Kvadratna funkcija

(Interno gradivo)

Ni lektorirano

2017

Kazalo

1 Definicija in oblike kvadratne funkcije

Ponovimo nekaj osnovnih dejstev o funkcijah.

Funkcija ali **preslikava** f iz množice $\mathcal{A}$ v množico $\mathcal{B}$ ($f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) je predpis, ki vsakemu elementu iz množice $\mathcal{A}$ poskuša prirediti **natanko** določen element v množici $\mathcal{B}$. Elementom množice $\mathcal{A}$ pravimo **neodvisne spremenljivke** (tudi **praslike**, **originali**) in jih običajno označimo z x, elementom množice $\mathcal{B}$ pa **odvisne spremenljivke** (tudi **funkcijske vrednosti**, **slike**) in jih običajno označimo z y.

Če originalu x funkcijski predpis lahko priredi sliko y, to označimo z:

$$y = f(x) \quad \text{ali} \quad f : x \mapsto y \quad \text{ali} \quad f : x \mapsto f(x)$$

$$x \longrightarrow \boxed{\quad f \quad} \longrightarrow y = f(x)$$

Zapis $y = f(x)$ imenujemo **enačba funkcije**. V večini primerov funkcij, ki jih bomo ali smo jih obravnavali, bosta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici realnih števil $\mathbb{R}$. V takem primeru bo $f(x)$ izraz, v katerem nastopajo spremenljivka x, znana realna števila, matematične operacije ter simboli.

Primer realne funkcije je linearna funkcija z enačbo $f(x) = kx + n$. Pri tem število k imenujemo smerni koeficient, število n pa začetna vrednost funkcije ($= f(0)$).

Zgled1: Primer realne funkcije je linearna funkcija s predpisom $f(x) = kx + n$. Število k imenujemo smerni koeficient, število n pa začetna vrednost funkcije ($= f(0)$). Vzemimo, da je $k = -\frac{2}{3}$ in $n = 3$, torej je $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3$.

1. **Izračunaj:** $f(0),\ f(-3),\ f(3x),\ f(a+1)$.
2. **Reši enačbe:** $f(x) = 0,\ f(x) = 2,\ f(b-1) = -2$.
3. **Nariši graf funkcije f.**
4. **Zapiši enačbo linearne funkcije g, ki ima graf vzporeden grafu funkcije f in ima pri $x = 2$ vrednost -3.**

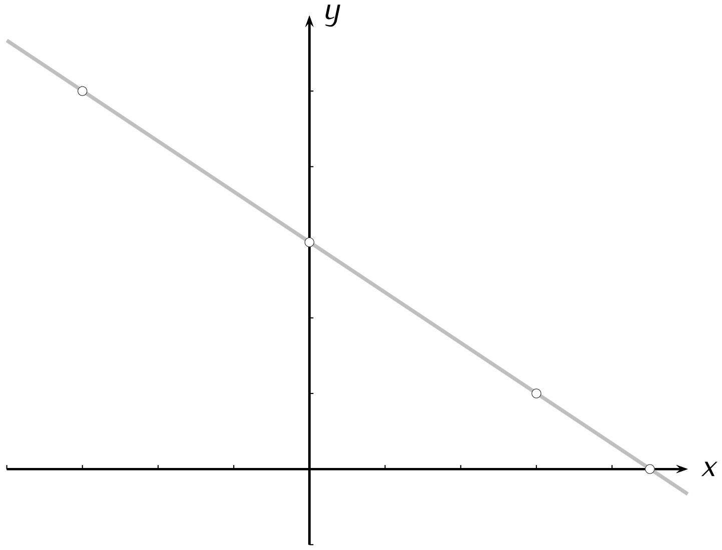
1. $f(0) = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 3 = 3$, $f(-3) = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + 3 = 2 + 3 = 5$, $f(3x) = -\frac{2}{3} \cdot (3x) + 3 = -2x + 3$, $f(a+1) = -\frac{2}{3} \cdot (a+1) + 3 = -\frac{2a}{3} - \frac{2}{3} + 3 = -\frac{2a}{3} + \frac{7}{3}$.

2. $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{3} + 3 = 0| \cdot 3 \Rightarrow -2x + 9 = 0 \Rightarrow -2x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$
   $f(x) = 2 \Rightarrow -\frac{2x}{3} + 3 = 2| \cdot 3 \Rightarrow -2x + 9 = 6 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
   $f(b-1) = -2 \Rightarrow -\frac{2b-2}{3} + 3 = -2| \cdot 3 \Rightarrow -2b + 2 + 9 = -6 \Rightarrow -2b = -17 \Rightarrow b = \frac{17}{2}$

3. Graf katerekoli realne funkcije je množica vseh točk $T(x, f(x))$. Ker je graf linearne funkcije premica, zadošča, če poiščemo dve taki točki, To običajno storimo s tabelo, recimo (ena točka je za kontrolo):

x	0	3	-3
y	3	1	5

   . V tabeli izračunane točke označimo v koordinatnem sistemu in skoznje narišemo premico.



4. Vzporedne premice imajo enake smerne koeficiente, zato je $g(x) = -\frac{2}{3}x + n$. Konstanto n izračunamo iz enačbe $f(2) = -3$, ki postane enačba $-3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + n$. Rešitev te enačbe je $n = -\frac{5}{3}$, zato je $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. ■

V naslednjih razdelkih bomo obravnavali kvadratno funkcijo. Njena enačba je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Količine a, b, c realna števila in jih imenujemo koeficienti kvadratne funkcije. Za vodilni koeficient a zahtevamo, da ni enak 0, torej $a \neq 0$, saj bi v nasprotnem primeru imeli opravka z linearno funkcijo.

linearni koeficient

$$f(x) = \underbrace{a}_{\text{vodilni koeficient}} x^2 + \overset{\text{linearni koeficient}}{b}\, x + c \rightarrow \text{prosti člen}$$

vodilni koeficient

Zapisano enačbo imenujemo **splošna** ali **razvita** oblika. Sestavljajo jo trije členi: vodilni člen (ax^2), linearni člen (bx) in prosti člen (c).

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

splošna oblika

Enačbo s preprostimi postopki preoblikujemo v še dve obliki: temensko in ničelno.

Oglejmo si kako splošno obliko spremenimo v temensko. Pri izpeljavi bomo potrebovali dobro znano enakost: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\underbrace{\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}_{A=x,\ B=\frac{b}{2a}} - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{=-p}\right)^2 + \underbrace{\frac{\overbrace{4ac - b^2}^{=-D}}{4a}}_{=q}$$

Količino

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

diskriminanta

imenujemo **diskriminanta** kvadratne funkcije, količini

$$\boxed{p = \frac{-b}{2a},\ q = \frac{-D}{4a}}$$

koordinati temena

pa koordinati **temena** $T(p, q)$ kvadratne funkcije. Temenska oblika kvadratne funkcije imenujemo naslednji zapis enačbe kvadratne funkcije:

$$\boxed{y = a(x - p)^2 + q}$$

temenska oblika

Naslednja oblika je ničelna. Pri preoblikovanju bomo uporabili formulo za razliko kvadratov: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

$$a(x-p)^2 + q = a\left((x-p)^2 - \frac{-q}{a}\right) = a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right) = a\left((x + \frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$$

Izraza

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad \text{in} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}}$$

ničli funkcije

imenujemo **ničli** kvadratne funkcije, obliko

$$\boxed{y = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

ničelna oblika

pa **ničelna** oblika kvadratne funkcije.

Pojasnimo zakaj ničelna oblika. Za ničlo poljubne realne funkcije f smo proglasili tako število $x = v$, da je vrednost funkcije $f(v) = 0$. Kvadratna funkcija $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ pa zavzeme vrednost 0 ravno pri številih $x = x_1$ in $x = x_2$.

Ničli in absciso temena veže koristna enačba :

$$\boxed{p = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

ki jo hitro ugledamo v naslenji vrsti:

$$x_1 + x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \tfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \tfrac{-2b}{2a} = 2p.$$

Napravimo kratek povzetek povedanega:

Kvadratna funkcija nastopa v treh oblikah:

- kot tričlenik $y = ax^2 + bx + c$ (splošna oblika),
- kot dvočlenik $y = a(x-p)^2 + q$ (temenska oblika),
- kot enočlenik $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ (ničelna oblika).

Prehode iz ene oblike v drugo omogočajo enačbe za D, p, q, x_1 in x_2. Mimogrede opazimo, da je vsaka oblika natanko določena s tremi količinami (parametri): splošna z a, b, c, temenska z a, p, q in ničelna z a, x_1, x_2.

Zgled2: **Dopolni naslednjo tabelo. Oznake v tabeli so običajne, torej so a, b, c koeficienti kvadratne funkcije, D diskriminanta in tako dalje.**

$f(x)$	a	b	c	D	p	q	x_1	x_2
$2x^2 - 3x + 1$								
$-x^2 + 3$								
$(a^2 + 1)x^2 + 2x + 1$				$-4a^2$		$\frac{a^2}{a^2+1}$		
$(2x - 1)^2 + 3(2x - 1) + 2$	4	2	0		$-\frac{1}{4}$		0	$-\frac{1}{2}$

Povejmo le rezultate: $2, -3, 1, 1, 3/4, -1/8, 1, 1/2$; $-1, 0, 3, 12, 0, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$; $a^2 + 1, 2, 1, -4a^2, -1/(a^2 + 1), a^2/(a^2 + 1), -, -$; $4, 2, 0, 4, -1/4, -1/4, 0, -1/2$. ■

Zgled3: **Okrajšaj ulomek:** $\dfrac{2x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6}$.

Ulomek lahko krajšamo, če sta števec in imenovalec faktorizirana, tj., da sta enočlenika. Števec in imenovalec sta splošni obliki dveh kvadratnih funkcij. Obe funkciji zapišemo v ničelni obliki: $2x^2 + x - 6 = 2(x + 2)(x - \frac{3}{2})$, $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Pri prvi smo poiskali ničle kvadratne funkciji, drugo pa smo ugnali z znanjem prvega letnika (Viète). Dobimo:

$$\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x + 2)(x - \frac{3}{2})}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{2(x - \frac{3}{2})}{x - 3} = \frac{2x - 3}{x - 3}$$

■

Pogosto moramo iz danih podatkov poiskati enačbo kvadratne funkcije. Glede na vrsto podatkov izberemo primerno obliko in v njej izračunamo neznane količine. Pokažimo to z nekaj primeri.

Zgled4: **Zapiši kvadratno funkcijo s temenom v točki $T(\frac{1}{2}, -4)$ in začetno vrednostjo -3.**

Izberemo temensko obliko, saj imamo o njej največ podatkov: $y = a(x - \frac{1}{2})^2 - 4$. Izračunati moramo še a. Toda začetna vrednost funkcije je -3, dosežena pa je, ko za x izberemo 0. Zato: $-3 = a(0 - \frac{1}{2})^2 - 4 \Rightarrow a = 4$ in enačba iskane funkcije: $y = 4(x - \frac{1}{2})^2 - 4 = 4x^2 - 4x - 3$. ■

Zgled5: Zapiši kvadratno funkcijo s temenom v točki $T(\frac{1}{2}, -4)$ in ničlo $\frac{3}{2}$.

Izračunati moramo še a. Toda ničla funkcije je taka vrednost x, pri kateri je vrednost $y = 0$. Zato: $0 = a(\frac{3}{2} - \frac{1}{2})^2 - 4 \Rightarrow a = 4$ in enačba iskane funkcije: $y = 4(x - \frac{1}{2})^2 - 4 = 4x^2 - 4x - 3$. ■

Zgled6: Zapiši kvadratno funkcijo z ničlama $-\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{2}$ ter ordinato temena -4.

Aritmetična sredina ničel ($\frac{x_1+x_2}{2}$) je abscisa , ekstremna vrednost ordinata temena. Zato je $T(\frac{1}{2}, -4)$. Nadaljujemo kot v prejšnjem primeru. Dobimo: $y = 4x^2 - 4x - 3$. ■

Zgled7: Zapiši kvadratno funkcijo z ničlama $-\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{2}$ ter začetno vrednostjo -3.

To pot izberemo ničelno obliko: $y = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$. Z začetno vrednostjo izračunamo še $a : -3 = a(0 + \frac{1}{2})(0 - \frac{3}{2}) \Rightarrow a = 4$; iskana enačba je potem: $y = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 4x^2 - 4x - 3$. ■

Zgled8: Zapiši kvadratno funkcijo, če njen graf vsebuje točke: $A(1, -3)$, $B(2, 5)$ in $C(-1, 5)$.

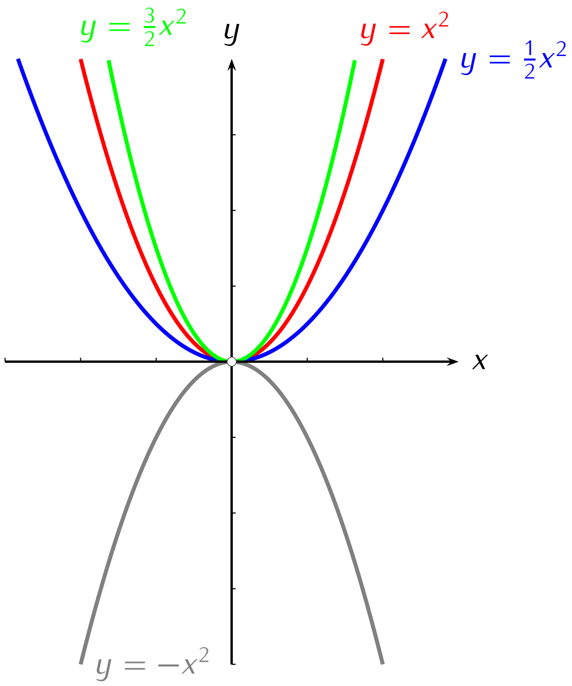
Tokrat izberimo splošno obliko: $y = ax^2+bx+c$. Neznanke so tri: a, b in c. Izračunamo jih iz sistema enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & -3 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 5 \\ a & - & b & + & c & = & 5, \end{array}$$

ki ga dobimo iz točk $A(1, -3)$, $B(2, 5)$ in $C(-1, 5)$. Njegova rešitev je:
$a = 4$, $b = -4$ in $c = -3$. Zato je $y = 4x^2 - 4x - 3$. ■

2 Graf kvadratne funkcije

Graf katerekoli funkcije $y = f(x)$ smo imenovali množico vseh točk $T(x, f(x))$ v koordinatnem sistemu. Seveda vseh točk ne moremo narisati,zato so vsi grafi le slabši ali boljši približki pravega grafa. Grafe lahko rišemo s tabelo, v kateri tabeliramo zadostno število točk. Na spodnji sliki so narisani približni grafi funkcij, pri katerih je računalnik uporabil tabelo z 200 točkami na intervalih $[-2, 2]$, $[-2.83, 2.83]$ in $[-1.63, 1.63]$.



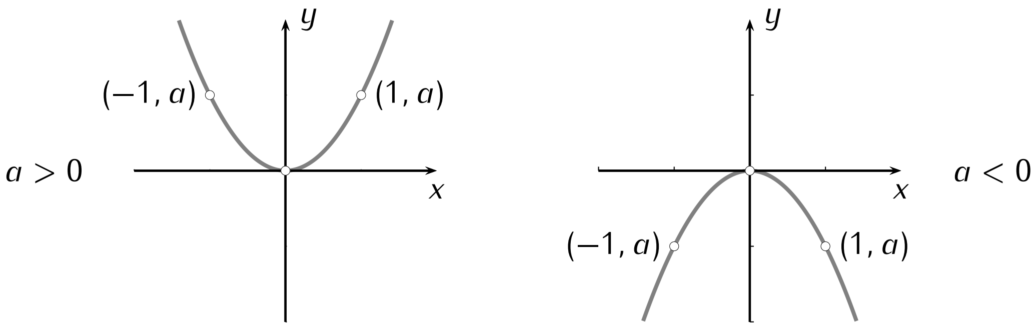
Slika 1: Grafi funkcij $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{3}{2}x^2$ in $y = -x^2$

Na sliki opazimo, da imajo grafi podobno obliko, krivuljo, ki jo imenujemo **parabola**. Najnižjo, v primeru grafa funkcije $y = -x^2$ pa najvišjo točka grafa, imenujemo **teme** parabole. V našem primeru je to točka $(0, 0)$.

Tudi grafi funkcij $f(x) = ax^2$ imajo podobno obliko. Vsi imajo teme v izhodišču $(0, 0)$ in vsebujejo točki $(1, a)$ in $(-1, a)$. Če je $a > 0$, ima ustrezna parabola obliko „doline“ (), če je $a < 0$ pa ima obliko „hriba“ ().

Da je točka $T(p, q)$ (teme) res najnižja ali najvišja točka grafa kvadratne funkcije ugotovimo takole:
Funkcijo $y = ax^2 + bx + c$ preoblikujemo v temensko obliko $y = a(x - p)^2 + q$.

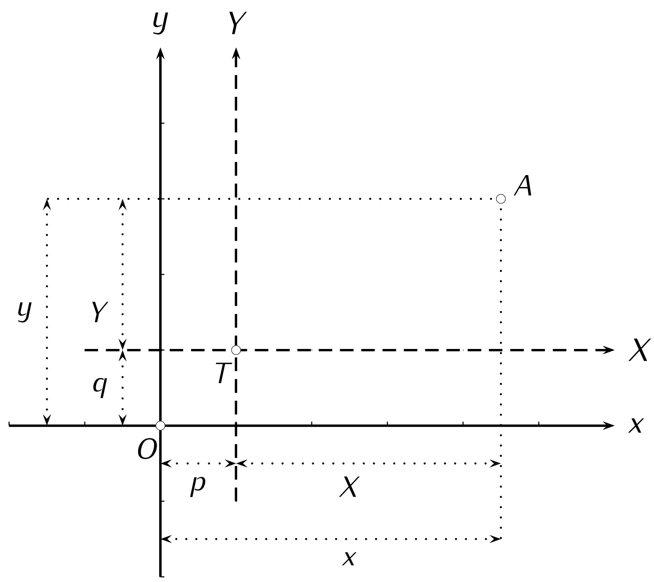
- Če je vodilni koeficient pozitiven ($a > 0$), je prvi člen temenske oblike $a(x - p)^2$ pozitiven za vsak x, le za $x = p$ je enak 0. Zato je vrednost kvadratne funkcije ($= y$) vedno vsaj q. Torej je v tem primeru točka $T(p, q)$ najnižja točka grafa, pravimo ji tudi **minimum**.



Slika 2: Graf $y = ax^2$

- Če je vodilni koeficient negativen ($a < 0$), je prvi člen temenske oblike $a(x-p)^2$ negativen za vsak x, le za $x = p$ je enak 0. Zato je vrednost kvadratne funkcije ($= y$) kvečjemu enaka q. Torej je v tem primeru točka $T(p, q)$ najvišja točka grafa, pravimo ji tudi **maksimum**.

Oglejmo si naslednjo sliko:



Slika 3: Koordinatna sistema (x, y) in (X, Y) z vzporednima osema

Na njej sta v isti ravnini narisana dva koordinatna sistema:

- mali, z osema x in y ter izhodiščem v O,
- veliki, z osema X in Y ter izhodiščem v točki $T(p, q)$.
- abscisni (x in X) in ordinatni (y in Y) osi koordinatnih sistemov sta medseboj vzporedni.

Vzemimo, da ima poljubna točka A v koordinatni ravnini v malem sistemu koordinati (x, y) in v velikem sistemu koordinati (X, Y). Preprost razmislek, ob pogledu na sliko, pove, da je:

$$X = x - p, \qquad Y = y - q$$

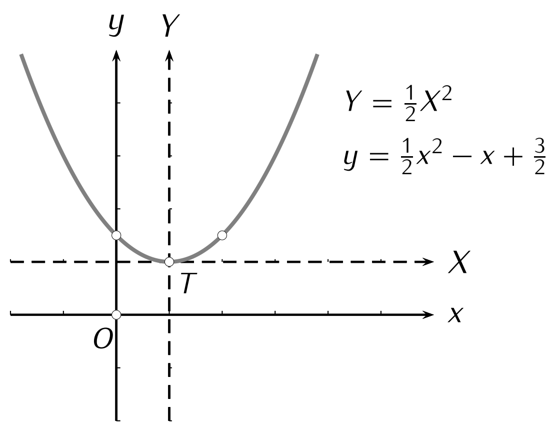
Kako nam to pomaga pri risanju grafa kvadratne funkcije $f(x)ax^2 + bx + c$:

risanje grafa s premikom

- Kvadratno funkcijo zapišemo v temenski obliki: $f(x) = a(x-p)^2 + q$.
- Koordinatni sistem (x, y) vzporedno premaknemo v nov sistem (X, Y) z izhodiščem v temenu $T(p, q)$ funkcije.
- V novem sistemu je enačba naše funkcije $Y = aX^2$. Grafe takih funkcij smo opisali na začetku razdelka. Ugotovili smo, da imajo teme v izhodišču, seveda premaknjenega sistema, in vsebujejo točki $(1, a)$ in $(-1, a)$, seveda tudi v novem koordinatnem sistemu.
- Skozi teme in narisani točki narišemo parabolo.

Zgled9: **Nariši z opisanim postopkom graf funkcije** $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$

Splošno obliko pretvorimo v temensko: $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$, koordinatni osi x in y vzporedno premaknemo tako, da je novo izhodišče v temenu $T(1, 1)$. V novem sistemu narišemo točki $(-1, \frac{1}{2})$ in $(1, \frac{1}{2})$ in skozi njiju in teme narišemo parabolo.



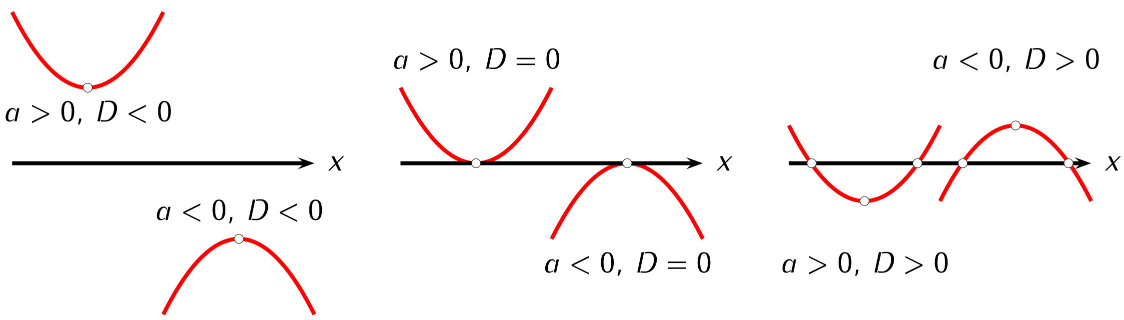
■

Drugi način risanja grafa kvadratne funkcije je risanje z **značilnimi točkami** funkcije, ki so: **teme**, **ničli** in **„začetna“ vrednost** funkcije.

Teme smo že spoznali, „začetna“ vrednost je vrednost funkcije $f(0)$, bolje rečeno točka $(0, f(0))$.
Malo dlje se zadržimo pri ničlah. Ničle so vrednosti neodvisne spremenljivke (x), pri katerih je funkcijska vrednost (y) enaka 0. Grafično so ničle tiste točke na grafu funkcije, v katerih graf seka ali pa se dotika abscisne (x) osi.

Ničle **kvadratne funkcije** izračunamo s formulo $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Ničel ne moremo izračunati, če je diskriminanta negativna ($D < 0$), kajti tedaj njen kvadratni koren ($\sqrt{D}$) ni realno število. [1] Graf take kvadratne funkcije ne seka abscisne osi.
V primeru, ko je $D = 0$, sta obe ničli x_1 in x_2 enaki ($x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = p$). Graf take funkcije se dotika abscisne osi v temenu $T(p, 0)$.
V primeru, ko je $D > 0$ ima kvadratna funkcija dve realni ničli $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ in $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.
Graf take funkcije seka abscisno os v točkah $(x_1, 0)$ in $(x_2, 0)$.
Napravimo še povzetek. Beseda diskriminacija slovensko pomeni razlikovanje. Tudi diskriminanta kvadratne funkcije razlikuje kvadratne funkcije na tiste,

- ki imajo **dve realni ničli**; v tem primeru je $\boxed{D > 0}$.
- ki imajo **eno dvojno** (dvakratno) **realno ničlo**; v tem primeru je $\boxed{D = 0}$.
- ki **nimajo realnih ničel**; v tem primeru je $\boxed{D < 0}$.



Slika 4: Oblike grafov kvadratne funkcije v odvisnosti od vodilnega koeficienta in diskriminante

[1]Kvadratni koren in kvadriranje sta obratni operaciji, pri kvadriranju realnih števil pa vedno izračunamo nenegativno (0 ali > 0) število. Torej korenjenje negativnih števil ni izvedljivo v množici realnih števil

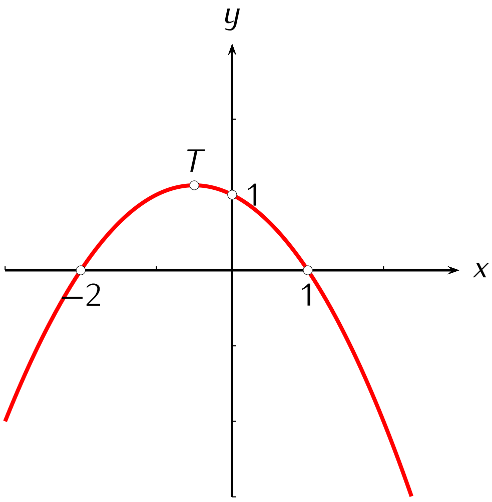
Graf kvadratne funkcije lahko rišemo tudi z značilnimi točkami:

- Izračunamo značilne točke: teme, ničli (seveda, če obstajata), začetna vrednost,
- upoštevamo obliko parabole: $a > 0$ ($\smile$), $a < 0$ ($\frown$) in upoštevamo, da je parabola simetrična na premico $x = p$ skozi teme,
- po potrebi tabeliramo še kako dodatno točko.

risanje grafa z značilnimi točkami

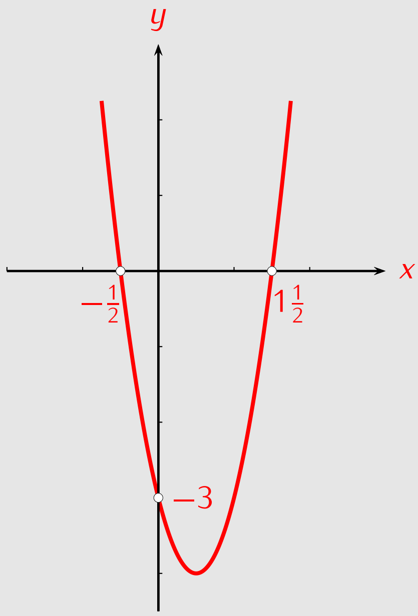
Zgled10: **Nariši z opisanim postopkom graf funkcije** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1$

Ker je $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ in $c = 1$, je $D = (-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{2}) \cdot 1 = \frac{9}{4}$, $p = \dfrac{-(-\frac{1}{2})}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}$, $q = \dfrac{-\frac{9}{4}}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{9}{8}$, $x_1 = \dfrac{-(-\frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -2$ in $x_2 = \dfrac{-(-\frac{1}{2}) - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1$. Teme je tako v točki $T(-1/2, 9/8)$, ničli sta $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, začetna vrednost pa je $f(0) = 1$. Graf:



Računanje značilnih točk lahko začnemo tudi z ničlami tako, da rešimo enačbo $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$, ki jo uredimo v obliki $0 = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Z dobljenima ničlama izračunamo $p = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$, z dobljenim p pa izračunamo $q = f(p) = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{8}$. Začetno vrednost izračunamo enako kot v prvem primeru. $\blacksquare$

Zgled11: Zapiši v splošni obliki enačbo kvadratne funkcije, katere graf prikazuje spodnja slika:



Iz grafa preberemo, da sta ničli funkcije števili $x_1 = -\frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{3}{2}$. Zato za nastavek enačbe uporabimo ničelno obliko $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$. Vodilni koeficient izračunamo z začetno vrednostjo $f(0) = -3$, torej je $a(0 + \frac{1}{2})(0 - \frac{3}{2}) = -3$ in zato $-\frac{3}{4}a = -3$. Tako izračunamo $a = 4$. Ničelno obliko pretvorimo z množenjem v splošno obliko $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 4x^2 - 4x - 3$. $\blacksquare$

3 Kvadratna enačba

V prvem letniku smo spoznali **linearno** enačbo in način njenega reševanja. Povedali smo, da je **rešitev** ali **koren** enačbe tako realno število, pri katerem je leva stran enačbe enaka desni strani, obe strani pa sta definirani. Povedali smo tudi, da sta dve enačbi **ekvivalentni** (enakovredni), če imata natanko ista števila za rešitev (ali: njuni množici rešitev sta enaki).

Enačbo, ki jo lahko preoblikujemo v enačbo oblike

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0}$$

imenujemo **kvadratna** enačba s koeficienti a, b in c.

Kako rešiti kvadratno enačbo? Ena od možnosti je, da enačbo razstavimo (razcepimo). Take enačbe smo spoznali že v prvem letniku. To so enačbe, ki so ekvivalentne obliki $A \cdot B \cdot C \cdot \ldots = 0$. Taka enačba razpade na več, običajno, bolj enostavnih enačb.

Spomnimo se, da je ničla kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ tako število x, pri katerem je vrednost funkcije ($= y$) enaka 0. Torej so ničle rešitve enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Zato lahko rešitve (korene) kvadratne enačbe poiščemo tudi s formulo za ničle:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Če so v urejeni obliki kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ vsi koeficienti različni od 0, je enačba **popolna**, če pa je vsaj eden od koeficientov b ali c enak 0, imenujemo enačbo **nepopolna** (koeficient a ne more biti enak 0, saj drugače enačba ni kvadratna).

Nepopolne kvadratne enačbe

Poljubno nepopolno enačbo lahko razcepimo:

1. Če je $b = c = 0$, je edina rešitev enačbe $ax^2 = 0$ očitno le število $x = 0$.

2. Če je $c = 0,\ b \neq 0$, nastane enačba $ax^2 + bx = 0$, ki jo zlahka razcepimo v $x(ax + b) = 0$ in od tod preberemo rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Če je $b = 0,\ c \neq 0$, imamo malo več dela. Enačba postane $ax^2 + c = 0$. Vzemimo, da je $a > 0$, drugače pomnožimo enačbo z (-1).

   - $c < 0$: enačbo razcepimo v $(x\sqrt{a})^2 - (\sqrt{-c})^2 = (x\sqrt{a} - \sqrt{-c})(x\sqrt{a} + \sqrt{-c}) = 0$, ki ima rešitvi $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ in $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Obe rešitvi sta realni, saj je $\frac{-c}{a}$ pozitivno število.

- $c > 0$: V tem primeru $\frac{-c}{a}$ je negativno število, kvadratni koren takih števil pa med realnimi števili ne obstaja. Zagato rešimo tako, da vpeljemo novo oznako („število"): $\sqrt{-1} = i$. Očitno je tedaj $i^2 = -1$. Novo oznako ali število imenujemo imaginarna enota. Z imaginarno enoto i izračunamo, da je, recimo: $\sqrt{-4} = 2i$, $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$, $\sqrt{-a^2} = a \cdot i$. Dodajmo še, da z imaginarno enoto lahko sestavimo nova števila, ki imajo obliko $a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, imenujemo pa jih **kompleksna** števila.

  Vrnimo se k naši enačbi $ax^2 + c = 0$, $a > 0$, $c > 0$. Enačbo razcepimo s pomočjo imaginarne enote:

  $$(x\sqrt{a})^2 - (i\sqrt{c})^2 = (x\sqrt{a} - i\sqrt{c})(x\sqrt{a} + i\sqrt{c}) = 0$$

  Odtod dobimo kompleksni rešitvi enačbe: $x_1 = i\sqrt{\frac{c}{a}}$ in $x_2 = -i\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Enačbo $ax^2 + c = 0$ lahko rešimo tudi tako, da izrazimo $x^2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ in potem s korenjenjem izračunamo rešitvi. Paziti moramo le, da uporabimo enkrat pozitivno vrednost korena, drugič pa negativno vrednost korena. Seveda moramo v primeru negativnega korenjenca $-\frac{c}{a}$ uporabiti imaginarnos enoto.

Zgled12: Reši naslednje enačbe $3x^2 + 4x = 0$, $3x^2 - 4 = 0$, $3x^2 + 4 = 0$

$$3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x\sqrt{3} - 2)(x\sqrt{3} + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x\sqrt{3} - 2i)(x\sqrt{3} + 2i) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2i}{\sqrt{3}} = \frac{2i\sqrt{3}}{3},\ x_2 = -\frac{2i\sqrt{3}}{3}$$

■

Popolne kvadratne enačbe

Popolna kvadratna enačba je tista, ki jo lahko preoblikujemo do oblike: $ax^2+bx+c = 0$ in so vsi koeficienti a, b in c različni od 0. Enačbo rešimo bodisi tako, da trinom na levi **razcepimo** in preberemo rešitvi, bodisi uporabimo **formuli za ničli** kvadratne funkcije:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Trinom ax^2+bx+c postane v ničelni obliki enočlenik treh faktorjev: $a(x-x_1)(x-x_2)$. Od tod uvidimo, da ima kvadratna enačba največ dve rešitvi, njihova narava pa je odvisna od **diskriminante** D:

- $\boxed{D<0}$, $\sqrt{D}$ ni realno število, zato kvadratna enačba nima realnih ničel, ima pa dve kompleksni rešitvi:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}}$$

.

- $\boxed{D=0}$, ima enačba dvojno (dvakratno) rešitev:

$$\boxed{x_1=x_2=\frac{-b}{2a}}$$

.

- $\boxed{D>0}$, ima enačba dve različni realni rešitvi:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

.

Primeri

Zgled13: Reši enačbo $(6x-5)^2-4(x+3)^2=0$.

- urejanje: $36x^2-60x+25-4(x^2+6x+9)=0 \Rightarrow 32x^2-84x-11=0$,
- diskriminanta: $D=84^2-4\cdot 32\cdot(-11)=8464=92^2$,
- rešitvi: $x_1=\frac{84+92}{64}=\frac{11}{4}$, $x_2=\frac{84-92}{64}=-\frac{1}{8}$.

■

Zgled14: Reši enačbo $\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{9-2x}$.

- urejanje : $\frac{1}{3-x} - \frac{4}{5} = \frac{1}{9-2x} |\cdot 5(3-x)(9-2x) \Rightarrow 5(9-2x) - 4(3-x)(9-2x) = 5(3-x) \Rightarrow 8x^2 - 55x + 78 = 0$
- diskriminanta: $D = 55^2 - 4 \cdot 8 \cdot 78 = 529 = 23^2$,
- rešitvi: $x_1 = \frac{55+23}{16} = 4\frac{7}{8}$, $x_2 = \frac{55-23}{16} = 2$.

■

Zgled15: Reši enačbo $x^2 - |x+1| = 5$.

V enačbi nastopa absolutna vrednost, zato ločimo dve možnosti:

- $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$: Enačba postane: $x^2 - x - 6 = 0$. Njeni rešitvi sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$; druga rešitev odpade, saj je $x \geq -1$.
- $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$: Enačba postane: $x^2 + x - 4 = 0$. Njeni rešitvi sta $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ in $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; pogoju $x < -1$ ustreza le druga rešitev.

Torej sta rešitvi enačbe $x_1 = 3$ in $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$. ■

Zgled16: Izračunaj $m \in \mathbb{R}$ tako, da bo imela enačba $2(m-1)x^2+2(3m+5)x+(m+1) = 0$ dvojno rešitev.

Enačba je že urejena, dvojni koren (rešitev) pa bo imela, če bo $D = 0$. Računajmo: $D = (2(3m+5))^2 - 4 \cdot 2(m-1)(m+1) = 36m^2 + 120m + 100 - 8m^2 + 8 = 28m^2 + 120m + 108 = \; = 4(7m^2 + 30m + 27)$. Postavimo pogoj za dvojnost rešitve $D = 0$ in dobimo novo kvadratno enačbo: $7m^2 + 30m + 27 = 0$. Izračunamo njeno diskriminanto $D_1 = 900 - 4 \cdot 7 \cdot 27 = 144 = 12^2$. Zato: $m_1 = \frac{-30+12}{14} = -\frac{9}{7}$, $m_2 = \frac{-30-12}{14} = -3$. ■

Zgled17: Reši naslednji enačbi:

a) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$,

b) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$.

Enačbi nista kvadratni. Toda s primerno zamenjavo neznanke postaneta kvadratni:

a) Vpeljimo novo neznanko $x^2 = y$. Dobimo: $y^2 + 8y - 9 = 0$. Nastalo kvadratno enačbo rešimo: $y_1 = 1$ in $y_2 = -9$. Od tod dobimo dve kvadratni enačbi: $x^2 = 1$ in $x^2 = -9$ z rešitvami: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3i$.
b) V drugi enačbi pomnožimo prvi in četrti faktor ter drugi in tretji faktor na levi strani enačbe. Dobimo: $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 15$. Opazimo, da je v obeh nastalih faktorjih izraz $x^2 - 5x$. Označimo ga z y, da dobimo kvadratno enačbo $(y+4)(y+6) = 15$, ki jo uredimo v $y^2 + 10y + 9 = 0$ in rešimo: $y_1 = -1$ in $y_2 = -9$. Z izračunanima novima neznankama dobimo dve enačbi s staro neznanko: $x^2 - 5x = -1$ in $x^2 - 5x = -9$. Dobljeni enačbi imata rešitve: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ in $x_{3,4} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}$. ■

Zgled18: Skupina otrok poskuša na enake dele razdeliti 400 bonbonov. Štirje otroci se odpovedo bonbonom, zato vsak od ostalih dobi 5 bonbonov več. Koliko otrok je v skupini?

Naj bo x število otrok, vsak pa dobi y bonbonov. Zato je $xy = 400$. Ko se štirje otroci odpovedo bonbonom, jih $x - 4$ dobi po $y + 5$. Zato je $(x-4)(y+5) = 400$. Dobili smo sistem dveh enačb, ki pa žal nista linearni. Drugo enačbo uredimo v $xy - 4y + 5x - 20 = 400$. Ker pa je $xy = 400$, dobimo: $5x - 4y - 20 = 0$. Tedaj: $y = \frac{5}{4}x - 5$. To postavimo v enačbo $xy = 400$ in dobimo kvadratno enačbo: $\frac{5}{4}x^2 - 5x = 400 \Rightarrow x^2 - 4x - 320 = 0 \Rightarrow (x-20)(x+16) = 0$. Odtod dobimo edino možno rešitev: V skupini je bilo 20 otrok. ■

Konec 16. stoletja je francoski kraljevi matematik Francois Viète (1540-1603) ugotovil, da za rešitvi x_1 in x_2 kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ veljata formuli:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ in } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Formuli Vieti v čast imenujemo Vietovi formuli.

Zgled19: Napiši kvadratno enačbo, ki ima rešitvi $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$.

Vietove formule povedo: $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 = 1$ in $\frac{c}{a} = x_1x_2 = -6$, zato: $b = -a$ in $c = 6a$. Nastane enačba $ax^2 - ax - 6a = 0$ ali $a(x^2 - x - 6) = 0$. Enačba ni natanko določena, saj za vodilni koeficient a lahko izberemo poljubno neničelno realno število. Običajno izberemo $a = 1$; v tem primeru je iskana enačba $x^2 - x - 6 = 0$ ■

Zgled20: Naj bosta x_1 in x_2 rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - (m+1)x + m = 0$. Izračunaj realno število m tako, da bo $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Izraz $x_1^2 + x_2^2$ moramo povezati z neznanko m. Vietove formule povedo: $x_1 + x_2 = m + 1$ in $x_1x_2 = m$. Izraz $x_1^2 + x_2^2$ preoblikujmo: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+1)^2 - 2m$. Pogoj naloge privede do enačbe: $m^2 + 1 = 10$, ki ima rešitvi $m_1 = 3$ in $m_2 = -3$. ■

Zgled21: Naj bosta x_1 in x_2 rešitvi kvadratne enačbe $3x^2 + 7x - 14 = 0$. Izračunaj vrednost izraza $3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$.

Podobno kot smo v prejšnem primeru preuredili izraz $x_1^2 + x_2^2$, sedaj preuredimo izraz $3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 = 3(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 3((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = 3(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2$. Upoštevamo: $x_1 + x_2 = -\frac{7}{3}$ in $x_1x_2 = -\frac{14}{3}$, da dobimo:

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 = 3\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - \left(-\frac{14}{3}\right) = 21$$

■

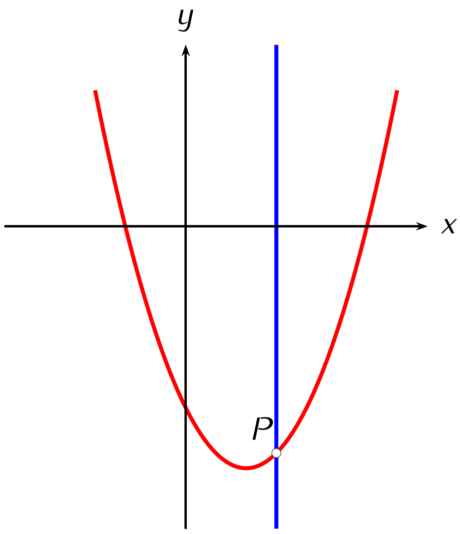
4 Medsebojne lege premic in parabol

Za dve različni premici v ravnini vemo, da se bodisi sekata, bodisi sta vzporedni. V tem poglavju nas bo zanimalo kakšne so možne medsebojne lege **premice in parabole** ter kakšne so medsebojne lege **dveh parabol**. Pri tem bomo z imenom parabola imeli v mislih graf kvadratne funkcije. Zanimalo nas bo predvsem ali ima ustrezen par skupne točke in, če jih ima, koliko je skupnih točk.

Medsebojna lega premice in parabole

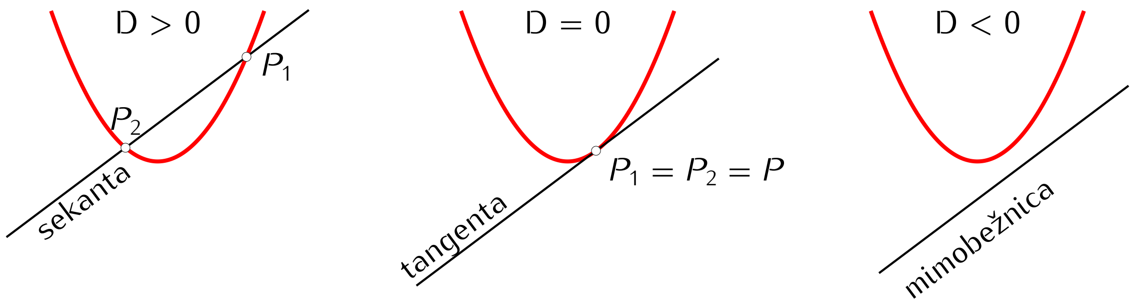
Vzemimo, da ima premica enačbo $Ax+By+C=0$ in parabola enačbo $y=ax^2+bx+c$. Presečišče je točka, katere koordinati ustrezata obema enačbama. Zato presečišča dobimo tako, da rešimo ustrezni sistem kvadratne in linearne enačbe. Običajno to storimo tako, da izrazimo iz vsake enačbe isto neznanko (ponavadi y) in dobljena izraza enačimo.

V primeru, ko v linearni enačbi ne nastopa neznanka y, torej je $B=0$, izračunamo iz enačbe $x=-\dfrac{C}{A}$. Premica je v tem primeru pravokotna na abcisno os. Neznanko y izračunamo z dobljenim x iz kvadratne enačbe: $y=a\left(-\dfrac{C}{A}\right)^2+b\left(-\dfrac{C}{A}\right)+c$. Torej imata v tem primeru premica in parabola eno presečišče P s koordinatama, ki smo jo pravkar izrazili z A, C, a, b, c.



Slika 5: Parabola $y=ax^2+bx+c$ in premica $Ax+C=0$

Če je $B\neq 0$ lahko zapišimo premico v eksplicitni obliki: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{A}=kx+n$. Nastali sistem rešimo tako, da enačimo y obeh enačb, torej: $ax^2+bx+c=kx+n$. Nastala je



Slika 6: Možne medsebojne lege premice in parabole

kvadratna enačba z neznanko x. Ko enačbo rešimo, z ustreznimi rešitvami izračunamo še vrednosti ordinat ($= y$) skupnih točk. Kot vemo, je število rešitev kvadratne enačbe odvisno od njene diskriminante. Ločimo naslednje primere:

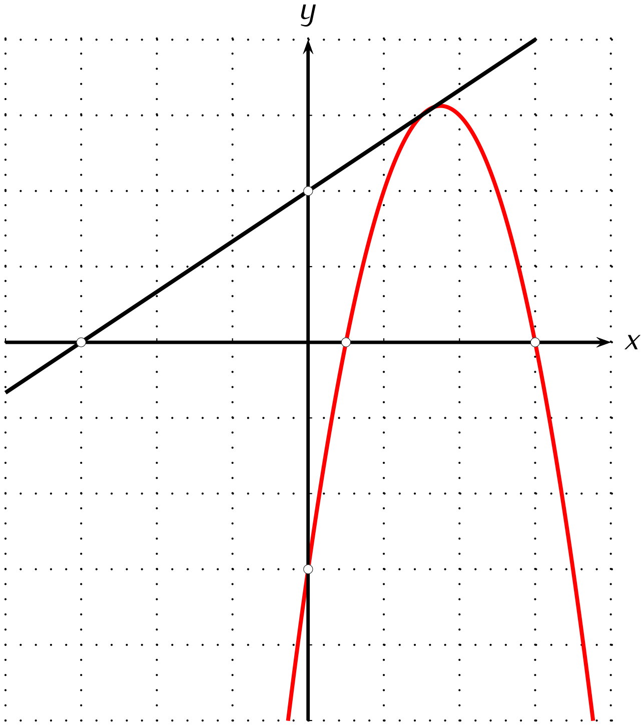
- Če je $D > 0$, ima enačba dve rešitvi, zato premica dvakrat seka parabolo. Pravimo ji **sekanta** ali **presečnica**.
- Če je $D = 0$, ima enačba eno dvojno rešitev, zato imata premica eno samo skupno točko. Premica je v tem primeru **tangenta** ali **dotikalnica** na parabolo.
- Če je $D < 0$, enačba nima realnih rešitev, zato premica in parabola nimata skupnih točk. Premica je v tem primeru **mimobežnica**.

Zgled22: Računsko in grafično preveri ali imata premica $2x - 3y + 6 = 0$ in parabola $y = -2x^2 + 7x - 3$ kako skupno točko in, če jo imata, poišči njeni koordinati.

premica: $y = \frac{2}{3}x + 2$, tabela: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -3 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$;
parabola: $D = 25$, teme: $T(1\frac{3}{4}, 3\frac{1}{8})$, ničli: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, začetna vrednost:$y(0) = -3$.

Iz slike ne moremo z gotovostjo ugotoviti ali imata parabola in premica eno skupno točko ali dve skupni točki, še teže pa ugotovimo koordinate skupnih točk. Zato se lotimo naloge še računsko:

$y_{\text{premica}} = \frac{2}{3}x + 2$, $y_{\text{parabola}} = y = -2x^2 + 7x - 3$. Rešimo nastali sistem:



Slika 7: Parabola $y = -2x^2 + 7x - 3$ in premica $2x - 3y + 6 = 0$

$y_{\text{premica}} = y_{\text{parabola}} \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2 = -2x^2 + 7x - 3 \Rightarrow 6x^2 - 19x + 15 = 0$. Rešitvi zadnje enačbe sta: $x_1 = \frac{5}{3}$ in $x_2 = \frac{3}{2}$. Skupni točki (presečišči) sta dve: $P_1(1\frac{2}{3}, 3\frac{1}{9})$ in $P_2(1\frac{1}{2}, 3)$. Primer pokaže, da je grafičen način iskanja presečišč nenatančen, ko sta presečišči blizu eden drugemu. ■

Zgled23: Poišči vrednost števila $m \in \mathbb{R}$ tako, da bo premica $y = -2x + m$ tangenta na parabolo $y = 3x^2 - 7x + 4$.

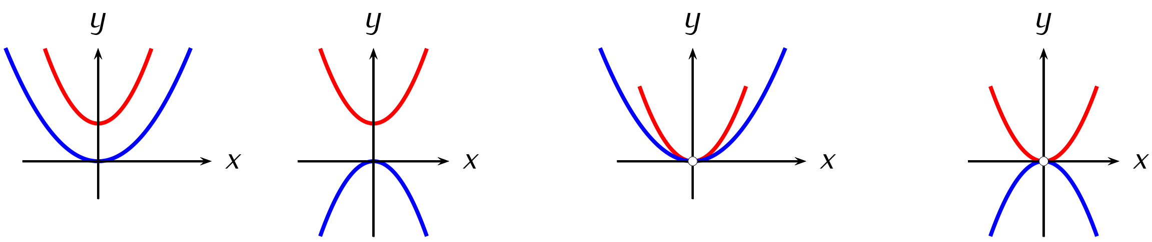
Sistem enačb $y = -2x + m$, $y = 3x^2 - 7x + 4$ ima lahko dve, eno ali pa nobene rešitve. Pogoj, da je dana premica tangenta, pove, da ima sistem eno samo rešitev. Sistem rešujemo kot je to običajno: enačimo y-a in dobimo kvadratno enačbo $3x^2 - 7x + 4 = -2x + m$, jo uredimo ($3x^2 - 5x + (4 - m) = 0$), izračunamo njeno diskriminanto ($D = 25 - 12(4 - m) = 12m - 23$) in jo izenačimo z 0. Iskano število m je potlej $m = \frac{23}{12}$.

Za dodatek izračunajmo dotikališče. V enačbo $3x^2 - 5x + (4 - m) = 0$ vstavimo izračunani m. Z malo dela pridelamo enačbo $36x^2 - 60x + 25 = 0$. Če naj ima le eno rešitev (dotikališče), mora biti izraz na desni kvadrat binoma. Res, $36x^2 - 60x + 25 = (6x - 5)^2$, zato je dotikališče $D(\frac{5}{6}, \frac{1}{4})$. ■

Medsebojna lega dveh parabol

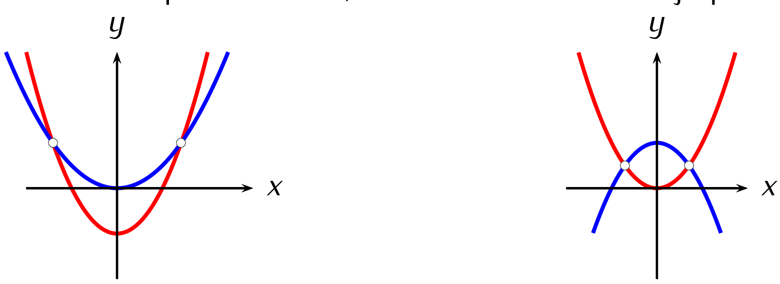
Naj bosta $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{P}_2$ dve kvadratni paraboli z enačbama $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ in $y = a_2x^2 + +b_2x + c_2$. Zanima nas, koliko skupnih točk vsebujeta njuna grafa. Spet rešujemo sistem dveh enačb. Enačimo oba y in rešimo nastalo kvadratno enačbo. Pri tem nastopijo naslednje možnosti, če zanemarimo primer, ko imamo enaki paraboli in primer, ko imata paraboli enaka vodilna koeficienta in je nastala enačba linearna:

- Paraboli nimata skupnih točk; v tem primeru je diskriminanta dobljene enačbe negativna.



Slika 8: Primeri, ko paraboli nimata skupne točke in, ko imata eno skupno točko

- Paraboli imata eno skupno točko (se dotikata); diskriminanta enačbe je v tem primeru enaka 0.
- Paraboli imata skupni dve točki; diskriminanta enačbe je pozitivna.



Slika 9: Primera, ko imata paraboli dve skupni točki

Zgled24: Izračunaj število a tako, da se bosta paraboli z enačbama $y = ax^2 - x - 2$ in $y = x^2 + 2x$ dotikali.

Enačimo $y = y$ in uredimo nastalo enačbo v obliko $(a-1)x^2 - 3x - 2 = 0$. Če naj se paraboli dotikata, je diskriminanta nastale kvadratne enačbe enaka 0. Zato je $D = (-3)^2 - 4(a-1)(-2) = 1 - 8a = 0$ in tako $a = \frac{1}{8}$. ■

Zgled25: **Izračunaj presečišča grafov funkcij $f(x) = x|x-3|$ in $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)+8$.**

V funkciji f nastopa absolutna vrednost, zato f raje zapišimo brez absolutne vrednosti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & ; \quad x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & ; \quad x < 3 \ . \end{cases}$$

Presečišča poiščemo tako, da enačimo y_f in y_g. Ločimo primera:

- $x \geq 3 : x^2 - 3x = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x = 6$ (rešitev $x = -3$ odpade, saj je $-3 < 3$).
- $x < 3 : -x^2 + 3x = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + 8 \Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$; zadnja enačba nima realnih rešitev, saj je njena diskriminanta enaka -15.

Grafa se tako sekata le v točki $P(6, 18)$. ■

5 Kvadratna neenačba

O linearni neenačbi, npr. $2x - 3 < x - 1$, smo govorili v prvem letniku. Ko govorimo o neenačbi, mislimo na tiste z neznankami, recimo $x < 3$, medtem, ko izraze, recimo $3 < 5$, imenujemo neenakost.

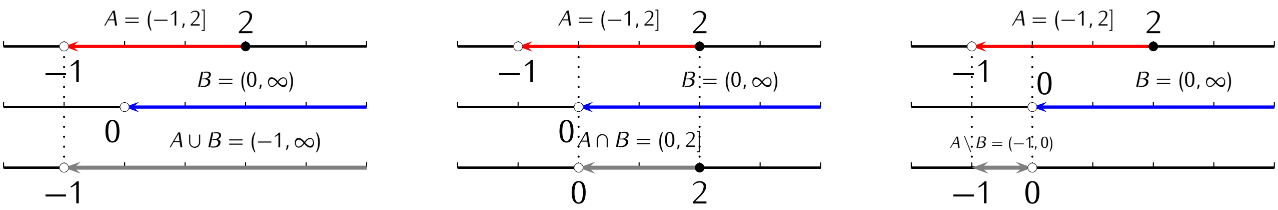
Oglejmo si nekaj že znanih dejstev o neenačbah:

- Neenačba je zgrajena iz leve strani (L), desne strani (D), med njima stoji eden od znakov neenakosti: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$; možni osnovni tipi so potem $L < D$, $L > D$, $L \leq D$, $L \geq D$.
- Množica rešitev $\mathcal{R}$ neenačbe je podmnožica realnih števil, ki ustrezajo neenačbi, torej tistih števil, pri katerih je leva stran v ustreznem odnosu z desno stranjo (večja, manjša, ...). V neenačbi $2x - 1 > 3x + 1$, je $-3 \in \mathcal{R}$, ker je $L = 2 \cdot (-3) - 1 = -7 > -8 = 3 \cdot (-3) + 1 = D$, število 0 pa ni rešitev, saj $L = 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 1 = 3 \cdot 0 + 1 = D$.
- Pri „običajnih“ levih in desnih straneh je $\mathcal{R}$ interval ali unija intervalov.
- Neenačbi sta ekvivalentni (enakovredni), če imata isto množico rešitev.
- Elementarne transformacije preoblikujejo neenačbo v ekvivalentno neenačbo, torej:
  - levi in desni strani neenačbe lahko prištejemo ali odštejemo isto število,
  - množenje ali deljenje neenačbe z 0 je tako kot pri enačbah prepovedano,
  - pri množenju z neničelnim številom moramo biti previdni; če množimo s pozitivnim številom, neenačba ohrani znak neenakosti (npr. $3 \boxed{<} 5 \Rightarrow 3 \cdot 2 \boxed{<} 5 \cdot 2$), če pa množimo z negativnim številom, se znak neenakosti obrne (npr. $3 \boxed{<} 5 \Rightarrow 3 \cdot (-2) \boxed{>} 5 \cdot (-2)$).

Za tiste, ki so pozabili, kaj so intervali, povejmo, da so to množice realnih števil, ki jih na številski premici predstavimo z daljicami ali poltraki. Delimo jih glede na to ali vsebujejo krajišče(i) daljic ali poltrakov na odprte, zaprte ter na polodprte ali polzaprte.

Zgled26: Naj bo $A = (-1, 2]$ in $B = (0, \infty)$. Zapiši z intervalom množice: $A \cup B$, $A \cap B$ in $A \setminus B$.

Spomnimo se, da simbol $\cup$ pomeni unijo množic, torej so v množici $A \cup B$ elementi, ki so bodisi v množici A, bodisi v množici B, bodisi v obeh. Simbol $\cap$ pomeni presek množic, torej množico v kateri so le elementi, ki so hkrati v množicah A in B, simbol $\setminus$ pa pomeni razliko množic (uporabljamo tudi običajni $-$, torej $A \setminus B = A - B$), recimo v množici $A \setminus B$ so elementi, ki so v A, pa niso hkrati v B. Če so množice intervali, zaradi večje preglednosti račune napravimo s slikami:



Slika 10: $A \cup B = (-1, \infty)$, $A \cap B = (0, 2]$ in $A \setminus B = (-1, 0)$

Iz slike ugotovimo, da je $A \cup B = (-1, \infty)$, $A \cap B = (0, 2]$ in $A \setminus B = (-1, 0)$. ■

Zgled27: Izračunaj, za katere vrednosti neodvisne spremenljivke x so vrednosti funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ negativne.

Naloga zahteva, da poiščemo tiste vrednosti x pri katerih bo $f(x) < 0$. Nalogo interpretirajmo geometrijsko. Graf kvadratne funkcije $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ znamo narisati, na grafu poiščemo točke z negativno ordinatov ($y = x^2 - 2x - 3 < 0$), abscise teh točk pa so ravno rešitve naše neenačbe. Abscise teh točk sestavljajo interval $(-1,\ 3)$, zato je množica rešitev naše neenačbe $\mathcal{R} = (-1,\ 3)$ ■

definicija kvadratne neenačbe

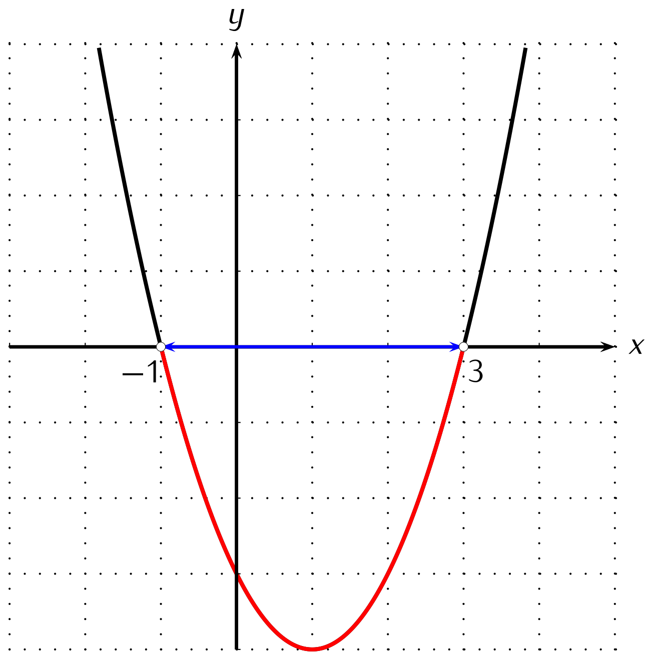
Neenačbo, ki je ekvivalentna eni izmed neenačb

$$\boxed{ax^2 + bx + c < 0, \qquad ax^2 + bx + c > 0, \qquad ax^2 + bx + c \leq 0, \qquad ax^2 + bx + c \geq 0}$$

imenujemo kvadratna neenačba s koeficienti a, b in c. Običajno uredimo neenačbo tako, da je $a > 0$.

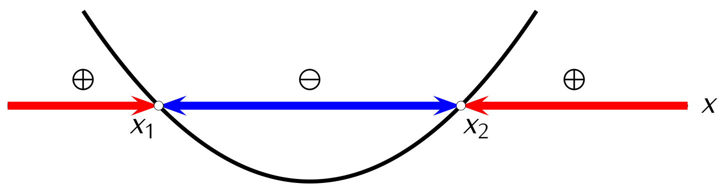
V reševanju zgleda odkrijemo postopek reševanja kvadratne neenačbe:

- Neenačbo uredimo do ene od oblik: $ax^2 + bx + c \underset{>}{\overset{<}{=}} 0$.



Slika 11: Graf funkcije $y = x^2 - 2x - 3$ in na njem označene točke z negativno ordinato

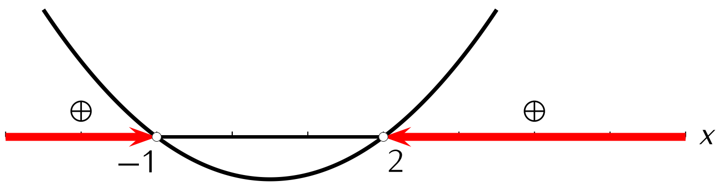
- Izračunamo ničli x_1 in x_2 kvadratne funkcije na levi strani neenačbe.
- Skiciramo približen graf kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ (narišemo abscisno os, ničli in upoštevamo obliko - po dogovoru $a > 0 \Rightarrow \cup$).



- Na sliki preberemo množico rešitev $\mathcal{R}$:
  - Za neenačbo $ax^2 + bx + c < 0$: $\mathcal{R} = (x_1,\ x_2)$.
  - Za neenačbo $ax^2 + bx + c \leq 0$: $\mathcal{R} = [x_1,\ x_2]$.
  - Za neenačbo $ax^2 + bx + c > 0$: $\mathcal{R} = (-\infty,\ x_1) \cup (x_2,\ \infty)$.
  - Za neenačbo $ax^2 + bx + c \geq 0$: $\mathcal{R} = (-\infty,\ x_1] \cup [x_2,\ \infty)$.

Zgled28: Reši neenačbo $(2x-1)x > x+4$.

- Urejanje $2x^2 - 2x - 4 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$.
- Ničli: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \Rightarrow x_1 = -1$ in $x_2 = 2$.
- Približna skica.



- Na sliki preberemo množico rešitev $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

■

Množica rešitev kvadratne neenačbe je lahko tudi prazna ($\mathcal{R} = \emptyset$), recimo za neenačbo $x^2 + 3x + 7 < 0$ (graf pripadajoče funkcije v celoti leži nad osjo x), lahko pa množico rešitev sestavljajo vsa realna števila ($\mathcal{R} = \mathbb{R}$), kot v primeru neenačbe $x^2 + 3x + 7 > 0$.

Zgled29: Reši neenačbo $\dfrac{2x-1}{3x+2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Neenačba na prvi pogled ni kvadratna, je racionalna. Lahko pa jo preoblikujemo v ekvivalentno kvadratno neenačbo. Prva misel, ki nas spreleti, je odpraviti ulomke. Skupni imenovalec je $2(3x+2)$, z njim množimo in odpravimo ulomke. Pri enačbah bi to še šlo, pri neenačbah pa se lahko znak neenakosti spremeni. Če recimo v skupnem imenovalcu $2(3x+2)$ izberemo $x = 0$, množimo s pozitivnim številom, če pa izberemo $x = -1$, množimo z negativnim številom, zato bi se v neenačbi znak $\leq$ spremenil v znak $\geq$. Iz zagate se rešimo tako, da celo neenačbo pomnožimo z $2(3x+2)^2$; tako odpravimo in ulomke, pa tudi znak neenakosti ostane enak, saj množimo s pozitivnim številom. Paziti moramo le na to, da iz množice rešitev izločimo število $x = -\frac{2}{3}$, saj bi v tem primeru množili z 0.

Po množenju z $2(3x+2)^2$ neenačba postane: $2(2x-1)(3x+2) \leq (3x+2)^2$. Naslednji fazi reševanja sta urejanje in iskanje ničel ustrezne kvadratne funkcije. V tem primeru ničli hitreje poiščemo z razstavljanjem (le malo se moramo razgledati po neenačbi: izpostavimo $(3x+2)$). Dobimo:

$$2(2x-1)(3x+2) \leq (3x+2)^2 \Rightarrow (3x+2)((4x-2)-(3x+2)) \leq 0 \Rightarrow (3x+2)(x-4) \leq 0$$

Na koncu ugledamo ničli $x_1 = -\frac{2}{3}$ in $x_2 = 4$ in iz primerne slike še množico rešitev $\mathcal{R} = (-\frac{2}{3}, 4]$. V množici rešitev smo izločili $x = -\frac{2}{3}$, kar smo utemeljili zgoraj. ■

Pogosto reševanje kake naloge preoblikujemo na reševanje kvadratne neenačbe, npr.:

Zgled30: Za katere vrednosti realnega števila a ima enačba $(a-2)x^2 + (3a-1)x + a - 2 = 0$ različni realni rešitvi.

Kvadratna enačba ima različna realna korena, ko je njena diskriminanta D pozitivna. Zato izračunajmo diskriminanto:

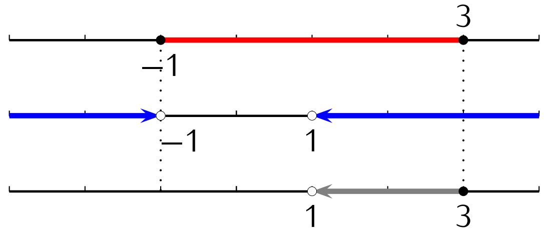
$$D = b^2 - 4ac = (3a-1)^2 - 4(a-2)^2 = 5a^2 + 10a - 15 = 5(a^2+2a-3) = 5(a+3)(a-1)$$

Ničli diskriminante sta -3 in 1, zato ima neenačba $D > 0$ rešitev: $a < -3$ ali $a > 1$, ki je tudi rešitev naše naloge. ■

Sisteme kvadratnih neenačb z eno neznanko preoblikujemo na reševanje več kvadratnih neenačb, množica rešitev sistema pa je presek množic rešitev posameznih neenačb sistema. Za primer si oglejmo naslednji sistem:

Zgled31: Reši sistem neenačb $x^2 \leq 2x + 3$ in $x^2 > 1$.

Obe neenačbi sistema uredimo ($x^2 - 2x - 3 \leq 0$ in $x^2 - 1 > 0$), ju rešimo in zapišemo rešitvi $\mathcal{R}_1 = [-1, 3]$ in $\mathcal{R}_2 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Množica rešitev je potem presek množic $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = (1, 3]$. Presek je najbolje prebrati iz ustrezne slike. ■



6 Povzetki in naloge

Povzetki:

- Enačbo kvadratne funkcije lahko zapišemo v treh oblikah:
  - $f(x) = ax^2 + bx + c$ (splošna, razvita),
  - $f(x) = a(x-p)^2 + q$ (temenska),
  - $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (ničelna).

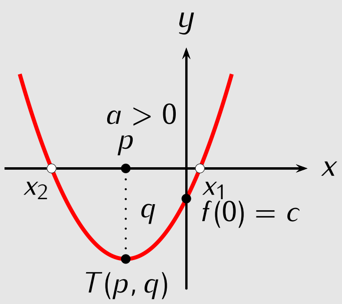
  Števila a, b, c, ki nastopajo v splošni obliki se zapored imenujejo vodilni, linearni in prosti koeficient, števili p, q sta koordinati temena, x_1 in x_2 pa sta ničli funkcije.

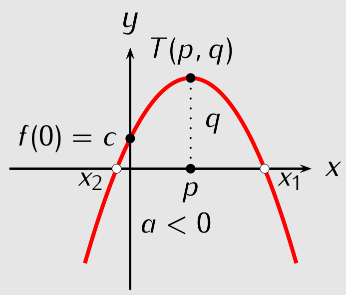
- Med pomembnejše količine, ki nastopajo pri kvadratni funkciji je diskriminanta D, ki jo izračunamo s formulo $D = b^2 - 4ac$.

- V vsaki obliki nastopajo trije parametri (koeficienti), ki so povezani z naslednjimi formulami (v zapisu f pomeni katerokoli obliko kvadratne funkcije):

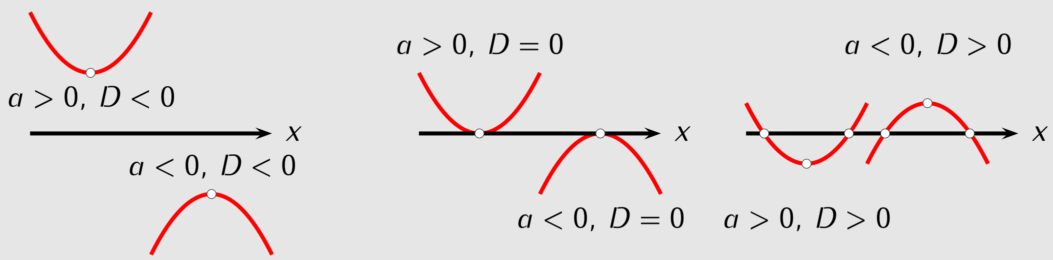
$$p = \frac{-b}{2a},\; q = \frac{-D}{4a},\; x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\; x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\; p = \frac{x_1+x_2}{2},\; q = f(p)$$

- Graf kvadratne funkcije se imenuje parabola in ima dve značilni obliki. Graf narišemo tako, da izračunamo značilne točke.





- V odvisnosti od vodilnega koeficienta a in diskriminante D kvadratne funkcije ločimo naslednje primere grafov:



- Kvadratna enačba je taka enačba, ki jo lahko z običajnimi postopki za preoblikovanje enačb preoblikujemo do oblike $ax^2 + bx + c = 0$, kjer $a \neq 0$. Rešimo jo tako, da bodisi razstavimo nastali tričlenik, bodisi uporabimo formuli za x_1 in x_2.
- Kvadratna neenačba je taka neenačba, ki jo lahko z običajnimi postopki za preoblikovanje enačb preoblikujemo do ene od oblik $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$. Rešimo jo tako, da narišemo približen graf kvadratne funkcije (z ničlami) na levi strani neenačbe in iz grafa preberemo interval ali intervale rešitev.

Naloge:

1. Zapiši kvadratne funkcije v vseh treh oblikah in nariši njihove grafe (slike grafov preveri s kakim programom dinamične geometrije):

   (a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
   (b) $f(x) = 2x^2 - 4$
   (c) $f(x) = (2 + x)(2 - x)$
   (d) $f(x) = \frac{1}{2}x(x - 4) + 4$
   (e) $f(x) = (2x - 4)(x - 4) - 6$
   (f) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

   [$f(x) = (x-1)^2 - 4 = (x+1)(x-3)$; $f(x) = 2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; $f(x) = -x^2 + 4 = -(x-2)(x+2)$; $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = \frac{1}{2}(x-(2+4i))(x-(2-4i))$; $f(x) = 2x^2 + 4x + 10 = 2(x+1)^2 + 8 = 2(x-(-1-2i))(x-(-1-2i))$; $f(x) = -(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4} = -(x+1)(x-4)$]

2. Iz danih podatkov poišči kvadratno funkcijo $y = f(x)$ in jo nariši (slike grafov preveri s kakim programom dinamične geometrije):

   (a) teme $T(2, 1)$, začetna vrednost 3. [$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$]
   (b) teme $T(-1, -\frac{1}{2})$, graf poteka skozi koordinatno izhodišče. [$y = \frac{1}{2}x^2 + x$]
   (c) ničli $-1, 3$, ekstremna vrednost -4. [$y = x^2 - 2x - 3$]
   (d) abscisa temena 2, graf poteka skozi točki $A(1, -4)$, $B(-2, -13)$. [$y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{29}{5}$]
   (e) graf vsebuje točke $A(1, -4)$, $B(2, 0)$ in $C(-1, -6)$. [$y = x^2 + x - 6$]
   (f) $f(-10) = -3$, $f(0) = 7$, $f(5) = \frac{9}{2}$ [$y = -\frac{1}{10}x^2 + 7$]
   (g) teme v presečišču premic $x - 2y = 0$ in $x + y + 3 = 0$, njen graf pa vsebuje točko $A(0, -3)$. [$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$]

3. Uredi in reši naslednje enačbe:

   (a) $(3x - 4)^2 + (4x + 2)^2 + 8(x - 7) = 0$
   (b) $\dfrac{2}{x^2 + 2x + 2} - \dfrac{1}{3x^2 + 3x + 1} = 0$
   (c) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$
   (d) $\dfrac{1}{x + a + b} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

(e) $2x(x-2)^2 = x^2 + 4x$

(f) $(x+4)^3 - x(x-1)(x+1) = 35(x+2)$

(g) $\sqrt{3-x} + 2x = 3$

(h) $^*(x^2-7x+10)^2 - 2(x^2-7x+10) - 8 = 0$

$[\pm\frac{6}{5};\ 0,\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b};\ -a,\ -b;\ 0,\ \frac{9\pm\sqrt{17}}{8};\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ 1,3,4,6\ ]$

4. Število 21 lahko zapišimo kot vsoto dveh števil, katerih vsota kvadratov je 261. Kateri sta ti dve števili ? [6, 15]

5. Pravokotnik ima obseg 46 cm in ploščino 120 cm^2. Koliko meri diagonala? [17 cm]

6. * Podjetje mora v določenem številu dni izdelati 800 izdelkov. Po nekaj dneh, v katerih so izdelali 25% naročila, so povečali dnevno normo za 10 izdelkov in tako izpolnili naročilo dva dni pred rokom. V koliko dneh so izpolnili naročilo ? [14]

7. * Če sta x_1 in x_2 korena kvadratne enačbe $x^2 - 2x + 3 = 0$, izračunaj:

   (a) $(x_1 + x_2)^2$

   (b) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$

   (c) $\dfrac{2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2}{(x_1 - x_2)^2}$

   (d) $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1} + x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

$[4;\ -\frac{2}{9};\ \frac{1}{8};\ -\frac{4}{3}\ ]$

8. * Za katere vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ ima kvadratna enačba $(a+2)x^2 - 8x - 5a + 8 = 0$ realne rešitve ? [$a \in (-\infty, -\frac{2}{5}] \cup [0, +\infty)$]

9. Računsko in grafično poišči presečišča naslednjih parov krivulj:

   (a) $y = x^2 + 4x - 6,\ y = 2x + 2$ [$(2,6),\ (-4,-6)$]

   (b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{23}{8},\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$ [$(-\frac{1}{2},2),\ (4,\frac{7}{8})$]

   (c) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 8,\ y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - 7$ [se ne sekata]

   (d) $y = x^2 - 5x + 9,\ y = 3x^2 - x + 3$ [$(-3,33),\ (1,5)$]

   (e) * $y = |x^2 - 2x - 3|,\ y = ||x| - 1|$ [eno od presečišč je $(-1,0)$]

10. Določi $n \in \mathbb{R}$ tako, da bo premica z enačbo $y = 2x + n$ tangenta na parabolo z enačbo $y = x^2$. Določi še dotikališče. [$n = -1,\ D(1,1)$]

11. Določi $c \in \mathbb{R}$ tako, da se bosta paraboli z enačbama $y = x^2$ in $y = 2(x-1)^2 + c$ dotikali. Koliki sta koordinati dotikališča ? [$c = 2,\ D(2,4)$]

12. Kje je definirana funkcija $f(x) = \sqrt{-x^2 + 13x - 40}$. Kaj pa funkcija $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$?

[$[5,8],\ (5,8)$]

13. Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo teme parabole $y = 2x^2 + 4x + a + 1$ ležalo na premici $5x + 2y - 1 = 0$. Nariši ustrezno sliko v kakem programu dinamične geometrije. [$a = 4$]

14. * Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo vsota kvadratov ničel funkcije $f(x) = x^2 + ax - 2(a + 1)$ najmanjša. [-2]

15. Reši naslednje neenačbe :

    (a) $x(6x + 7) \geq 5$

    (b) $\dfrac{x}{x+1} < 0$

    (c) $\dfrac{3x + 12}{9 - x} < 1$

    (d) $^*\dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3} > 0$

    [$x \leq -\frac{5}{3}$ ali $x \geq \frac{1}{2}$; $x \in (-1, 0)$; $x \in (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (9, +\infty)$; $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (1, 3) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$]

16. * Avtocesti se sekata pod pravim kotom. Po prvi vozi avtobus A_1 s hitrostjo 60 km/h, po drugi pa avto A_2 s hitrostjo 80 km/h. Oba vozita proti križišču in sta ob 8^{oo} od njega oddaljena zapored 10 km in 20 km. Čez koliko časa bo oddaljenost med njima najmanjša ? [$\frac{11}{50}$ ure]

17. *Parabola $\mathcal{P}$ z enačbo $y = x^2 - 3x + 3$ seka ordinatno os v točki A. Premici p in q sta vzporedni simetrali lihih kvadrantov; p seka parabolo $\mathcal{P}$ v točkah A in B, premica q pa se je dotika v točki C.

    (a) Koliko meri tetiva AB? [$4\sqrt{2}$]

    (b) Izračunaj koordinati točke C. [$(2, 1)$]

18. * Premici $y = 3x$ in $y = 8 - x$ se sekata v točki N.

    (a) Izračunajte ploščino $\triangle$OMN, ki ga premici oklepata z osjo x. [24]

    (b) $\triangle$OMN včrtamo pravokotnik ABCD. Stranica AB leži na osi x. Poišči koordinate točke A tako, da ploščina pravokotnika ABCD največja možna. [$A(1, 0)$, $p = 12$]

19. *Funkcija f je definirana s predpisom: $f(x) = x^2 + 6x + 20 + k(x^2 - 3x - 12)$, $k \in \mathbb{R}$

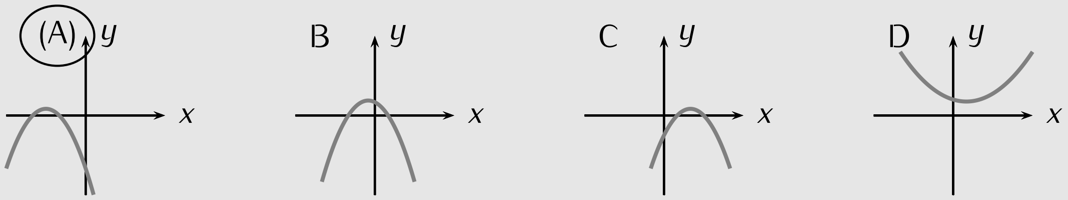
    (a) Za katere vrednosti parametra k je graf funkcije f premica? [-1]

    (b) Izračunaj k tako, da bosta korena enačbe $f(x) = 0$ nasprotno enaka. [2]

    (c) Poišči k tako, da bo minimum funkcije f pri $x = 2$. [-10]

Zahtevnejše naloge:

20. Kateri od spodnjih grafov predstavlja graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, kjer so a, b in c negativna realna števila.



21. Za naslednje izjave preveri ali so pravilne ali nepravilne:

    (a) Vse rešitve neenačbe $x > \frac{x^2}{2}$ ležijo na intervalu $(0, 2)$. [pravilno]

    (b) Funkcija $f(x) = x(6 - x)$ ima zalogo vrednosti interval $(-\infty, 9]$. [pravilno]

    (c) Množica realnih števil k, za katere je funkcija $f(x) = x^2 - (k-1)x + 1$ pozitivna za vsako realno število, je interval $(-2, 2)$. [nepravilno, interval $(-1, 3)$ je tak]

22. Janez je postavil ograjo vrta pravokotne oblike, ki je ograjen s treh strani. Dolžina ograje je 60 m, ploščina vrta pa meri 352 m^2. Koliko merita stranici vrta?

23. Dani sta funkciji $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ in $g(x) = ax^2 + 1$. V koordinatni sistem nariši graf funkcije g za $a = 1$ in izračunaj natančni vrednosti koordinat presečišč grafov funkcij f in g za $a = 1$.

24. Naj bo $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ in $g(x) = x^2 - 2x - m$. Izračunaj m tako, da bosta najmanjši vrednosti funkcij f in g enaki. Pri največjem takem m reši neenačbo $2f(x) \geq g(x - 1)$.

25. Če bi se grafično računalo podražilo za toliko odstotkov, kolikor znaša njegova sedanja cena v evrih, bi morali za 12 računal plačati 1287 €. Kolikšna je sedanja cena enega računala? [65 €]

26. Kvadratna funkcija ima teme v presečišču premic z enačbama $x - 2y = 0$ in $x + y + 3 = 0$, njen graf pa poteka skozi točko $A(0, -3)$. Zapiši enačbo te funkcije. [$y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$]

27. Reši enačbo $\sqrt{3}x^2 + 2x = \sqrt{3}$. [$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$]

28. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$. [$x \in (-\infty, -2\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$]

29. Kolikšna je ploščina trikotnika, katerega oglišča so v temenu in presečiščih grafa kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 5$ z abscisno osjo? [27]

30. Peter je zapisal množico vseh števil, ki so večja od dvakratne vrednosti svojih kvadratov, v obliki intervala. Kaj je zapisal? [$(0, \frac{1}{2})$]

31. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2 - 2mx + m$.

    (a) Za katere vrednosti parametra m se parabola dotika abscisne osi? [0, 2]

    (b) Za katere vrednosti parametra m je ordinata temena parabole pozitivna? [$m \in (0, 2)$]

32. Za katera realna števila k je funkcija $f(x) = x^2 - (k-1)x + 1$ pozitivna za vsak $x \in \mathbb{R}$? [$-1 < k < 3$]

33. Dani sta enačbi funkcij $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ in $g(x) = ax^2 + 1$, $a \in \mathbb{R}$. V koordinatni sistem nariši graf funkcije $g(x)$ za $a = -1$ in izračunaj natančne vrednosti presečišč funkcije $f(x)$ s funkcijo $g(x)$. [$(\sqrt{2}, -1)$, $(-\sqrt{2}, -1)$]

34. V živalskem vrtu so opice v dveh kletkah. V prvi kletki sta dve opici več kot v drugi. Oskrbnik živalskega vrta je v vsaki kletki opicam razdelil 48 banan. Vsaka opica iz druge kletke je dobila 4 banane več kot vsaka opica iz prve kletke. Koliko opic je v vsaki kletki? [6, 4]