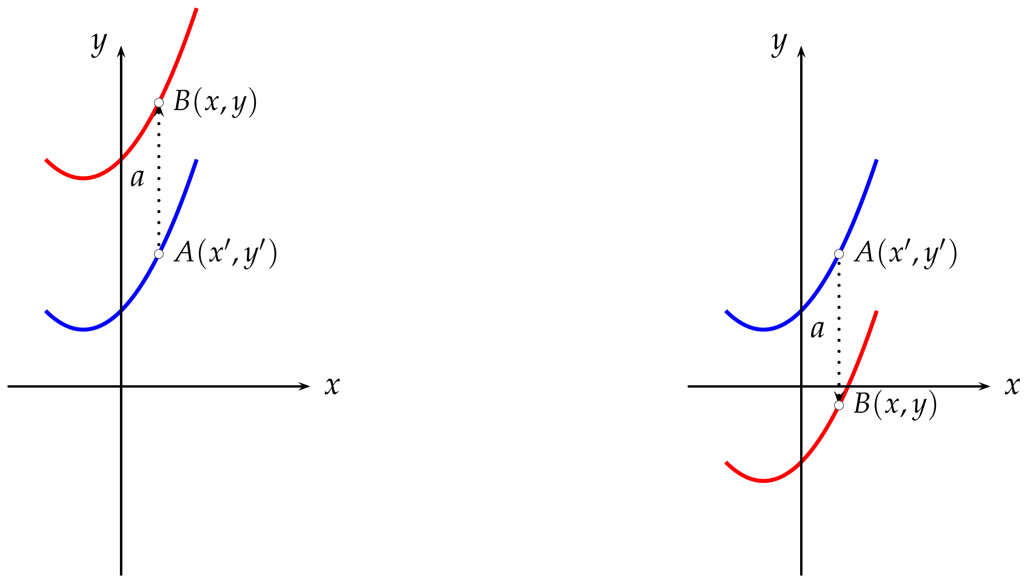
v desno, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x - a)$

v levo, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x + a)$

Zgled 13: Zapiši enačbo funkcije $y = g(x)$, če njen graf dobimo tako, da premaknemo graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ za dve enoti v levo.

Uporabimo zadnje ugotovitve. Ker imamo premik v levo, je $g(x) = f(x+2) = 2(x+2) - 3 = 2x + 1$. Prikažimo še s sliko:





Slika 2: Premik v smeri ordinatne osi (navzgor - navzdol)

Premik v smeri osi y

V tem primeru premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a v smeri ordinatne osi y, enkrat navzgor, drugič navzdol tako, kot je prikazano na spodnjih slikah:

Tako kot v primeru premika v smeri osi x, nas tudi v tem primeru zanima enačba funkcije, ki jo predstavlja premaknjeni graf. Recimo, da je iskana enačba $y = g(x)$. Najprej premik v navzgor. Vzemimo poljubno točko $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$. Premik v smeri osi y premakne točko A v točko $B(x, y)$ na grafu funkcije $y = g(x)$. Med koordinatami točk očitno veljata zvezi: $x = x'$ in $y = y' + a$. Potem je $g(x) = y = y' + a = f(x') + a = f(x) + a$. Zato je $g(x) = f(x) + a$.

V primeru premika funkcije navzdol je $x = x'$ in $y = y - a$. Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem primeru in dobimo $g(x) = f(x) - a$.

Povzemimo: Če premaknemo graf funkcije $y = f(x)$ za pozitivno število a vzdolž abscisne osi

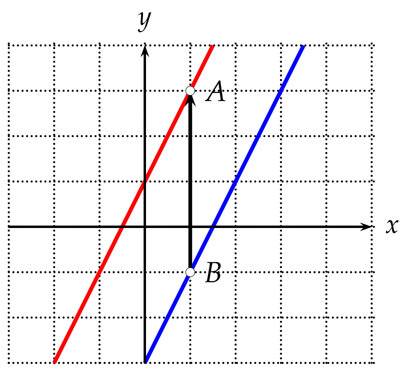
premik v smeri osi y

navzgor, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x) + a$

navzdol, ima premaknjen graf enačbo $y = g(x) = f(x) - a$

Zgled 14: Zapiši enačbo vzporednice k premici z enačbo $y = 2x - 3$, ki poteka skozi točko $A(1, 3)$.

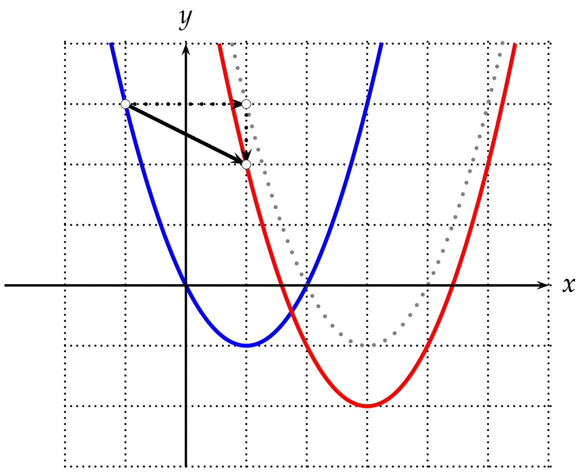
V poglavju o premici (1./2.letnik) smo tako nalogo rešili ugnali tako, da smo ugotovili, da je smerni koeficient vzporedne premice enak smernemu koeficientu dane premice ($k = 2$), začetno vrednost n pa smo izračunali z dano točko $A:\ n = y_1 - kx_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Torej je enačba iskane premice $y = 2x + 1$.



Enak rezultat dobimo tudi tako, da dano premico vzporedno premaknemo skozi točko A. V ta namen poiščemo na dani premici točko B, ki ima isto absciso kot točka A. Kratek račun $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ pove, da je ordinata točke B enaka -1. Torej smo premico premaknili v smeri osi y za $3 - (-1) = 4$ navzgor, zato je enačba vzporednice $y = (2x - 3) + 4 = 2x + 1$. Opisano je prikazano na gornji sliki. ■

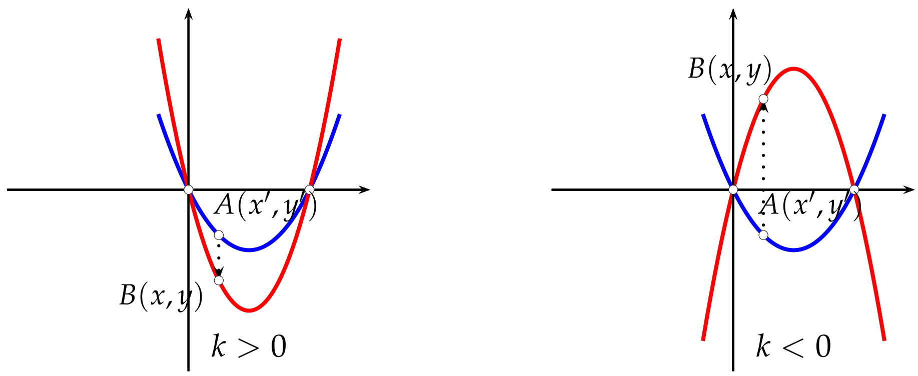
Zgled 15: Zapiši enačbo funkcije $y = g(x)$, katere graf dobimo, ko premaknemo graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 2x$ za 2 v desno v smeri x osi in za 1 navzdol v smeri y osi.

Premik v smeri osi x nam da funkcijo $y = (x-2)^2 - 2(x-2)$, na tej funkciji pa pomik za dve navzdol da funkcijo $g(x) = (x-2)^2 - 2(x-2) - 1$ ali po ureditvi $g(x) = x^2 - 6x + 7$. Še slika:



Razteg v smeri osi y

Recimo, da smo ordinato y' vsake točke $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$ pomnožili s faktorjem k. Tako dobimo novi graf, ki ga sestavljajo točke $B(x, y)$, kjer je $x = x'$ in $y = k \cdot y'$. Opisano operacijo imenujemo **razteg grafa funkcije s faktorjem** k v smeri osi y in zanima nas, kako se enačba $y = g(x)$ novega grafa izraža z enačbo $y = f(x)$ starega grafa.



Slika 3: Razteg s faktorjem k v smeri ordinatne osi

Ker je $x = x', y = ky'$, je iskana enačba: $g(x) = y = ky' = kf(x') = kf(x)$, torej:

razteg v smeri osi y

$$\boxed{g(x) = kf(x)}$$

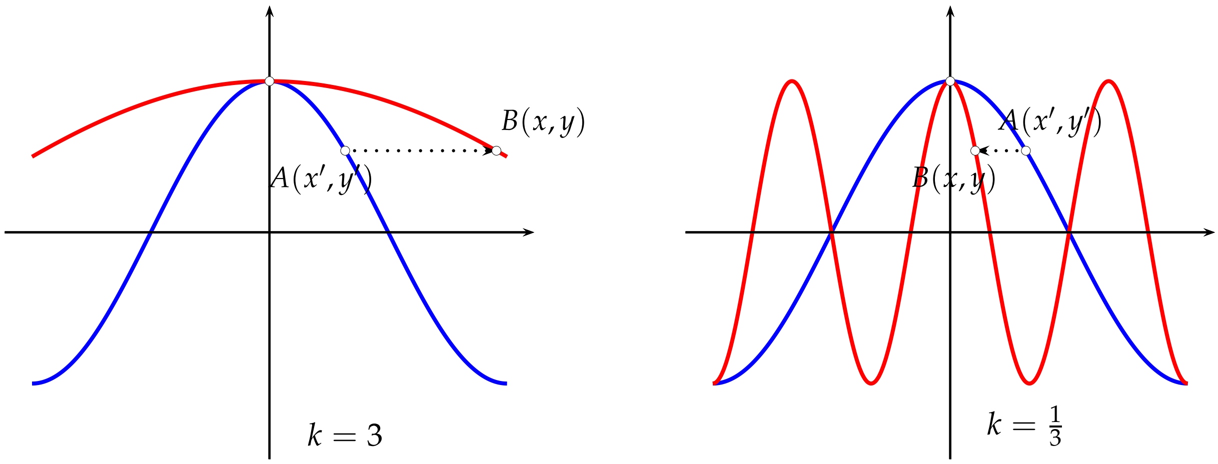
Dodajmo še, da postane razteg v primeru, ko je $k = -1$, zrcaljenje preko osi x in, da so ničle obeh, funkcije $f(x)$ in njenega raztega $g(x) = kf(x)$, enake.

Zgled 16: Zapiši enačbo funkcije, katere graf dobimo, ko graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ premaknemo za 2 v desno in raztegnemo s faktorjem -2 v smeri osi y.

Premik za 2 v desno spremeni funkcijski predpis iz $y = 2x - 3$ v predpis $y = 2(x - 2) - 3 = 2x - 7$, razteg za -2 v smeri osi y pa ta predpis prevede v predpis $y = -2(2x - 7) = -4x + 14$. Torej je iskana enačba funkcije $y = -4x + 14$. ■

Razteg v smeri osi x

Vzemimo, da absciso x' vsake točke $A(x', y')$ na grafu funkcije $y = f(x)$ pomnožimo s faktorjem k, ordinato y' točke pa ohranimo. Tako dobimo nov graf, ki ga sestavljajo točke $B(x, y)$, kjer je $x = k \cdot x'$ in $y = y'$. Opisano operacijo imenujemo **razteg grafa funkcije s faktorjem** k v smeri osi x. Zanima nas, kako se enačba $y = g(x)$ novega grafa izraža z enačbo $y = f(x)$ starega grafa.



Slika 4: Razteg s faktorjem k v smeri abscisne osi

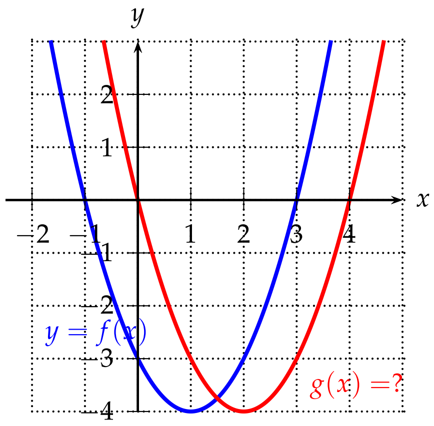
Izrazimo še enačbo novega grafa z enačbo starega grafa. Ker je $x = k \cdot x'$, $y = y'$ in $y' = f(x')$, je $g(x) = y = y' = f(x') = f(\frac{x}{k})$. Torej je enačba, v smeri osi x, s faktorjem k raztegnjenega grafa:

$$\boxed{g(x) = f(\frac{x}{k})}$$

Zgled 17: V vsaki od naslednjih nalog je na sliki narisan graf funkcije $y = f(x)$. Poleg je narisan graf, ki smo ga dobili z vzporednim premikom ali raztegom v smeri x ali y osi. Ta graf ima enačbo $y = g(x)$. Naša naloga je zapisati enačbo grafa funkcije g z enačbo funkcije f. Rezultate preverimo še na drug način, če vemo, da so na slikah grafi kvadratnih funkcij.

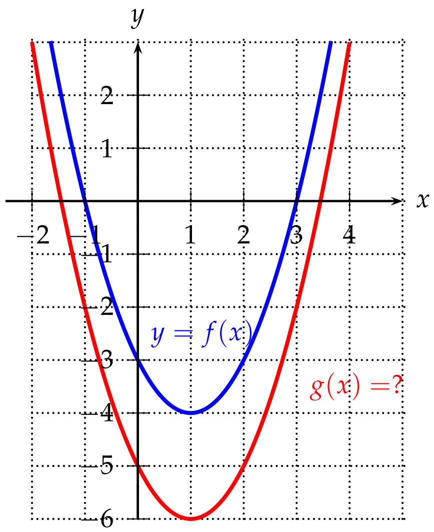
Grafa sta vzporedna v smeri osi x (za 1 v desno), zato je $g(x) = f(x-1)$.

Še drug način: če sta oba grafa kvadratni paraboli, je enačba prve $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$ enačba druge pa $g(x) = x(x-4) = x^2 - 4x = (x-1)^2 - 2(x-1) - 3 = f(x-1)$.

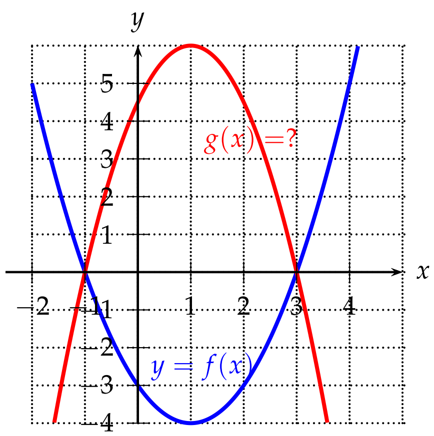


Grafa sta vzporedna v smeri osi y. Zato je $g(x) = f(x) - 2$. Tako kot v zgornjem primeru (in tudi v v vseh ostalih primerih) je $f(x) = x^2 - 2x - 3$, zato je $g(x) = x^2 - 2x - 5$.

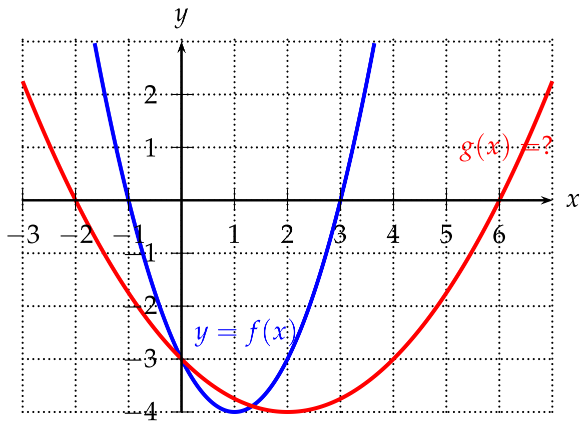
Enačbo funkcije g poiščimo tudi tako, da iz slike ugotovimo teme $T(1, -6)$ in začetno vrednost $g(0) = -5$. Zato je $g(x) = a(x-1)^2 - 6$, vodilni koeficient pa izračunamo iz enačbe $g(0) = a(0-1)^2 - 6 = -5 \Rightarrow a = 1$. Zato je $g(x) = x^2 - 2x - 5$.



Oba grafa imata skupni ničli, zato sklepamo, da imamo razteg v smeri osi y. Faktor raztega preberemo iz ustreznih točk, npr. $(1, -4) \to (1, 6) \Rightarrow k = 6/(-4) = -3/2$, zato je $g(x) = -\frac{3}{2} f(x)$. S predpostavko, da so narisani grafi kvadratnih funkcij, je $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + 4\frac{1}{2}$.

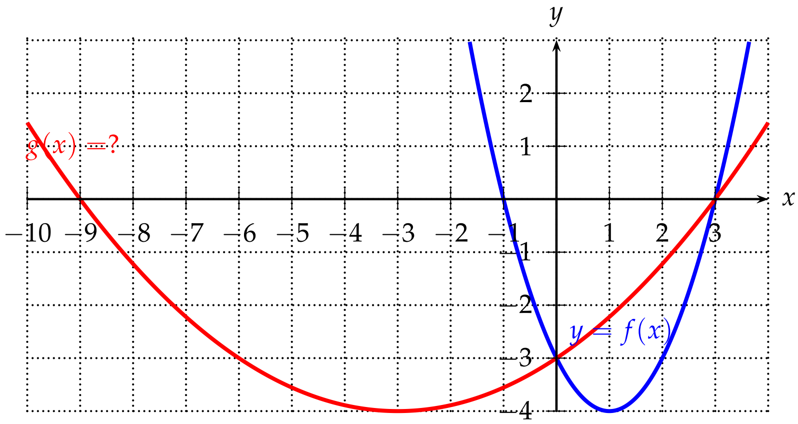


Oba grafa imata isto začetno vrednost. Zato sklepamo, da gre za razteg v smeri osi x. Izberimo ustrezni točki, npr. $(1, -4) \to (2, -4)$, zato je faktor raztega v smeri osi x enak: $k = x/x' = 2/1 = 2$. Zato je enačba raztegnjenega grafa $g(x) = f(\frac{x}{2})$ ali: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ in $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - x - 3$.



Spet imamo razteg v smeri osi x (razteg v smeri osi y ohranja <u>vse</u> ničle). Poiščemo ustrezni točki, npr. $(1, -4) \to (-3, -4)$ in koeficient raztega $k = x/x' = -3/1 = -3$; iskana enačba je potem

$$g(x) = f(-\frac{x}{3}).$$



4 Logaritem. Definicija in pravila

Logaritemska funkcija je **inverzna** funkcija eksponentne funkcije $f(x) = a^x$. Učili smo se, da enačbo inverzne funkcije v implicitnem zapisu dobimo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk x in y. Zato je **implicitni** zapis logaritemske funkcije $x = a^y$, za njen **eksplicitni** zapis pa vpeljemo novo oznako $\log_a$. Tako dobimo $f^{-1}(x) = y = \log_a x$. Pri tem število a imenujemo osnova logaritma, x logaritmand in y logaritem, torej:

$$\underbrace{y}_{\text{logaritem}} = \log_{\underbrace{a}_{\text{osnova}}} \overbrace{x}^{\text{logaritmand}}$$

Posebni osnovi sta $a = 10$ in $a = e = 2.71828182845904523536028747135 27\ldots$ (neskončno, neperiodično decimalno število, podobno kot π). V prvem primeru nastali logaritem imenujemo **desetiški** ali **Briggsov** in ga označimo z log, torej brez zapisane osnove, v drugem primeru pa imenujemo nastali logaritem **naravni** ali **Napierjev** in ga označimo z $\ln x$ (možni sta tudi oznaki lg za desetiški logaritem in log za naravni logaritem).

Pomembnost logaritmov se skriva v pravilih, ki veljajo za računanje z njimi. Prvo pravilo sledi neposredno iz definicije logaritma:

prehod med implicitno eksplicitno obliko

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

Oglejmo si nekaj primerov uporabe prehoda.

Zgled 18: Izračunaj $\log_4 8$.

Vzemimo, da je $x = \log_4 8$. Eksplicitni zapis spremenimo v implicitnega: $4^x = 8$, v njem pa ugledamo eksponentno enačbo, ki jo preoblikujemo na enako osnovo: $2^{2x} = 2^3$, iz te oblike pa poiščemo rešitev $x = \frac{3}{2}$. Torej je $\log_4 8 = \frac{3}{2}$. ■

Tudi kako enačbo lahko rešimo z uporabo prehoda, recimo:

Zgled 19: Izračunaj osnovo a logaritemske funkcije $y = \log_a x$, če njen graf vsebuje točko $A(4, -\frac{2}{3})$.

Ker točka A leži na grafu, je $-\frac{2}{3} = \log_a 4$. Zadnji zapis spremenimo v implicitni zapis in od tam poiščemo a: $a^{-\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow a = 4^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^{-3} = \frac{1}{8}$ ■

Enačbo rešujemo tudi v naslednjem primeru:

Zgled 20: Točka $A(x, -\frac{2}{3})$ leži na grafu funkcije $y = \log_8 x$. Izračunaj njeno absciso.

Enačbo $\log_8 x = -\frac{2}{3}$ preoblikujemo v $x = 8^{-\frac{2}{3}}$ in zapišemo $x = (\sqrt[3]{8})^{-2} = \frac{1}{4}$. ■

Ker sta eksponentna $y = a^x$ in logaritemska funkcija $y = \log_a x$ druga drugi inverzni funkciji, veljata, z malo spremenjenimi oznakami, naslednji pravili:

$$\boxed{\log_a a^b = b \qquad a^{\log_a b} = b}$$

Tako je $\log_2 2^\pi = \pi$ in $e^{\ln 3} = 3$. Če v zadnjih pravilih uporabimo $b = 1$ in $b = -1$, dobimo:

$$\boxed{\log_a a = 1 \qquad \log_a a^{-1} = \log_a \frac{1}{a} = -1}$$

Uporabimo še dejstvo, da je $a^x = 1$ le v primeru, ko je $x = 0$, pa dobimo, da je:

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Vzemimo, da je $y_1 = \log_a x_1$ in $y_2 = \log_a x_2$. Ustrezna implicitna zapisa $a^{y_1} = x_1$ in $a^{y_2} = x_2$ zmnožimo. Dobimo $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$. Dobljeno enačbo $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1+y_2}$ zapišimo v eksplicitni obliki $y_1 + y_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2)$, odtod pa dobimo prvo pravilo logaritmiranja $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2)$.

Če enačbi $a^{y_1} = x_1$ in $a^{y_2} = x_2$ delimo, dobimo $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1-y_2}$. Eksplicitni zapis dobljene enačbe postreže z drugim pravilom $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$:

Če v pravilu $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2)$ zapišemo $x_1 = x_2 = x$, dobimo $\log_a x + \log_a x = \log_a(x \cdot x)$ ali $\log_a x^2 = 2\log_a x$. Še enkrat uporabimo pravilo za vsoto dveh logaritmov tako, da izberemo $x_1 = x^2$, $x_2 = x$. Dobimo $\log_a x^3 = 3\log_a x$. Na podlagi zadnjih ugotovitev sklepamo, da potenco logaritmiramo tako, da stopnjo (eksponent) potence pomnožimo z logaritmom stopnje, torej $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$. Dodajmo, da zadnje pravilo velja tudi za potenco s poljubno stopnjo, ne le celoštevilčno. Utemeljitev te trditve je za naše znanje zaenkrat prezahtevna.

Ker koren $\sqrt[y]{x}$ lahko zapišemo v obliki potence $\sqrt[y]{x} = x^{\frac{1}{y}}$, lahko zapišemo malo spremenjeno zadnje pravilo tudi za logaritem korena: $\log_a \sqrt[y]{x} = \dfrac{1}{y}\log_a x$.

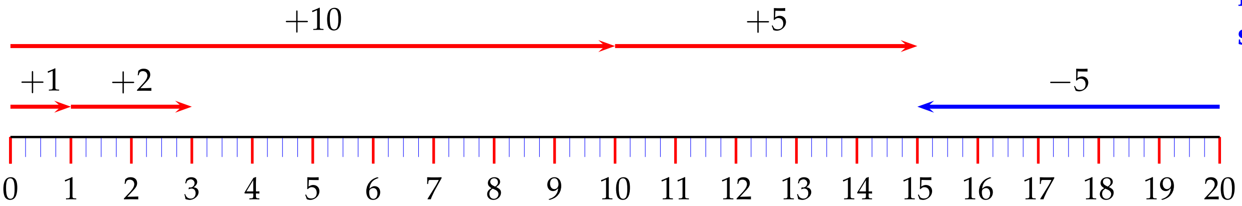
pravila logaritmi= ranja

$$\boxed{\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 \cdot x_2) \qquad y \cdot \log_a x = \log_a x^y}$$

$$\boxed{\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \qquad \frac{1}{y}\log_a x = \log_a \sqrt[y]{x}}$$

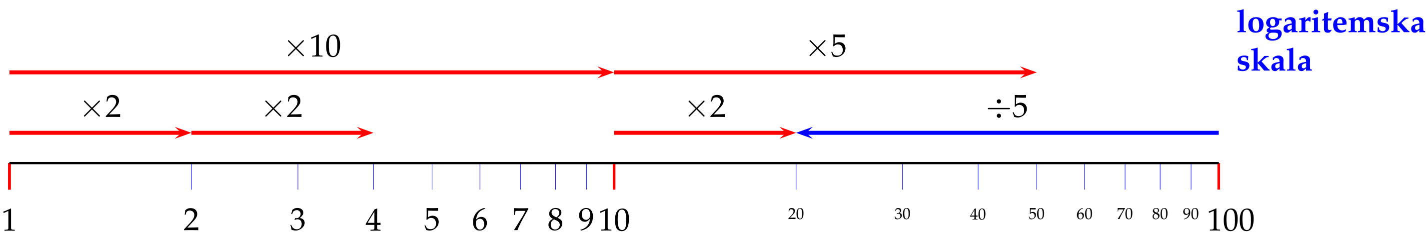
Pravila logaritmiranja so pomembna, ker "težje" računske operacije spremenijo v "lažje", torej množenje spremenijo v seštevanje, deljenje v odštevanje, potenciranje v množenje in korenjenje v deljenje. Pomebnost pravil so izkoristili že zgodaj po "izumu" logaritmov. Logaritme sta v začetku 17. stoletja "izumila" škotski plemič John Napier (naravni logaritmi z osnovo e) in profesor oxfordske univerze Henry Briggs (desetiški logaritmi z osnovo 10). Proučevale sta dve vrsti številskih premic. Prva je običajna številska premica, katere umeritev imenujemo linearna skala.

linearna skala



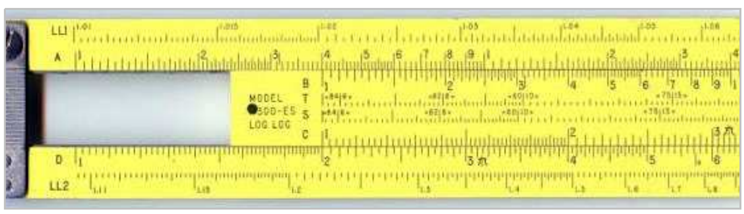
Na tej premici izberemo točko in ji priredimo število 0. Desno od za 0 izbrane točke izberemo še eno izbrano točko, ki ji priredimo število 1. Daljici med izbranima točkama pravimo enotska daljica. Ostala naravna števila predstavljajo točke desno od izbrane, in sicer tako, da sta dve zaporedni naravni števili na tej skali medseboj oddaljeni za enotsko daljico. Ko enotsko daljico ali njene večkratnike prenašamo v desno po skali prištevamo ustrezno število, če jo prenašamo na levo stran pa po skali odštevamo. Pri tem enako dolge daljice pomenijo prištevanje ali odštevanje enakih števil.

Na številski premici z logaritemsko skalo z osnovo 10 izbrani točki priredimo število 1, desno od nje pa izberemo točko, ki predstavlja število 10. Daljica med izbranima točkama je enotska daljica. Daljica, ki ima dolžino enotske daljice, pomeni na logaritemski skali množenje z 10, dvojna taka daljica pomeni množenje s 100, trojna s 1000, torej daljica z n kratno dolžino enotske daljice pomeni množenje s potenca 10^n. Če točke z ustreznimi daljicami premikamo v desno nam to pomeni množenje z ustreznim številom, če premikamo v levo pa deljenje.



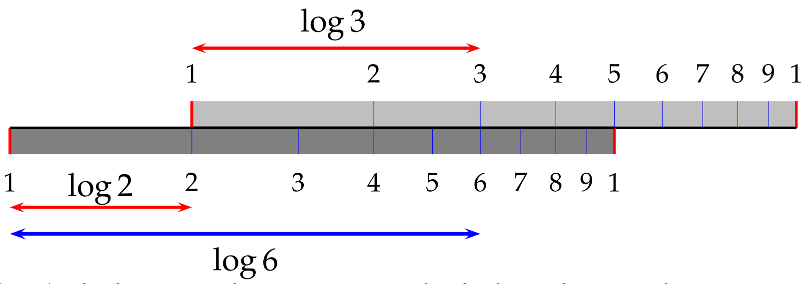
Točko, ki pripada naravnemu številu k dobimo tako, da od začetne točke 1 odmerimo daljico z dolžino x, kjer x ustreza enačbi $10^x = k$. Če zadnjo enačbo preoblikujemo v eksplicitni zapis logaritma, dobimo $x = \log_{10} k = \log k$. Tako točko za naravno število 2 dobimo tako, da točko 1 premaknemo za daljico z dolžino $\log 2 \doteq 0.301$, točko, ki predstavlja število 20 dobimo bodisi tako, da točko 10 premaknemo za isto daljico (torej z dolžino $\log 2$), bodisi tako, da točko 1 premaknemo za daljico z dolžino $\log 20$. Da v obeh primerih dobimo isto točko uvidimo s pravili logaritmiranja, saj je $\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1 = 1 + \log 2$.

Nekaj let po odkritju logaritmov in pravil je, prav tako britanski matematik, William Oughtred že uporabil logaritemska pravila za preprosti računski stroj, ki mu danes pravimo logaritemsko računalo (ang. slide rule, nem. Rächeschieber = "rehnšiber"). Na naslednji sliki je primer logaritemskega računala



Logaritemska računala so uporabljali do približno 1970, ko so razvili prvo žepno računalo, Hewlett-Packardov HP-35. Kot zanimivost dodajmo, da so tudi vesoljske misije Apollo, vključno z Apollo 11, ki je prva pristala na Luni, uporabljale logaritmična računala.

Običajno je logaritemsko računalo sestavljeno iz treh vpetih, z logaritemskimi skalami umerjenih tračnih letev in drsečega okvirja. Srednja letev in okvir sta gibljiva. Na podnji sliki je prikaz množenja $2 \cdot 3 = 6$ z dvema logaritmičnima skalama računala. Zgornja skala je gibljiva.



Na zgornji (gibljivi) skali premaknemo začetek skale 1 do oznake za 2 na spodnji skali. Na premaknjeni zgornji skali poiščemo oznako za 3 in pogledamo nad katero oznako nad spodnjo skalo se nahaja ta oznaka. Opazimo, da se to zgodi nad oznako 6. Tako smo na računalu ugotovili, da je $2 \cdot 3 = 6$. Utemeljitev najdemo, da je vsota daljic z dolžinama $\log 2$ in $\log 3$ enaka daljici z dolžino $\log 6$, saj velja $\log 2 + \log 3 = \log(2 \cdot 3) = \log 6$.

Poleg logaritemskih računal, so pri računanju uporabljali logaritemske tabele ali logaritmovnik. V današnjih časih logaritme računamo z žepnimi računalniki, računalniki, pa tudi z boljšimi prenosnimi telefoni.

Če danes izračunamo z računalnikom, da je, recimo

$$\log 11.25 = 1{,}0511525224473812889488391223368$$

so to v prejšnjih časih poiskali v logaritmovniku, seveda pa ne na toliko decimalnih mest. Za primer: Vegov logaritmovnik [1] je imel natančnost osmih decimalnih mest.

Na začetku poglavja o logaritmih smo iskali rešitev enačbe $2^x = 3$. Z sedanjim znanjem o logaritmih enačbo lahko zapišemo v eksplicitni obliki: $x = \log_2 3$. Problem nastopi, ker (v tem trenutku) večina žepnih računalnikov računa logaritme z osnovo e ali z osnovo 10. Zagato rešimo tako, da logaritem z osnovo izrazimo z logaritmi, ki imajo drugo osnovo. To storimo takole: levo in desno stran logaritmiramo z logaritmom, ki ima osnovo a: $\log_a 2^x = \log_a 3$, uporabimo pravilo o logaritmu potence: $x \cdot \log_a 2 = \log_a 3$, odtod pa izračunamo x:

$$x = \log_2 3 = \frac{\log_a 3}{\log_a 2}$$

[1] Jurij Vega, slovenski matematik, 1754-1802

Če bi za osnovo izbrali $a = 10$, bi dobili

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849625007211561814537389439478 \doteq 1.585$$

Kar smo ugotovili zgoraj v posebnem primeru, zapišemo splošno, s še enim pravilom, pravilom **prehoda logaritma na novo osnovo**:

prehod na novo osnovo

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Razdelek zaključimo z nekaj primeri. Vse primere rešujemo brez uporabe računala.

Zgled 21: Izračunaj $\log 200 - \log 21 + \log 105$.

Uporabimo pravila o odštevanje, seštevanje logaritmov in pravilo o logaritmu potence: $\log 200 - \log 21 + \log 105 = \log \frac{200}{21} + \log 106 = \log \frac{200}{21} \cdot 105 = \log 1000 = \log 10^3 = 3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3.$ ■

Zgled 22: Izračunaj vrednost izraza $\log_a a^2 + \log_b 1 - \log_c \frac{1}{c} + 3\log_d \sqrt[6]{d}$, pri čemer so a, b, c in d pozitivna realna števila, različna od 1.

Ker je $\log_a a^2 = 2\log_a a = 2$, $\log_b 1 = 0$, $\log_c \frac{1}{c} = \log_c c^{-1} = -1 \cdot \log_c c = -1$ in $\log_d \sqrt[6]{d} = \log_d d^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \log_d d = \frac{1}{6}$, je $\log_a a^2 + \log_b 1 - \log_c \frac{1}{c} + 3\log_d \sqrt[6]{d} = 2 + 0 - (-1) + 3 \cdot \frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}$ ■

Zgled 23: Izračunaj točno vrednost izraza $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} \right)$.

1.način: Poračunamo logaritmand $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^4 \cdot a^3}{a^6}} = \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}}$. Potem je $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} \right) = \log_a a^{\frac{1}{12}} = \frac{1}{12} \log_a a = \frac{1}{12}$.

2.način: Uporabimo pravila logaritmiranja: $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} \right) = \log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt[4]{a} - \log_a \sqrt{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ ■

Zgled 24: Izračunaj $\log_4 48 - \log_2 \sqrt{3}$.

Izberemo skupno osnovo. Ker lahko obe osnovi zapišemo kot potenci z osnovo 2, izberemo osnovo 2. Potem je: $\log_4 48 = \dfrac{\log_2 48}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 48}{2\log_2 2} = \dfrac{\log_2 48}{2}$. Zato in, ker je $16 = 2^4$, je: $\log_4 48 - \log_2 \sqrt{3} = \frac{\log_2 48}{2} - \frac{\log_2 3}{2} = \frac{\log_2 \frac{48}{3}}{2} = \frac{\log_2 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ■

5 Logaritemske enačbe

Logaritemska imenujemo enačbo, ki ima neznanko bodisi v logaritmandu logaritma, recimo $\log_2 x + 3\log_4 x = 10$, bodisi v osnovi logaritma, recimo $\log_{x-1} 4 = 2$, bodisi v osnovi in logaritmandu, recimo $\log_{3x-4}(x+2) = 2$. Pri reševanju moramo paziti, da morata biti logaritmand in osnova pozitivni realni števili, pa še, da osnova 1 nima smisla. Reševali bomo le najpreprostejše logaritemske enačbe, ki jih bomo razdelili v dva tipa:

V **prvem tipu** so enačbe, ki vsebujejo člene z logaritmi z enako osnovo in števili. V členih z logaritmi je v logartmandih neznanka. Enačbo s pravili preoblikujemo v enačbo oblike

prvi tip enačbe

$$\boxed{\log_a f(x) = b}$$

Enačbo s spremenimo v implicitno obliko logaritma, torej v enačbo $f(x) = a^b$ in poskušamo rešiti nastalo enačbo. Pri dobljenih rešitvah moramo paziti, da so logaritmandi pozitivni.

V **drugem tipu** so enačbe, ki vsebujejo samo logaritme z isto osnovo in neznanko v logaritmandih. S pravili enačbo preoblikujemo v enačbo oblike

drugi tip enačbe

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

Rešitve enačbe so potem skrite v množici rešitev enačbe $f(x) = g(x)$. Pri dobljenih rešitvah moramo paziti, da je so logaritmandi pozitivni, kar preverimo tako, da bodisi rešimo sistem neenačb ali pa, kar običajno tudi napravimo, preverimo ustreznost dobljenih rešitev.

Zgled 25: **Reši enačbo** $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$**.**

Enačba je prvega tipa. Prehod v implicitno obliko dá kvadratno enačbo $x^2 - 11x + 43 = 5^2$, ki po ureditvi postane $x^2 - 11x + 18 = (x-9)(x-2) = 0$. Odtod pa že preberemo rešitvi $x_1 = 9$ in $x_2 = 2$. Rešitvi preverimo tako, da bodisi na začetku reševanja zapišemo pogoj za pozitivnost logaritmanda, torej $x^2 - 11x + 43 > 0$, bodisi rešitvi vstavimo v logaritmand in preverimo pozitivnost. Na oba načina ugotovimo, da obe rešitvi usrezata. $\square$

Zgled 26: **Reši enačbo** $\log\sqrt{75 + 5^x} = 1$**.**

Tudi ta enačba je prvega tipa. Preoblikujemo jo v enačbo $\sqrt{75 + 5^x} = 10$, to v $5^x = 25$. Odtod je rešitev $x = 2$, ki prestane preizkus pozitivnosti logaritmanda. $\blacksquare$

Zgled 27: **Reši enačbo** $\log(x+2) - \log x = 1$**.**

Spet prvi tip. Enačbo preoblikujemo v obliko $\log\frac{x+2}{x} = 1$ in nato v $\frac{x+2}{x} = 10$. Zadnja enačba ima rešitev $x = \frac{2}{9}$, ki tudi prestane preizkus ustreznosti. $\blacksquare$

Zgled 28: **Reši enačbo** $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$**.**

$$\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6 \Rightarrow \log_2(x+14)(x+2) = 6 \Rightarrow x^2 + 16x + 28 = 64 \Rightarrow x^2 + 16x - 36 = 0$$

Odtod dobimo $x_1 = -18$ in $x_2 = 2$. Ustreza le druga rešitev, torej je rešitev enačbe $x = 2$. $\blacksquare$

Zgled 29: **Reši enačbo** $\log(3x-4) - \log(2x-2) = \log(x-12) - \log(3x+2)$**.**

Drugi tip. Če ne želimo deljenj v logaritmandih, prestavimo, člene tako, da bodo na obeh straneh le množenja. Dobimo enačbo $\log(3x-4)+\log(3x+2)=\log(x-12)+\log(2x-2)$ in odtod s pomočjo pravil: $\log(9x^2-6x-8)=\log(2x^2-26x+24)$. "Opustimo" logaritme (učeno pravimo, da antilogaritmiramo) in nastalo kvadratno enačbo najprej uredimo in potem poiščemo rešiteve:

$$7x^2+20x-32=0,\ D=1296 \Rightarrow x_1=\frac{-20+36}{2}=8,\ x_2=\frac{-20-36}{2}=-28$$

Testu pozitivnosti ne ustreza nobena rešitev, torej enačba nima rešitve. ■

Zgled 30: Reši enačbo $\log\sqrt{x}-\log\sqrt{2x-3}=\log\sqrt{2x+3}-\log\sqrt{x}$.

Spet drugi tip. V dani enačbi uporabimo pravilo o logaritmu korena, nastalo enačbo pomnožimo z dve in prestavimo člene tako, da bosta na levi in desni strani enačbe samo vsote. Dobimo enačbo: $2\log x=\log(2x-3)+\log(2x+3)$ in iz te enačbo $\log x^2=\log(4x^2-9)$. Antilogaritmiramo in ugotovimo, da ima dobljena kvadratna enačba rešitvi $x_1=\sqrt{3}$ in $x_2=-\sqrt{3}$. Ustrezna je le prva rešitev $x=\sqrt{3}$. ■

Zgled 31: Reši enačbo $\log_2 x+3\log_4 x=10$.

Enačbo zapišemo z osnovo 2: $\log_2 x+3\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=10$ in odtod sestavimo enačbo: $2\log_2 x+3\log_2 x=20$ ali $\log_2 x=4$ in $x=2^4=16$. Rešitev prenese test pozitivnosti. ■

Zgled 32: Reši enačbo $\log_{3x-4}(x+2)=2$.

Enačba je podoba prvemu tipu, le neznanka je v osnovi. Kljub temu jo rešimo tako, da jo zapišemo v implicitni obliki $(3x-4)^2=x+2$. Dobljena, urejena kvadratna enačba $9x^2-25x+14=0$ ima rešitvi $x_1=2$ in $x_2=\frac{7}{9}$. Ustrezna je le prva rešitev $x=2$. ■

uvedba nove neznanke

Zgled 33: Reši enačbo $\log x^2+\log^{-1} x=3$.

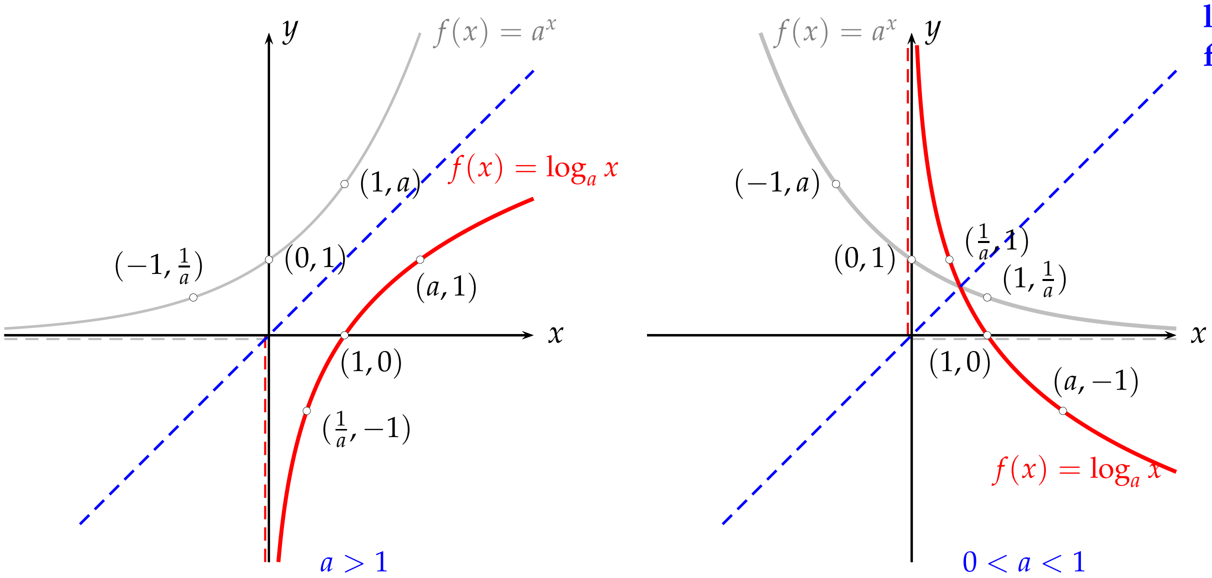
V enačbi izraz $\log^{-1} x$ pomeni krajši zapis izraza $(\log x)^{-1} = \frac{1}{\log x}$. Podobno je zapis $\log_a^k x$ je krajši zapis zapisa $(\log_a x)^k$.

Enačbo preoblikujemo v obliko $2\log x + \dfrac{1}{\log x} = 3$. Ta enačba ne pripada nobenemu od tipov. Ker neznanka x nastopa v enačbi le v obliki $\log x$, vpeljemo novo neznanko $\log x = a$. Z novo neznanko zapisano enačbo $2a + \dfrac{1}{a} = 3$ preoblikujemo v kvadratno enačbo $2a^2 - 3a + 1 = 0$, ki ima rešitvi $a_1 = 2$ in $a_2 = \frac{1}{2}$. Prva rešitev nam da enačbo $\log x = 1$ in $x_1 = 10^1 = 10$, druga rešitev pa enačbo $\log x = \frac{1}{2}$ in $x_2 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$. Oba, x_1 in x_2, sta ustrezna. ■

6 Graf logaritemske funkcije

Iz poglavja o inverzni funkciji poznamo pot, kako dobimo graf inverzne funkcije. Dobimo ga tako, da graf funkcije zrcalimo prek simetrale lihih kvadrantov. Graf logaritemske funkcije torej dobimo tako, da graf ustrezne eksponentne funkcije zrcalimo prek simetrale lihih kvadrantov. Na spodnji sliki smo na levi strani povedano prikazali za $a > 1$, na desni strani pa za $0 < a < 1$.

graf logaritemske funkcije



Iz grafa, nestrogo, kot smo to storili pri eksponentni funkciji, izluščimo osnovne lastnosti logaritemske funkcije:

lastnosti

1. Za $a > 1$ je naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča.
2. Definicijsko območje so pozitivna realna števila ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$), zaloga vrednosti so vsa realna števila($\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$).
3. Začetne vrednosti ni; graf logaritemske funkcije približuje ordinatni osi, ko se vrednost logaritmanda x bliža 0. Pravimo, da ima logaritemska funkcija v $x = 0$ **pol**.
4. Značilne točke logaritemske funkcije so: ničla $(1, 0)$ in točki $(a, 1)$ in $(\frac{1}{a}, -1)$.

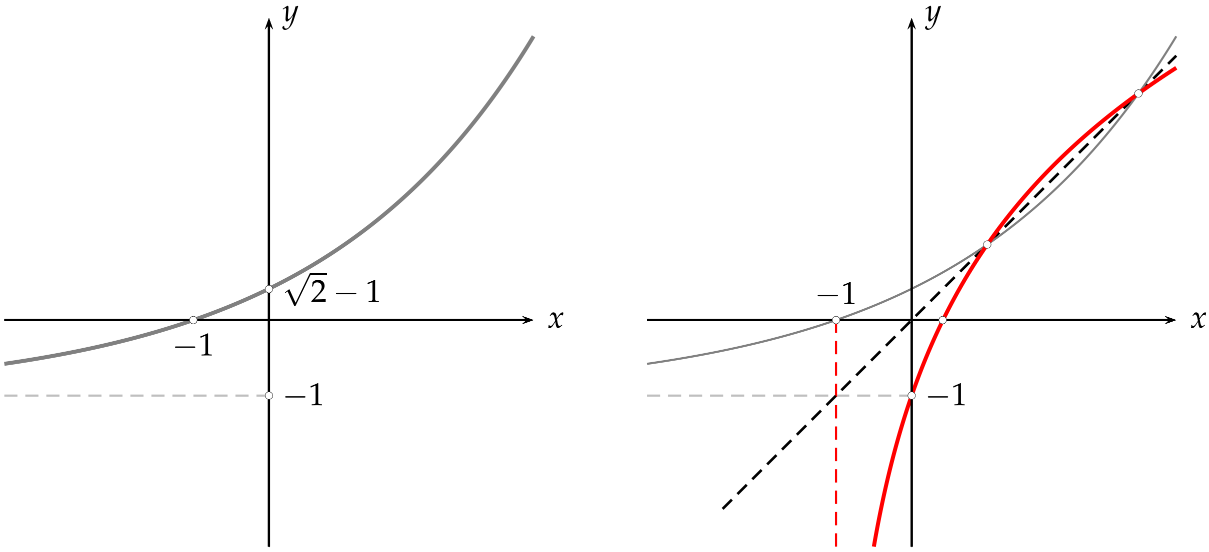
Zgled 34: **Zapiši v eksplicitni obliki enačbo inverzne funkcije k funkciji $g(x) = 2^{\frac{x+1}{2}} - 1$. Obe funkciji tudi nariši.**

Sledimo navodilom, s katerimi poiščemo enačbo inverzne funkcije:

- zamenjamo x in $y = g(x)$: $x = 2^{\frac{y+1}{2}} - 1$,
- osamimo člen s spremenljivko y: $2^{\frac{y+1}{2}} = x + 1$,
- uporabimo prehod v eksplicitno obliko logaritma ($a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$): $\frac{y+1}{2} = \log_2(x+1)$

Zato je $g^{-1}(x) = 2\log_2(x+1) - 1$.

Še sliki:

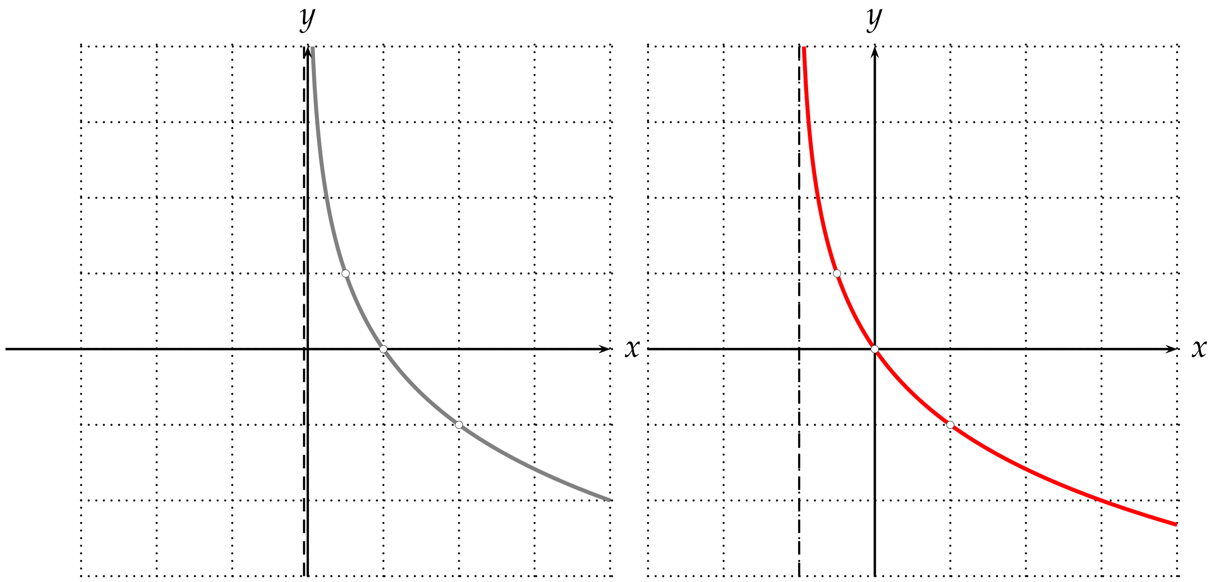


Na kateri od slik je graf funkcije f in na kateri graf inverzne funkcije f^{-1} pa naj ugotovi bralec. ■

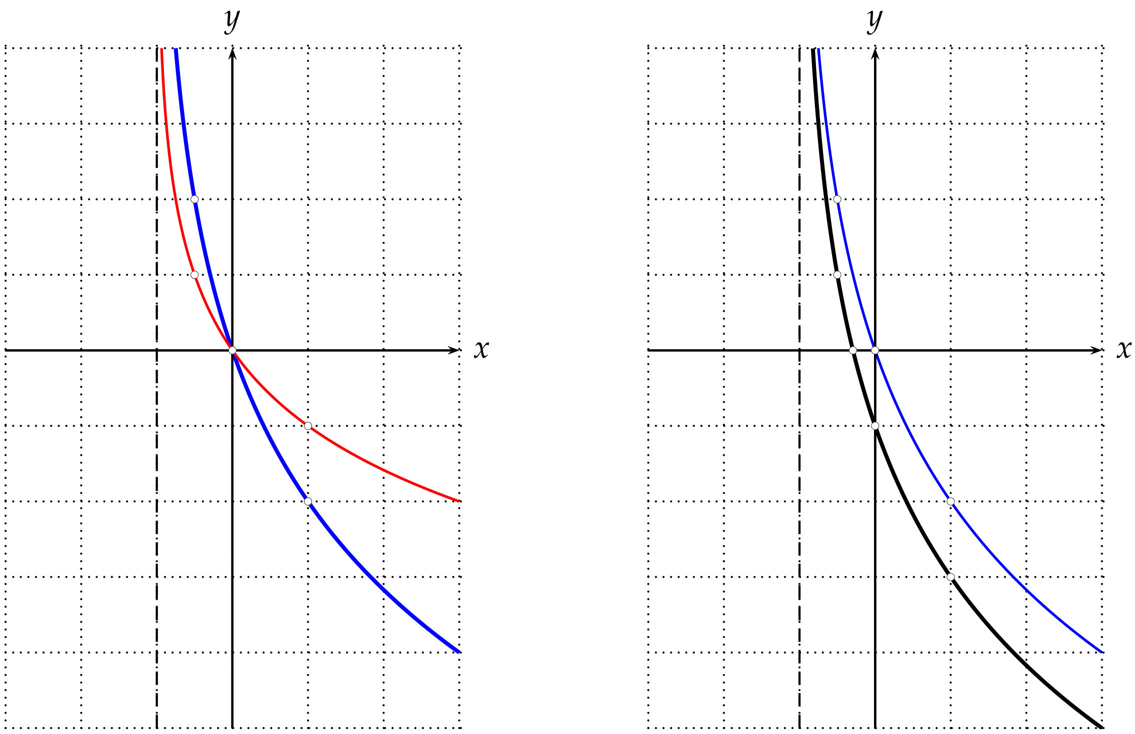
Zgled 35: **1. Naj bo $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$. Nariši njen graf in na njem označi značilne točke : ničlo, začetno vrednost.**

2. Nariši še grafa funkcij $y = |f(x)|$ in $y = f(|x|)$.

Graf bomo narisali s premiki in raztegi. Najprej narišemo graf osnovne funkcije $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ in označimo njegove značilne točke ničlo, vrednost 1 in -1. Graf nato premaknemo za 1 v levo, da dobimo graf funkcije $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

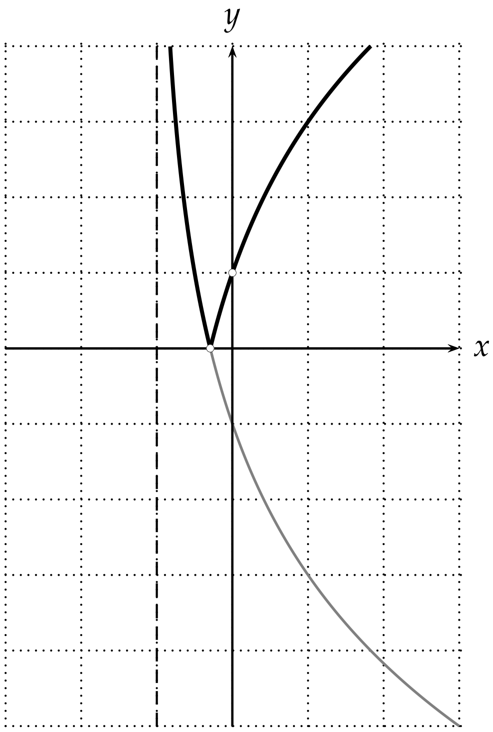


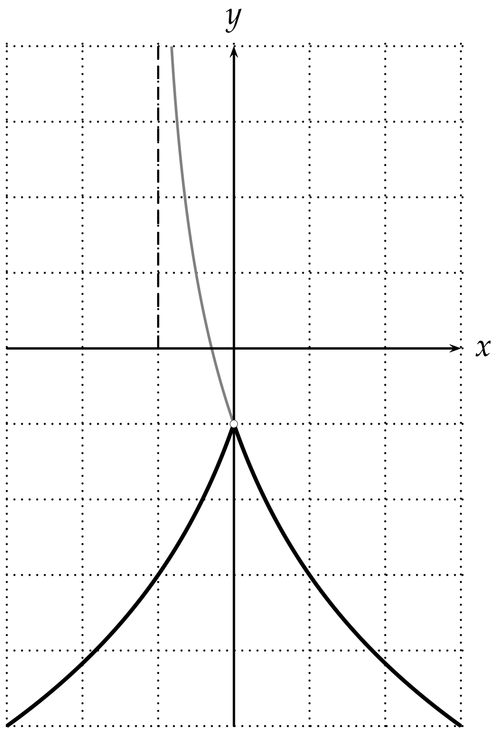
Dobljeni graf (desna gornja slika) raztegnemo s faktorjem 2 v smeri osi y. Tako dobimo graf funkcije $y = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, ki ga še premaknemo za 1 navzdol in tako dobimo iskani graf funkcije $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1$.



Na zadnjem grafu je iskani graf pobarvan v črno. Izračunajmo še ničlo in začetno vrednost. Začetna vrednost funkcije je $f(0) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(0+1) - 1 = -1$, ničlo pa izračunamo iz enačbe $2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1 = 0$, ki jo preoblikujemo v enačbo $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = \frac{1}{2}$. Implicitna oblika te enačbe je $x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Kratek račun na da ničlo $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \doteq -0,293$.

Drugi del naloge rešimo tako, da ustrezni del grafa funkcije f enkrat zrcalimo preko osi x, drugič pa drugi ustrezni del preko osi y. Dobimo naslednji sliki:





Bralec bo sam ugotovil katera slika pripada ustreznemu grafu. ■

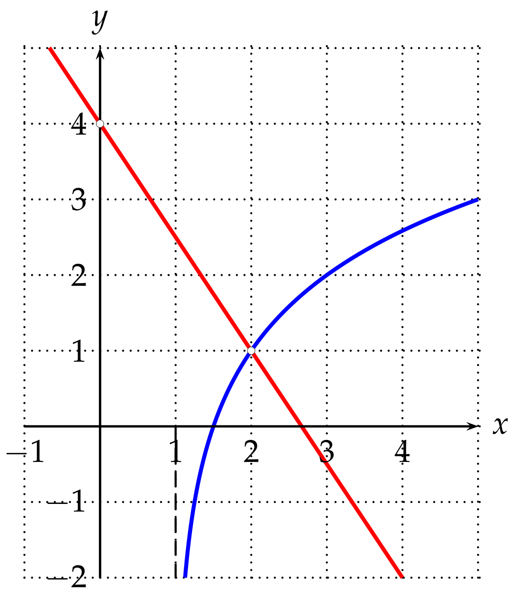
Zgled 36: Grafično reši enačbo $\log_2(x-1) + 1 = -\frac{3}{2}x + 4$. Rešitev preveri z računom.

Grafično enačbo $L(x) = D(x)$ rešujemo tako, da v istem koordinatnem sistemu narišemo grafa funkcij $y = L(x)$ in $y = D(x)$ in nato preberemo abscise presečišč. Običajno so prebrane abscise nenatančne, zato rešitev preverimo še računsko tako, da jih vstavimo v levo in desno stran začetne enačbe in preverimo, če imata isto vrednost.

V našem primeru je $L(x) = \log_2(x-1)+1$ in $D(x) = -\frac{3}{2}x+4$. Prvo funkcijo narišemo s premikom 1 desno in 1 navzgor grafa funkcije $y = \log_2 x$, druga funkcija pa je linearna. Narišemo jo s tabelo

x	0	2
y	4	1

.



Logaritemska funkcija z osnovo 2 je naraščajoča, linearna s smernim koeficientom $-\frac{3}{2}$ padajoča, zato se grafa sekata v le eni točki $P(2,1)$. Rešitev preverimo računsko: $D(2) = \log_2(2-1)+1 = \log_2 1 + 1 = 1$ in $D(2) = -\frac{3}{2}\cdot 2+4 = -3+4 = 1$. Torej je rešitev enačbe $x = 2$. ■

Naloge:

1. Izračunaj naslednje logaritme :

   (a) $\log_2 16,\ \log_3 \sqrt{3},\ \log_3 \frac{1}{81}$ $[4, \frac{1}{4}, -4]$

   (b) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125},\ \log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81},\ \log_3 \frac{1}{\sqrt{100}}$ $[3,\ 4, -\frac{3}{2}]$

2. Reši naslednje logaritemske enačbe:

   (a) $\log_{\frac{1}{27}} x = -\dfrac{2}{3}\ [\dfrac{9}{4}]$, $\log_{81} x = \dfrac{1}{2}\ [9]$ $\log_5 x = 3\ [125]$.

   (b) $\log_x 16 = 2\ [4]$, $\log_x 729 = 3\ [9]$ $\log_x 512 = 3\ [8]$.

   (c) $\log x - \log(x-5) = \log 3 + \log 2$ $[6]$

   (d) $4 - \dfrac{3 - 2\log x}{\log x} = 3\log x$ $[10]$

   (e) $x^{\frac{9-\log x}{4}} = 10^{3\log x - 1}$ $[10, 10^{-4}]$

   (f) $1 + \log_2(4x+1) = 0$ $[-\dfrac{1}{8}]$

   (g) $\log(2-x) + \log(1-x) = \log(8-4x)$ $[-3]$

   (h) $\log(3 + 2\log(1+x)) = 0$ $[-\frac{9}{10}]$

   (i) $\log_x(2x+3) = 2$ $[3]$

   (j) $\log_2 x = 2 - \log_2(x-3)$ $[4]$

3. Izračunaj x iz enačb:

   (a) $\ln x = 2\ln a - 3\ln b + \dfrac{1}{2}(\ln c - \dfrac{1}{3}\ln d)$ $[x = \dfrac{a^2\sqrt{c}}{b^3\sqrt[6]{d}}]$

   (b) $\log x = 3\log(2\log a - 3\log b)$ $[x = \left(\log \dfrac{a^2}{b^3}\right)^3]$

4. Brez uporabe računala reši enačbo $\log_2 x = 2 - \log_2(x-3)$.

5. Reši enačbi:

   a) $\log_x \dfrac{5}{3} = -1$ b)$3^x + 3^{x+2} = \dfrac{10}{9}$

6. Graf funkcije s predpisom $f(x) = 2 \cdot a^{1+bx}$ vsebuje točki $A(0,6)$ in $B(1,2)$. Izračunaj konstanti a in b.

7. Izračunaj osnovo a logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$, če njen graf poteka skozi točko $A(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2})$.

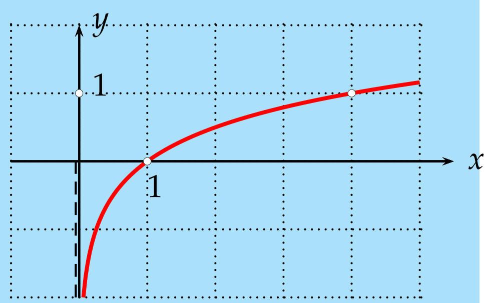
8. Naj bo $f(x) = a \cdot 3^{x-1} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Določi števili a in b tako, da bo $f(1) = -1$ in $f(3) = -17$. Zapiši še definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$ tako dobljene funkcije.

9. Izračunaj vrednost izraza $\log_a a^2 + \log_b 1 - log_c \frac{1}{c} + 3 \log_d \sqrt[6]{d}$, pri čemer so a, b, c in d pozitivna realna števila, različna od 1 .

10. Reši enačbo $\log(x+2) - \log x = 1$.

11. Reši enačbi: a) $6 \cdot 4^x = 3$ b)$6 \log_4 x = 3$

12. V koordinatnem sistemu je narisan graf logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$. Zapiši osnovo tega logaritma. Nariši še grafa funkcij $g(x) = \log_a(x+2)$ in $h(x) = \log_a x - 1$.



13. Reši enačbo $2^{x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{32}$.

14. Izračunaj n, če je $\log 3 + \log 9 + \log 27 + \ldots + \log 3^{99} = \log 3^n$.

15. Reši enačbo $\log_x(x+30) = 2$.

16. Reši enačbo $\log_3(x+71) + \log_3(x-9) - \log_3(x-1) = 2$.

17. Poenostavi izraz $\log_2 a + \log_2 4a - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2a^2$, $a > 0$.

18. Izračunaj presečišče grafov funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = 65 \cdot 2^x - 1$.

19. Reši enačbo $\dfrac{\log 20 + \log x}{\log(5x+1)} = 2$.

20. Dana je funkcije $f(x) = \log_2 x$. Nariši grafe naslednjih funkcij: $y = f(x-1)$, $y = f(x) - 1$, $y = 2f(x-1) + 1$ in $y = |f(x-1) - 2|$.

21. Izračunaj v eksplicitni obliki enačbo inverzne funkcije $g = f^{-1}$ k funkciji $f(x) = 2\log_2(x+1) - 1$. [$g(x) = 2^{\frac{x+1}{2}} - 1$]

22. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3 - 2x - x^2)}$. [$\mathcal{D}_f = (-3, -1-\sqrt{3}] \cup [-1+\sqrt{3}, 2)$]