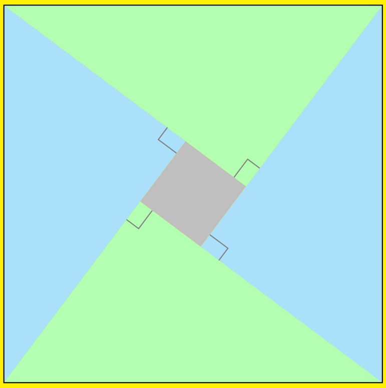
Geometrija 2

(razmerja daljic, podobni trikotniki, podobni liki, izreki v pravokotnem trikotniku)

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.



2020

Kazalo

1 Razmerja daljic

razmerje daljic

Vzemimo daljici AB in CD in z $|AB| = a$ in $|CD| = b$ označimo njuni **dolžini**. Količnik $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{a}{b}$ imenujemo **razmerje daljic** AB in CD. Razmerje lahko zapišemo tudi v eni od oblik:

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = AB : CD = \frac{a}{b} = a : b}$$

sorazmerje daljic

Sorazmerje (dvorazmerje) dveh parov daljic, recimo para a, b in para c, d, je enakost $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ali, zapisano v drugi obliki, enakost $a : b = c : d$. Člena a in d sorazmerja imenujemo tudi zunanja člena, člena b in d pa sta v tem primeru notranja člena.

$$a \quad : \quad b \quad = \quad c \quad : \quad d$$

Sorazmerje zapišemo lahko tudi z enačbo $a \cdot d = b \cdot c$, ki jo dobimo bodisi tako, da opravimo ulomke v prvi obliki, bodisi zmožimo zunanja člena a in d ter notranja člena b in c v dvorazmerju, na koncu pa zmnožka izenačimo, torej:

$$\boxed{a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

Zgled 1: a) Na zemljevidu Slovenije v merilu $1 : 750\,000$ je razdalja med dvema krajema 6 cm. Koliko v naravi meri zračna razdalja med tema krajema?
b) Na zemljevidu je razdalja med dvema krajema 2,5 cm, v naravi pa sta ista kraja oddaljena (v zračni liniji) 25 km. V kakšnem merilu je izdelan zemljevid?

Merilo zemljevida pove, koliko enot dolžine meri 1 enota dolžine v naravi, recimo, če je merilo zemljevida $1 : 10\,000$, je 1 cm na zemljevidu enak dolžini $1\,\text{cm} \cdot 10\,000 = 10\,000\,\text{cm} = 100\,\text{m}$ v naravi. Našo nalogo uženemo s sorazmerjem

$$\boxed{\text{dolžina na zemljevidu}} : \boxed{\text{dolžina v naravi}} = 1 : 750\,000 \Rightarrow 6\,\text{cm} : x = 1 : 750\,000$$

Iz sorazmerja izračunamo $x \cdot 1 = 6\,\text{cm} \cdot 750\,000 = 4\,500\,000\,\text{cm} = 45\,\text{km}$.

V primeru b) zapišemo sorazmerje $\Rightarrow$ $2{,}5\,\text{cm} : 25\,\text{km} = 1 : x$. Poenotimo enoti in izračunamo:

$$2{,}5\,\text{cm} \cdot x = 1 \cdot 2\,500\,000\,\text{cm} \Rightarrow x = \frac{2\,500\,000\,\text{cm}}{2{,}5\,\text{cm}} = 1\,000\,000$$

Zemljevid je torej narisan v razmerju $1 : 1\,000\,000$. ■

trorazmerje daljic

Trorazmerje treh parov daljic a_1 in a_2, b_1 in b_2, c_1 in c_2 je sistem treh sorazmerij, ki ga zapišemo v dveh oblikah:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \text{ali} \qquad a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

V trorazmerju nastopajo tri enačbe, vendar je ena neposredna posledica drugih dveh enačb. Zato iz trorazmerja lahko izračunamo **dve** neznani količini, ne pa **treh**, kot jih lahko izračunamo v običajnih sistemih s tremi enačbami.

koeficint podobnosti

Razmerju $\frac{a_1}{a_2}$ pravimo **koeficient podobnosti**; običajno ga označimo z k (seveda sta tudi razmerji $\frac{b_1}{b_2}$ in $\frac{c_1}{c_2}$ enaki k). S koeficientom podobnosti lahko trorazmerje zapišemo z enačbami:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k \Rightarrow a_1 = k \cdot a_2,\ b_1 = k \cdot b_2,\ c_1 = k \cdot c_2$$

Zgled 2: Izračunaj neznanki x in y v sistemu $x : 3 : y = 2 : 4 : 7$.

Prvi način: Trorazmerje spremenimo v dve sorazmerji tako, da v enačbi trorazmerju na vsaki strani izbrišemo enakoležni količini, v našem primeru:

$$x : 3 : \cancel{y} = 2 : 4 : \cancel{7} \Rightarrow x : 3 = 2 : 4 \Rightarrow 4 \cdot x = 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$$

$$\cancel{x} : 3 : y = \cancel{2} : 4 : 7 \Rightarrow 3 : y = 4 : 7 \Rightarrow 4 \cdot y = 3 \cdot 7 \Rightarrow y = 5\frac{1}{4}$$

Drugi način: Vpeljemo novo neznanko, koeficinet podobnosti k. Sistem $x : 3 : y = 2 : 4 : 7$ tako spremenimo v sistem $x = 2k$, $3 = 4k$, $y = 7k$. Iz srednje enačbe izračunamo $k = \frac{3}{4}$ in izračunano uvrstimo v ostali enačbi. Dobimo: $x = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ in $y = 7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ ■

Tako kot lahko ulomke razširjamo in krajšamo, lahko tudi sorazmerja krajšamo ali razširjamo. Torej, če je $a : b = m : n$, je $a : b = (k \cdot m) : (k \cdot n)$ ali $a : b = (\frac{m}{k}) : (\frac{n}{k})$ za poljubno pozitivno število k.

Zgled 3: Za tri pozitivna števila a, b in c vemo, da je $a + b + c = 13$ in $a : b = 1 : 2$ in $b : c = 3 : 2$.

1.način: Ker je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 2$, je $b = 2a$ in $3c = 2b$. Nastali sistem 3×3 rešimo z zamenjalnim načinom: $c = \frac{2b}{3} = \frac{2 \cdot 2a}{3} = \frac{4a}{3}$. Potem je $a + 2a + \frac{4a}{3} = 13$ in $3a + 6a + 4a = 39 \Rightarrow 13a = 39 \Rightarrow a = 3$. Zato je $a = 3, b = 6, c = 4$.

2.način: Razširimo razmerji $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 2$ do trorazmerja. V prvem sorazmerju je drugi člen b, v drugem pa je b prvi člen. Zato razširimo obe sorazmerji do skupnega večkratnika obeh sorazmernostnih faktorjev b, torej do večkratnika 2 in 3. Vzemimo kar najmanjšega 6. Dobimo: $a : b = 1 : 2 = 3 : 6$ in $b : c = 3 : 2 = 6 : 4$. Zato je $a : b : c = 3 : 6 : 4$ in potem $a = 3x$, $b = 6x$, $c = 4x$. Vsota nam da enačbo: $3x + 6x + 4x = 13 \Rightarrow x = 1$. Tako je $a = 3, b = 6, c = 4$. ■

Trorazmerje lahko posplošimo tudi na večrazmerje $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$, ki pomeni sistem enačb $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Pri tem so $a_1, a_2, \ldots a_n$ in $b_1, b_2, \ldots b_n$ poljubne številske količine, ki jih merimo z enako enoto. Zadnji sistem enačb s koeficientom podobnosti k zapišemo v obliki: $a_1 = k \cdot b_1$, $a_2 = k \cdot b_2$, $a_3 = k \cdot b_3, \ldots, a_n = k \cdot b_n$. Torej veljajo naslednji enakovredni (ekvivalentne) zapisi:

$$\boxed{a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k \Leftrightarrow a_1 = k \cdot b_1,\ a_2 = k \cdot b_2, \ldots, a_n = k \cdot b_n}$$

Zgled 4: Velikost enega od notranjih kotov konveksnega šestkotnika meri $120°$. Ostalih pet notranjih kotov je v razmerju $3 : 4 : 5 : 6 : 7$. Izračunaj velikost vseh notranjih kotov šestkotnika.

Vsota notranjih kotov šestkotnika je $(6 - 2) \cdot 180° = 720°$. Ker eden med njimi meri $120°$, ostali prispevajo k vsoti $600°$. Iskane kote označimo z x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Ker so v razmerju $3 : 4 : 5 : 6 : 7$, je $x_1 = 3k$, $x_2 = 4k$, $x_3 = 5k$, $x_4 = 6k$, $x_5 = 7k$. Zato je $3k + 4k + 5k + 6k + 7k = 600°$ in $k = \frac{600°}{25} = 24°$. Torej je $x_1 = 3 \cdot 24° = 72°$, $x_2 = 4 \cdot 24° = 96°$, $x_3 = 5 \cdot 24° = 120°$, $x_4 = 6 \cdot 24° = 144°$, $x_5 = 7 \cdot 24° = 168°$. ■

Naloge

1. Izračunaj neznane količine iz naslednjih razmerij:

   (a) $2 : 3 = 8 : x$ (c) $3 : 2 = 15 : x$ (e) $7 : 10 = x : 80$

   (b) $1 : 4 = x : 12$ (d) $5 : 12 = 40 : x$ (f) $x : 5 = 2x : (x + 3)$

   [12; 3; 10; 96; 56; $7, 0$(pogojno)]

2. Podaljšaj daljico z dolžino 40 cm v razmerju 8 : 5. Koliko cm meri podaljšek? [24 cm]

3. Skrajšaj daljico z dolžino 40 cm v razmerju 8 : 5. Koliko cm meri razlika med prvotno in novo dolžino? [15 cm]

4. Trije koti so v razmerju 4 : 3 : 2. Izračunaj jih, če veš, da sta prvi in tretji v razmerju suplementarna. [$120°$, $90°$, $60°$]

5. Izračunaj neznanki x in y v naslednjem trorazmerju: $\dfrac{x+y}{8} = \dfrac{x-y}{4} = \dfrac{2}{3}$. [$x = 4, y = \frac{4}{3}$]

6. Bazen ima obliko pravokotnika z dolžino 36 m in širino 20 m.

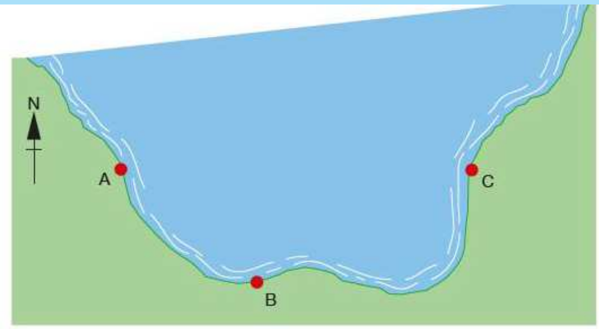
   (a) Nariši načrt tlorisa bazena tako, da bo 1 cm v načrtu pomenil 4 m v naravi.

   (b) V kolikšnem razmerju je narisan načrt? [1 : 400]

   (c) V načrtu izmeri diagonalo bazena in meritev pretvori v vrednost v naravi. Rezultat preveri s Pitagorovim izrekom, ki ga poznaš iz osnovne šole. Rezultata zaokroži na cm in m natančno. [10 cm, 41 m]

   (d) Izračunaj ploščino načrta tlorisa bazena in ploščino tlorisa v naravi. V kolikšnem razmerju sta ploščini? [45 cm^2, 720 m^2, 1: 160 000 = $1^2 : 400^2$]

7. Tri radarske postaje, A, B, in C (slika), sprejemajo signal iz čolna na odprtem morju. Postaja C je 24 km vzhodno od postaje A, razdalja AB je 12 km in razdalja BC je enaka 18 km. Ugotovljeno je bilo, da so vse tri postaje enako oddaljene od čolna.



   (a) Nariši zemljevid postaj v razmerju 1 cm na zemljevidu za vsake 3 km v naravi.

(b) Na zemljevidu določi položaj čolna.

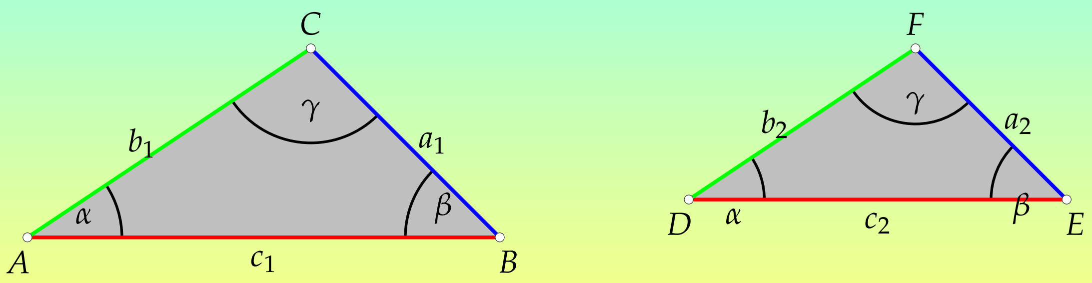
(c) Na zemljevidu izmeri oddaljenost čolna od postaje A in jo preračunaj v razdaljo v naravi. [12,4 km]

2 Podobni trikotniki

V vsakdanjem življenju govorimo, da sta dve stvari podobni, če imata isto obliko, le velikost je običajno različna. Pri likih obliko določajo koti. Najenostavnejši lik s koti je trikotnik, zato najprej definirajmo, kdaj sta si podobna dva trikotnika.

podobni trikotniki

Trikotnika sta si **podobna**, če imata **enake notranje kote**. Seveda pa zadostuje že, če imata enaka dva notranja kota, saj sta v takem primeru tudi tretja notranja kota enaka.



Na sliki imamo podobna trikotnika $\triangle ABC$ in trikotnika $\triangle DEF$. Podobnost zapišemo s simbolom $\sim$, torej za trikotnika na sliki zapišemo $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle DEF}$. Pri zapisu pazimo, da oglišča zapišemo v takem vrstnem redu, da pri enakoležno zapisanih ogliščih ležita enaka kota, torej:

$$\boxed{\triangle \underbrace{A}_{\alpha}\underbrace{B}_{\beta}\underbrace{C}_{\gamma} \sim \triangle \underbrace{D}_{\alpha}\underbrace{E}_{\beta}\underbrace{F}_{\gamma}}$$

enakoležn stranice

Enakoležni stranici podobnih trikotnikov sta tisti, ki ležita nasproti enakih kotov; tako so na sliki enakoležni naslednji pari stranic:

- $AB = c_1$ in $DE = c_2$ (nasproti kota γ),
- $AC = b_1$ in $DF = b_2$ (nasproti kota β) in
- $BC = a_1$ in $EF = a_2$ (nasproti kota α).

Najpomebnejša trditev za podobne trikotnike je tale trditev o enakoležnih stranicah:

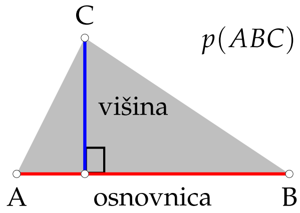
Izrek o podobnih $\triangle$

V podobnih trikotnikih je razmerje enakoležnih stranic enako, torej je:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

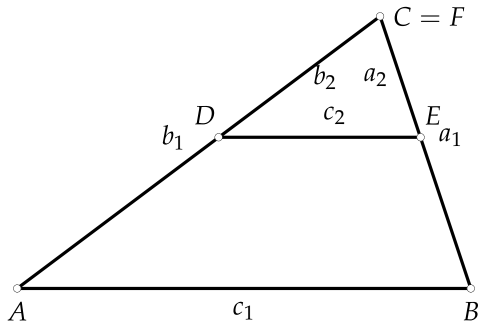
V naslednjih vrsticah je v pomanjšani pisavi zapisana utemeljitev trditve. Manj zahtevni bralci branje vrstic opustijo.

Seveda moramo v matematiki trditve, ki jih izrečemo, z logičnim sklepanjem utemeljiti. Pri utemeljitvi bomo sledili starogrškim matematikoma Talesu in Evklidu. Iz osnovne šole si bomo sposodili trditev, da je ploščina trikotnika enaka polovičnemu produktu osnovnice in višine na osnovnico.

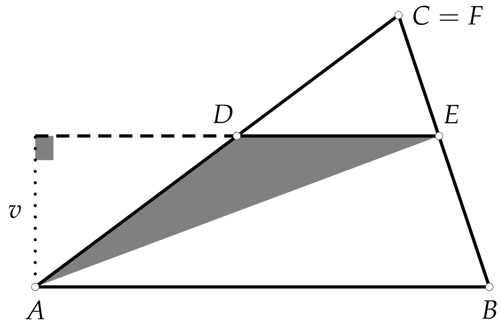


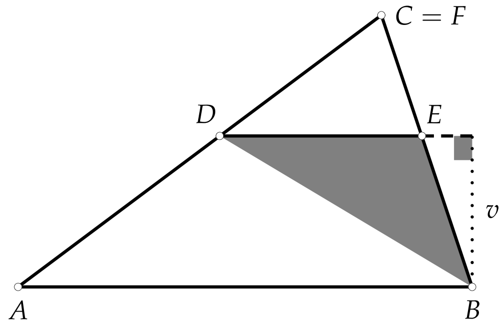
$$p(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \text{osnovnica} \cdot \text{višina}$$

Vzemimo, da sta trikotnika ABC in DEF podobna in $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ ter $\sphericalangle C = \sphericalangle F$. Naj ima prvi trikotnik stranice a_1, b_1, c_1, v drugem pa naj bodo v istem vrstnem redu enakoležne stranice a_2, b_2, c_2. Ker imata trikotnika enaka notranja kota pri oglišču C in F, lahko "manjšega" položimo v "večjega" tako, da sovpadeta notranja kota pri ogliščih C in F, stranici, ki ležita njima nasproti pa sta potem vzporedni, v kar se prepričamo s preporostim razmislekom in upoštevanjem dejstev o enakosti kotov z vzporednimi kraki.

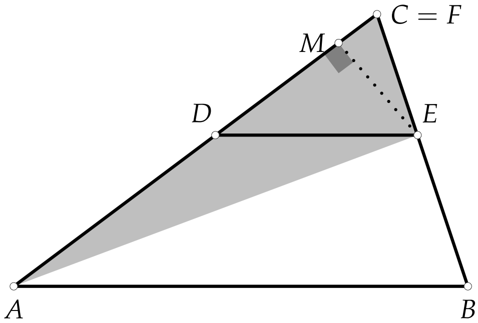


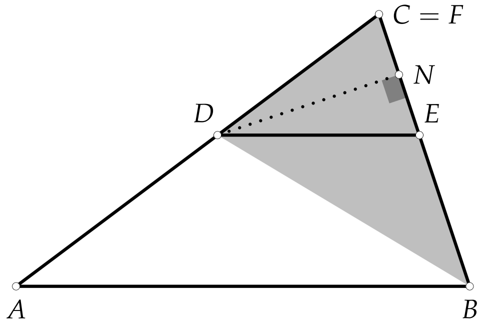
Naj $p(XYZ)$ pomeni ploščino trikotnika $\triangle ABC$. Ker imata enako osnovnico in enako višino, imata trikotnika $\triangle AED$ in $\triangle BED$ enaki ploščini, torej $p(AED) = p(BED)$.





Trikotnik $\triangle AEC$ je sestavljen iz trikotnikov $\triangle AED$ in $\triangle DEC$, trikotnik $\triangle BCD$ pa sestavljata trikotnika $\triangle DEC$ in $\triangle BED$. Ker je $p(AED) = p(BED)$, je zato $p(AEC) = p(BCD)$.





Kar smo ugotovili za ploščine, uporabimo za primerjanje razmerij enakoležnih stranic:

$$\frac{CA}{CD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CA \cdot EM}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot EM} = \frac{p(AEC)}{p(DEC)} = \frac{p(BDC)}{p(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CB \cdot DN}{\frac{1}{2} \cdot CE \cdot DN} = \frac{CB}{CE}$$

Začetek in konec gornje verige neenačb pa je ravno enačba, katere utemeljevanja smo se lotili, torej:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{a_1}{a_2}$$

Na podoben način utemeljimo sorazmerje $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Zato je $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. ■

koeficient podobnosti

V poglavju o razmerjih smo razmerje med dvema količinama imenovali koeficient podobnosti. Tudi pri podobnih trikotnikih vpeljemo koeficient podobnosti, ki je enak razmerju med enakoležnima stranicama podobnih trikotnikov. Običajno ga označimo s k, torej:

$$\boxed{k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Zgled 5: Najkrajša stranica trikotnika meri 15 cm, stranice temu trikotniku podobnega trikotnika pa merijo 6 cm, 5 cm in 7 cm. Koliko merita neznani stranici trikotnika.

V trikotniku je najmanjša stranica enakoležna najmanjši stranici v podobnem trikotniku, kajti obe ležita nasproti najmanjšemu kotu trikotnika. Zato je koeficient podobnosti $k =$

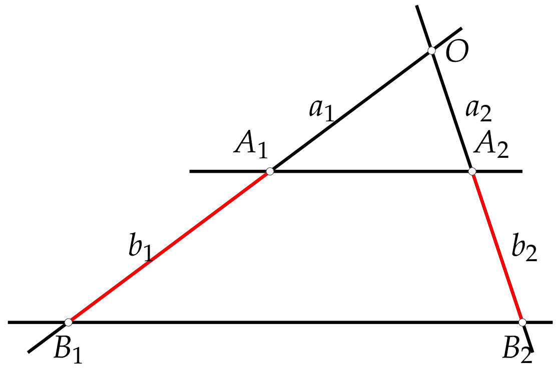
$\frac{15}{5} = 3$. Zato je srednja stranica rešitev enačbe $\frac{b}{6} = 3$, torej $b = 18\,\text{cm}$ in podobno najdaljša stranica $7 \cdot 3 = 21\,\text{cm}$. ■

Sorazmerja enakoležnih stranic dveh podobnih trikotnikov ($\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$) lahko zapišemo tudi v obliki trorazmerja:

$$\boxed{a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2}$$

Vzemimo v ravnini dve premici, ki se sekata v točki O in ju presekajmo z dvema vzporednima premicama, ki nobena ne vsebujeta točke O. Pravimo tudi, da smo **šop** dveh sekajočih premic presekali s **snopom** dveh vzporednih premic.

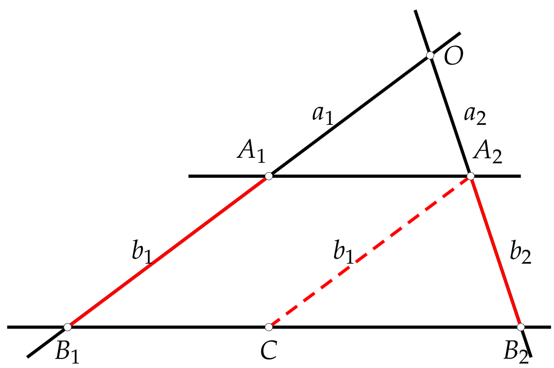
Naj ena premici snopa seka premici šopa v točkah A_1 in A_2, druga pa v točkah B_1 in B_2. Daljice OA_1, OA_2, A_1B_1, A_2B_2 imenujemo odseki na premicah šopa. Označimo dolžine odsekov z a_1, a_2, b_1 in b_2 tako, kot je to prikazano na desni sliki. Za odseke velja naslednja trditev:



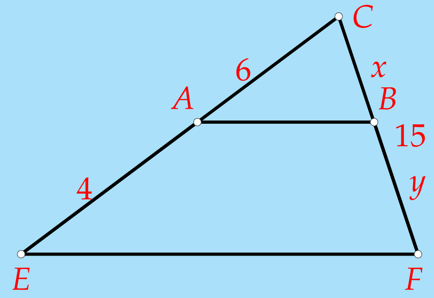
Odseka na eni premici šopa sta sorazmerna enakoležnima odsekoma na drugi premici šopa, torej:

$$\boxed{a_1 : b_1 = a_2 : b_2}$$

Trditev utemeljimo s sliko na desni, kjer smo skozi točko A_2 narisali vzporednico k premici skozi točki A_1 in B_1. Narisana vzporednica seka premici snopa v točkah A_2 in C. S preprostim razmislekom ugotovimo, da je $B_1CA_2A_1$ paralelogram in je zato dolžina daljice A_2C enaka b_2. Tudi ugotovitev, da sta trikotnika OA_1A_2 in A_2CB_2 podobna ne potrebuje pretežkega razmisleka. Zato je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$.
■



Zgled 6: **Na desni sliki so vse dolžine zapisane v isti enoti. Koliko teh enot merita dolžini x in y daljic BC in FB, če je $|CA| = 6$, $|AE| = 4$, $|CF| = 15$ in sta daljici AB ter EF vzporedni.**



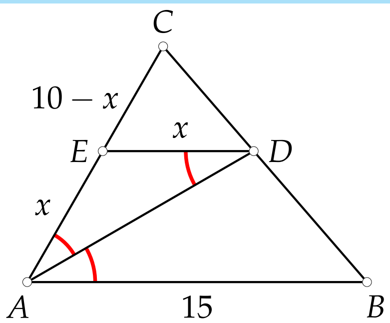
Daljici BC in BF sta odseka, ki ju vzporedni premici odrežeta na daljici FC. Na daljici EC sta enakoležna sta odseka AC in AE. Zato je $x : y = 6 : 4$ in $x + y = 15$. Ker je $x = 6k$, $y = 4k$, je $10k = 15$ in tako $k = 1,5$ ter zato $x = 9$ in $y = 6$. ■

Zgled 7: **V trikotniku ABC je AB = 15 cm in AC = 10 cm. Naj bo (A,D) nosilka simetrale notranjega kota pri A in D $\in$ BC. Daljica DE je vzporedna stranici AB in E $\in$ AC. Poišči dolžine daljic AE, EC in DE.**

Ker AD leži na simetrali kota $\sphericalangle A$ in je $AB \parallel DE$, je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DEA$. Zato je $\triangle ADE$ enakokraki trikotnik s krakom $AE = ED = x$. Ker je $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, je

$$\frac{15}{x} = \frac{10}{10-x} \Rightarrow 10x = 150 - 15x \Rightarrow x = 6$$

[6 cm, 4 cm, 6 cm]

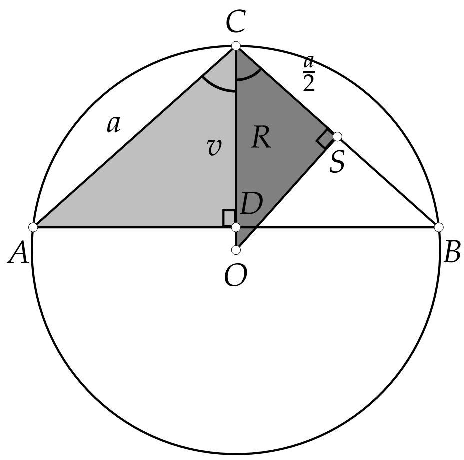


Zgled 8: **Krak enakokrakega trikotnika meri 12 cm, višina na osnovnico pa 8 cm. Koliko meri polmer trikotniku očrtane krožnice?**

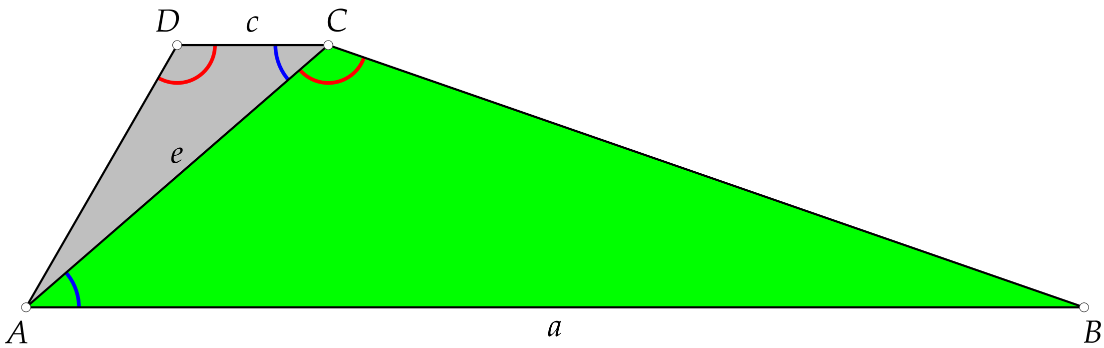
Vzemimo, da ima enakokraki trikotnik oglišča ABC in osnovnico AB. Z danima podatkoma lahko trikotnik narišemo tako, da najprej narišemo višino CD, v D položimo pravokotnico na višino, iz C pa odmerimo kraka $CA = CB = a$.

Središče očrtanega kroga je presečišče simetrala stranic trikotnika, na naši konstrukciji je to točka O. Preprost razmislek privede do spoznanja, da je $\triangle ADC \sim \triangle OSC$. Zato je

$$\frac{a}{v} = \frac{R}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{R}{6} \Rightarrow R = 9 \qquad \blacksquare$$



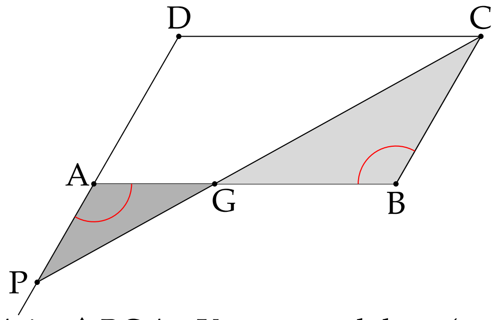
Zgled 9: V trapezu ABCD je ∢ BCA = ∢ CDA. Dokaži, da je diagonala AC enaka geometrijski sredini osnovnic trapeza (Geometrijska sredina števil x, y je izraz $\sqrt{x \cdot y}$, aritmetična sredina pa izraz $\frac{x+y}{2}$).



Ker je $AB \parallel CD$, je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Zaradi pogoja v nalogi (∢ BCA = ∢ CDA) je potem $\triangle ABC \sim \triangle CAD$. Zato je

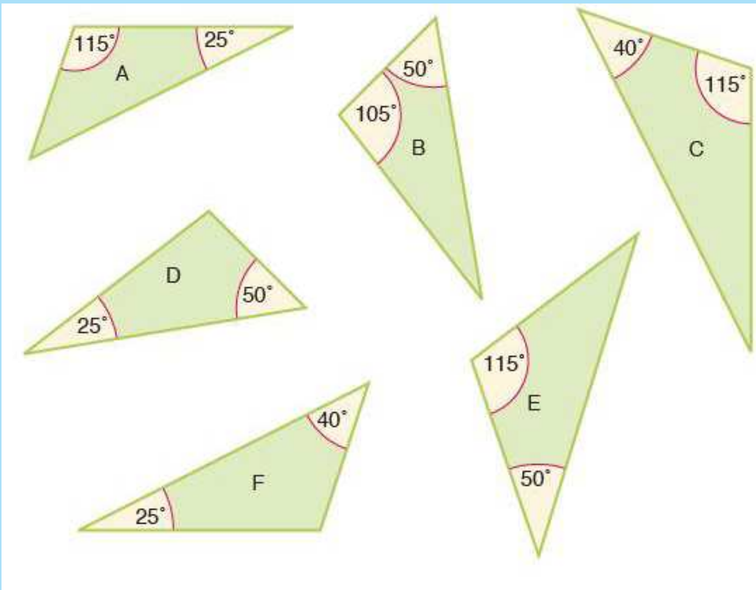
$$\frac{a}{e} = \frac{e}{c} \Rightarrow e^2 = a \cdot c \Rightarrow e = \sqrt{a \cdot c}$$

Zgled 10: V paralelogramu ABCD je $\sphericalangle BAD$ ostri kot, stranica BC pa meri 4.5 cm. Na stranici AB leži točka G tako, da je $|AG| : |GB| = 2 : 3$. Nosilka daljice CG seka nosilko daljice AD v točki P. Izračunaj dolžino daljice AP.

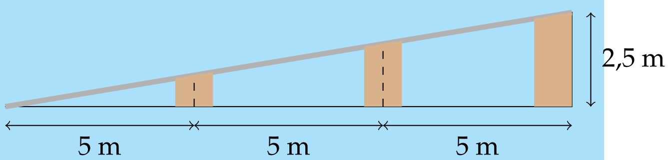
Narišimo ustrezno sliko  in na njej vzemimo pod drobnogled trikotnika $\triangle PGA$ in $\triangle PGA$. Ker sta podobna (utemelji), so istoležne stranice v enakem razmerju, torej je: $|AG| : |BG| = |AP| : |BC|$. Zato je $2 : 3 = |AP| : 4{,}5$ in $|AP| = \dfrac{2 \cdot 4{,}5}{3} = 3\,\text{cm}$ ■

Naloge:

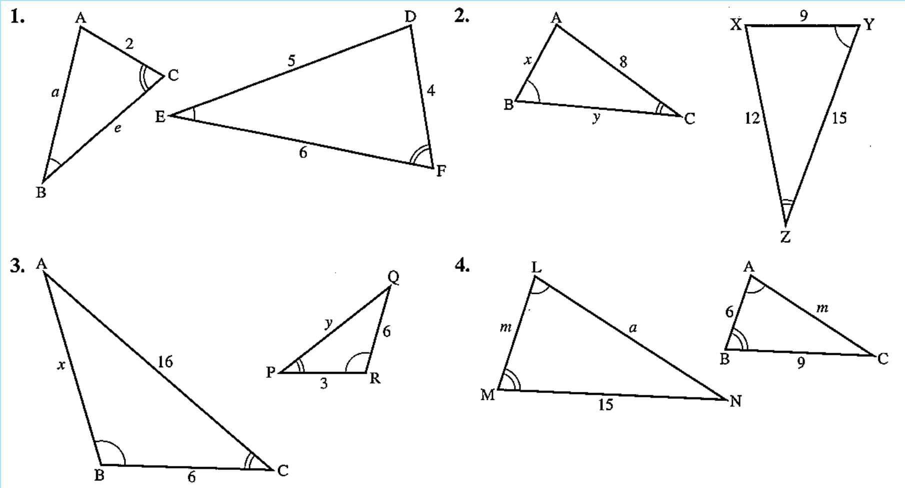
1. Me spodnjimi trikotniki poišči tiste, ki so si podobni. [A,C,F; B,D]



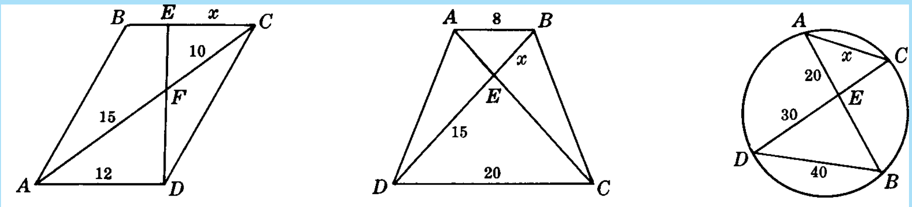
2. V dolžini 15 m bomo zgradili 2,5 m visoko nakladalno rampo (slika). Podprli jih bomo s tremi medseboj enako oddaljenimi stebrički, zadnji bo na koncu rampe. Koliko sta visoka prva dva stebrička? Zaokroži na cm natančno. [83 cm; 167 cm]



3. Na spodnjih slikah 1. - 4. izračunaj neznane dolžine. Enaki oznake pri kotih pomenijo enak kot. [$a = 2,5, e = 3;\ 6 = 2,5, y = 10;\ x = 12, y = 6;\ a = 16,\overline{6}, m = 10$]



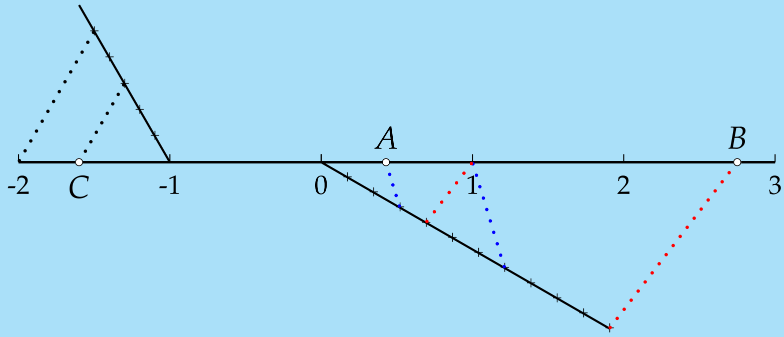
4. Na spodnjih slikah poišči podobne trikotnike in izračunaj neznano dolžino x. Pri tem upoštevaj lastnosti kotov z vzporednimi kraki in lastnost obodnih kotov nad istim lokom. [$8;\ 6;\ 26\frac{2}{3}$]



5. Stranice trikotnika merijo 26 cm, 38 cm in 46 cm, najmanjša stranica podobnega trikotnika pa meri 13 cm. Koliki cm merita ostali stranici podobnega trikotnika ? [19, 23]

6. Stranice trikotnika merijo 27, 21 in 18 enot. Poišči stranice podobnega trikotnika, če je koeficient podobnosti trikotnikov $\frac{3}{5}$. [45, 35, 30]

7. Zapiši koordinate točk A, B in C številske premice na spodnji sliki. Pri tem so pikčaste črte iste barve vzporedne.



[$\frac{3}{7}$, $2\frac{3}{4}$, $-1\frac{3}{5}$]

8. Točka D leži na stranici AB trikotnika ABC, daljica DK je vzporedna stranici AC in K $\in$ BC. Poišči BK, če je: AD : DB = 5 : 6 in BC = 22. [12]

9. V trikotnikih ABC in PQR je $\sphericalangle A = \sphericalangle Q, \sphericalangle C = \sphericalangle P$, AB = 16 cm, AC = 20 cm, QR = 12 cm in PQ je za 13 cm večja od BC. Koliko merijo ostale stranice trikotnikov? [12 cm, 15 cm, 9 cm]

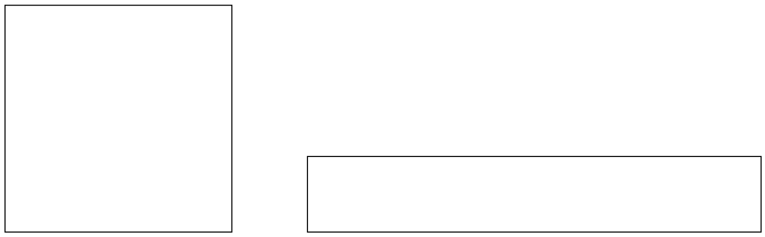
10. Na zemljevidu so razdalje med tremi mesti 6 cm, 5 cm in 4,5 cm. V naravi je največja mesebojna oddaljenost mest 15 km. Določi najmanjšo medsebojno oddaljenost in merilo zemljevida. [11,25 km, 1 : 250 000]

11. Stranica AB trikotnika ABC meri 8 cm, pripadajoča višina pa 6 cm. V kolikšni oddaljenosti od oglišča C moramo konstruirati vzporednico k stranici AB, da bo odsek na vzporednici med stranicama trikotnika meril 4 cm? [3 cm]

12. Stranici paralelograma merita 16 cm in 12 cm , vsota višin paralelograma pa je 24˙5 cm. Izračunaj višini. [14 cm, 10,5 cm]

3 Podobni večkotniki

Podobno v vsakdanjem življenju pomeni imeti enake oblike. Pri trikotnikih smo podobnost definirali z enakimi koti in odtod izpeljali sorazmernost enakoležnih stranic. Kaj pa konveksni večkotniki? Že pri pravokotniku nastopijo težave. Vsi pravokotniki imajo iste notranje kote, oblike si pa v splošnem sploh niso podobne, recimo pravokotnika



si očitno nista podobna, eden je ”kvadratast”, drugi pa dolg in ozek. Očitno je potrebno v definicijo podobnosti večkotnikov, poleg enakosti notranjih kotov, dodati še dodatne pogoje:

Dva večkotnika sta podobna, če:

- imata enake notranje kote
- so enakoležne stranice sorazmerne (enakoležnost tu pomeni biti obakrat večja ali obakrat manjša stranica na kraku enakega kota)

Zgled 11: Katera od spodaj naštetih parov likov sta vedno podobna:

(a) enakostranična trikotnika

(b) pravokotnika

(c) enakokraka trikotnika

(d) kvadrata

(e) deltoida

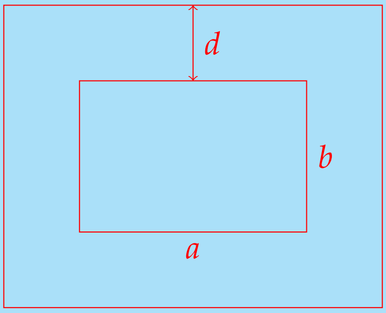
(f) romba

(g) kroga

Prvi od pogojev za podobnost (enaki koti) je izpolnjen za enakostranični trikotnik, pravokotnik, kvadrat. Enakostranični rikotnik in kvadrat imata vse stranice enake, zato so razmerja enakoležnih stranic enaka. Torej sta poljubna enakostranična trikotnika ali poljubna kvadrata vedno podobna. Prav tako sta tudi poljubna kroga podobna. Poljubna pravokotnika nista nujno podobna, recimo pravokotnik s stranicama 2 cm in 1 cm ni podoben pravokotniku s stranicama 3 cm in 2 cm, saj $2 : 1 \neq 3 : 2$.

Pri rombu ni nujno izpolnjen pogoj o enakosti kotov, če pa je, sta romba podobna. Utemeljitev je podobna kot pri kvadratu. Enakokraka trikotnika sta podobna, če imata enake kote, deltoida pa sta pri enakih kotih podobna (dva simetrična trikotnika, (glede na eno od diagonal, imata enake kote, zato je tudi razmerje stranic enako). ■

Zgled 12: Ali sta pravokotnika na spodnji sliki podobna, če je širina okvira med pravokotnikoma povsod enaka?

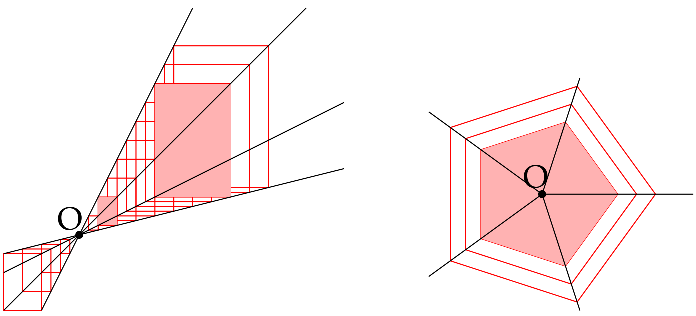


Na prvi pogled bi se strinjali, da sta podobna. Preverimo sorazmernost stranic. Večja stranica večjega pravokotnika na sliki je enaka $a + 2d$, manjša pa $b + 2d$ ustrezni enakoležni stranici v manjšem pravokotniku sta a in b. Če naj bosta pravokotnika podobna, mora biti razmerje enakoležnih stranic enako. Računajmo:

$$\frac{a+2d}{a} = \frac{b+2d}{b} \Rightarrow (a+2d)\cdot b = (b+2d)\cdot a \Rightarrow ab + 2bd = ab + 2ad \Rightarrow bd = ad \Rightarrow a = b$$

Prvi pogled nas je prevaral. Pravokotnika sta podobna le v primeru, ko sta oba kvadrata. ■

V splošnem sta dva lika podobna, če obstaja podobnostna preslikava (homotetija), ki en lik preslika v drugega. Za nas so vedenja o homotetiji še prezahtevna, lahko pa si jo pričaramo z naslednjo sliko:



Enostavno se je prepričati, da sta dva pravilna večkotnika z enakim številom stranic, podobna. Torej:

Poljubna pravilna n-kotnika sta vedno podobna.

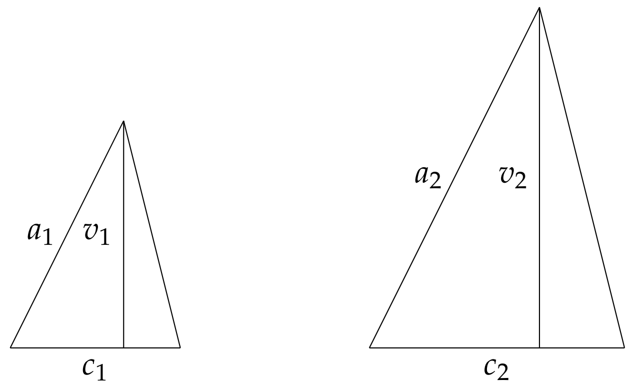
obsegi podobnih likov

Obsegi podobnih likov so v istem razmerju kot je razmerje enakoležnih stranic. V to se prepričamo takole. Ker sta lika podobna, za poljubno stranico a_2 drugega lika velja $a_2 = k \cdot a_1$, kjer je a_1 enakoležna stranica prvega lika, k pa koeficient podobnosti. Obseg drugega lika o_2 je vsota vseh njegovih stranic. V vsoti nadomestimo vsako stranico z ustreznim izrazom $k \cdot a_1$ in opazimo, da koeficient k lahko izpostavimo, v drugem faktorju izpostavljanja pa odkrijemo obseg o_1 prvega lika. Zato je $o_2 = k \cdot o_1$.

Obsega podobnih likov sta v istem razmerju kot sta stranici podobnih likov, torej, če so $a_1, b_1, \ldots$ stranice prvega lika in $a_2, b_2, \ldots$ enakoležne stranice podobnega drugega lika, o_1 in o_2 pa ustrezna obsega likov, je

$$\boxed{k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \ldots = \frac{o_2}{o_1}}$$

Oglejmo si kako je s ploščinami podobnih likov. Začnimo s trikotniki. Na sliki sta podobna trikotnika z osnovnicama c_1 in c_2, enakoležnima stranicama a_1 in a_2 ter višinama v_1 in v_2.



Uporabimo osnovnošolsko formulo za ploščino trikotnika:

$$p_1 = \frac{c_1 \cdot v_1}{2} \text{ in } p_2 = \frac{c_2 \cdot v_2}{2}$$

Ker sta trikotnika podobna, je $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$. Z višino razpadeta trikotnika na dva pravokotna trikotnika, levega in desnega. Oba leva sta očitno podobna, zato je $\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1}{v_2} = k$. Potem je $c_1 = k \cdot c_2$ in $v_1 = k \cdot v_2$. Prva ploščina, p_1 je potem enaka:

$$p_1 = \frac{c_1 \cdot v_1}{2} = \frac{k \cdot c_2 \cdot k \cdot v_2}{2} = \frac{k^2 \cdot c_2 \cdot v_2}{2} = k^2 \cdot p_2$$

Tako smo ugotovili, da sta ploščini v razmerju kvadratov istoležnih stranic. Do popolnoma enakega sklepa bi se dokopali za poljubena druga podobna lika. Zato:

ploščine podobnih likov

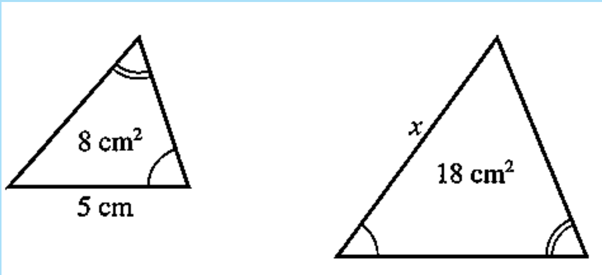
Ploščini podobnih likov sta v razmerju kvadratov razmerja enakoležnih stranic, torej, če so $a_1, b_1, \ldots$ stranice prvega lika in $a_2, b_2, \ldots$ enakoležne stranice drugega podobnega lika, p_1 in p_2 pa ustrezni ploščini, je

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = k^2}$$

Pri tem je k podobnostni koeficient. Drugačen zapis za ploščino podobnih likov:

$$\boxed{a_1 : a_2 = m : n \Rightarrow p_1 : p_2 = m^2 : n^2}$$

Zgled 13: **Podobna trikotnika na spodnji sliki imata ploščini $8\,\mathrm{cm}^2$ in $18\,\mathrm{cm}^2$. V manjšem trikotniku ena stranica meri $5\,\mathrm{cm}$. Koliko meri enakoležna stranica x v večjem trikotniku?**



Upoštevamo, da je razmerje ploščin enako razmerju kvadratov enakoležnih stranic. Dobimo $x^2 : 5^2 = 18 : 8$. Zato je $8x^2 = 5^2 \cdot 18$ in $x^2 = \frac{25 \cdot 9}{4}$ in tako $x = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. ■

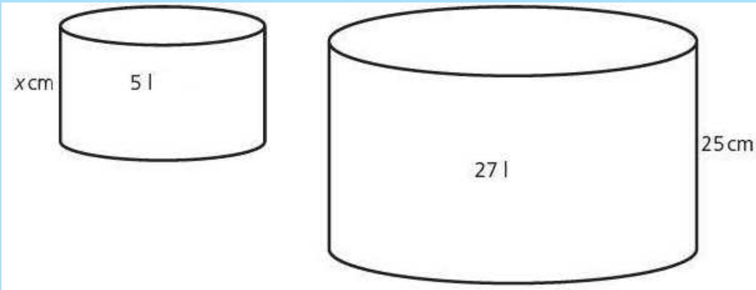
Podobnost lahko definiramo tudi v prostoru. Tudi tu za podobnost zahtevamo enako obliko in sorazmernost enakoležnih osnovnih količin telesa. Recimo, pri valjih sorazmernost višin in enako sorazmernost polmerov, pri kvadrih zahtevamo sorazmernost robov, pri stožcih sorazmernost polmerov in enako sorazmernost višin ali stranskih robov, dve krogli sta pa že tako podobni ena drugi. S podobnim sklepanjem kot pri ploščinah, se dokopljemo do naslednje trditve:

prostornine podobnih teles

Če sta dve telesi podobni in je k njun podobnostni koeficient ter sta V_1 in V_2 prostornini teles, je

$$\boxed{V_2 = k^3 \cdot V_1}$$

Zgled 14: Valja na spodnji sliki sta podobna.



(a) Kolikokrat je prostornina večjega valja večja od prostornine manjšega valja?

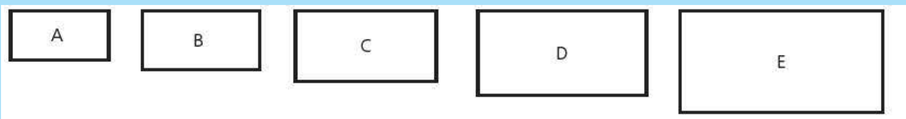
(b) Kolikšen je koeficient podobnosti med valjema?

(c) Izračunaj vrednost neznanke x.

Razmerje večje in manjše prostornine (obe sta v litrih, drugače bi poenotili enote) je $\frac{27}{5} = 5,4$. Koeficient podobnosti med večjim in manjšim valjem označimo s k. To pomeni, da sta polmera in višini valjev v razmerju k. Potem je $k^3 = 5,4 \Rightarrow k = \sqrt[3]{5,4} \doteq 1,75$. Višino x izračunamo iz enačbe: $k = \frac{25}{x}$. Dobimo $x = 25/k \doteq 14,2\,\text{cm}$. ■

Naloge

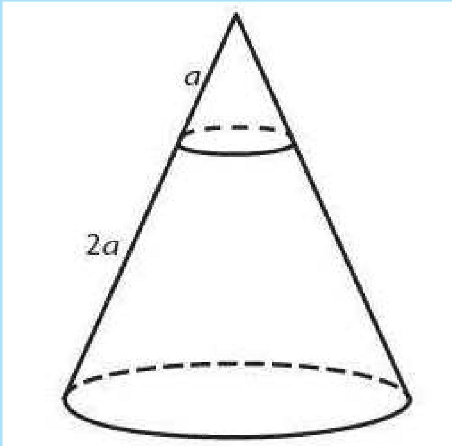
1. Trikotnik ima ploščino $50\,\text{cm}^2$. Vsako od stranic trikotnika zmanjšamo za 30%. Izračunaj ploščino zmanjšanega trikotnika. [$24,5\,\text{cm}^2$]
2. Na spodnji sliki je prikazanih pet podobnih pravokotnikov. Podobnostno razmerje (zoom) med dvema zaporednima je enak 120%.



   (a) Če veš, da je ploščina pravokotnika D enaka $100\,\text{cm}^2$, izračunaj na desetinko cm^2 ploščini pravokotnikov E in A. [$144\,\text{cm}^2$, $33,5\,\text{cm}^2$]

(b) Če zaporedje pravokotnikov nadaljuješ na enak način naprej od pravokotnika E, izračunaj, katero črko (brez šumnikov) ima pravokotnik, ki ima zadnji ploščino manjšo od $500\,\mathrm{cm}^2$. [H]

3. Na sosednji sliki sta narisana dva stožca. Manjši, zgornji, je podoben večjemu stožcu (razmerje polmerov je enako razmerju višin in stranic).



   (a) Kolikšen je koeficient podobnost med malim in velikim stožcem? [1 : 3]

   (b) Kolikokrat je polmer večjega stožca večji od polmera manjšega stožca? [trikrat]

   (c) Kolikokrat je polmer večjega stožca večji od polmera manjšega stožca? [trikrat]

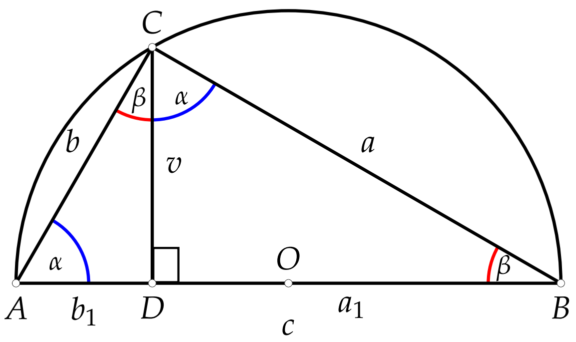
   (d) Če je prostornina večjega stožca $1350\,\mathrm{cm}^3$, izračunaj prostornino manjšega stožca? [$50\,\mathrm{cm}^3$]

4 Izreki v pravokotnem trikotniku

Pravokotni trikotnik ima enega od notranjih kotov enakega 90° (pravi kot). Seveda je ta kot tudi največji (zakaj?). Stranice pravokotnega trikotnika imajo posebna imena:

- najdaljša stranica, tista, ki leži nasproti pravemu kotu, je **hipotenuza**,
- ostali stranici sta **kateti**.

Na spodnji sliki smo v polkrogu s premerom AB in središčem O narisali trikotnik $\triangle ABC$. Oglišče C leži na polkrožnici, zato je trikotnik ABC pravotni trikotnik s pravim kotom v C (Talesov izrek).



V $\triangle ABC$ načrtamo višino CD na hipotenuzo AB, ki naj ima dolžino c. Dolžine katet označimo kot na sliki z a in b, dolžini daljic AD in BD pa označimo z b_1 in a_1. Daljici AD in BD sta tudi projekciji katet AC in BC na hipotenuzo. Hipotenuza c in dolžini projekcij z a_1 in b_1 so povezani s koristno enačbo:

$$\boxed{a_1 + b_1 = c}$$

Trije pravokotni trikotniki na sliki, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$, imajo enake notranje kote. Zato so podobni in so ustrezne enakoležne stranice v enakem razmerju.

Evklidov izrek

Vzemimo najprej sistem razmerij v trikotnikih $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$:

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{v} = \frac{b}{b_1}$$

Enačba $\frac{c}{b} = \frac{b}{b_1}$ nam po preoblikovanju postreže s tole enačbo: $b^2 = b_1 \cdot c$. Na podoben način iz podobnih trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle CBD$ dobimo enačbo: $a^2 = a_1 \cdot c$. Obe enačbi skupaj imenujemo **Evklidov izrek** v pravokotnem trikotniku:

Kvadrat katete pravokotnega trikotnika je enak produktu njene projekcije na hipotenuzo in hipotenuze trikotnika:

$$\boxed{a^2 = a_1 \cdot c \quad b^2 = b_1 \cdot c}$$

Podobnost "malega" in "srednjega" trikotnika $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$ nam sestavi sistem razmerij: **višinski izrek**

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{v} = \frac{v}{a_1}$$

Zadnjo enačbo sistema preoblikujemo v enačbo $v^2 = a_1 \cdot b_1$, ki jo imenujemo **višinski izrek** v pravokotnem trikotniku:

Kvadrat višine na hipotenuzo pravokotnega trikotnika je enak produktu projekcij katet na hipotenuzo:

$$\boxed{v^2 = a_1 \cdot b_1}$$

Seštejmo obe enačbi $a^2 = a_1 \cdot c$, $b^2 = b_1 \cdot c$ Evklidovega izreka. Dobimo:

$$a^2 + b^2 = a_1 \cdot c + b_1 \cdot c = (a_1 + b_1) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

Začetek in konec gornje verige enačb nam pokaže slavni **Pitagorov izrek** v pravokotnem trikotniku:

Pitagorov izrek

Vsota kvadratov katet pravokotnega trikotnika je enaka kvadratu hipotenuze:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Še druga verzija: Kvadrat katete pravokotnega trikotnika je enak razliki med kvadratom hipotenuze in kvadratom druge katete.

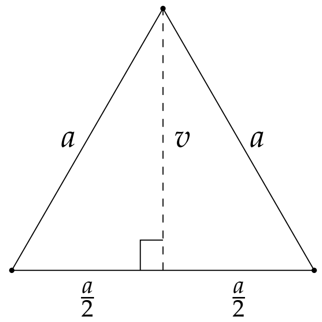
$$\boxed{a^2 = c^2 - b^2,\ b^2 = c^2 - a^2}$$

diagonala kvadrata

Vzemimo **kvadrat** s stranico a in ga z **diagonalo** d razpolovimo. Trikotnika, ki pri tem nastaneta sta pravokotna in enakokraka. Izberimo enega med njima. Njegova hipotenuza je diagonala d, kateti pa sta stranici a. Pitagorov izrek v tem trikotniku nam postreže z naslednjo zvezo: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$. To koristno formulo si zapomnimo in jo še uokvirimo: $\boxed{d = a\sqrt{2}}$.

višina enakostraničnega **trikotnika**

Vzemimo **enakostranični** trikotnik s stranico a. Narišimo **višino** v na eno od stranic in jo izrazimo s stranico a trikotnika (desna slika). Z narisano višino smo dobili dva skladna, pravokotna trikotnika. Hipotenuza tega trikotnika je stranica a, kateti pa sta polovica stranice $\frac{a}{2}$ in višina v. Pitagorov izrek nam postreže z naslednjim:



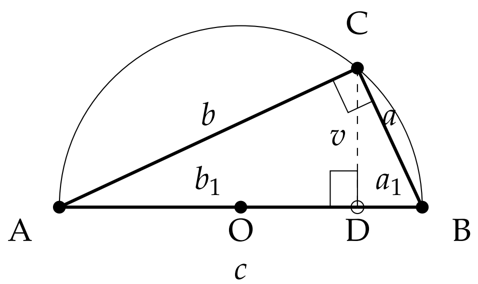
$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spet smo pridelali koristno formulo za višino enakostraničnega trikotnika: $\boxed{v = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.

Zgled 15: V pravokotnem trikotniku merita projekciji katet na hipotenuzo 3,6 cm in 6,4 cm. Izračunaj: a, b, c, v in ploščino trikotnika. Koliko meri polmer trikotniku očrtanega kroga?

Naloge s pravokotnimi trikotniki rešujemo z izreki v pravokotnem trikotniku, običajno največkrat uporabimo Pitagorov izrek. Pred reševanjem naredimo skico in načrt:

(a) **Skica:** Pri skici uporabimo rezultat Talesovega izreka o kotu v polkrogu. Narišemo polkrog, na njegovem obodu izberemo vrh pravega kota, krajišči premera polkroga pa sta drugi dve oglišči trikotnika:



$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 3,6 \\ b_1 & = & 6,4 \\ \hline a, b, c, v, p & = ? & \end{array}$$

(b) **Načrt:** Izpišemo podatke in naredimo načrt reševanja. Na skici ugledamo tri pravokotne trikotnike. Ko omenimo pravokotni trikotnik, najprej pomislimo na Pitagorov izrek. Toda tega lahko uporabimo le , če imamo dani dve stranici, česar pa v naši trikotnikih ABC, ADC, BDC nimamo. Zato se obrnemo k Evklidovem in višinskem izreku.

Če uporabimo Evklidov izrek ($a^2 = a_1 c$, $b^2 = b_1 c$), potrebujemo hipotenuzo c, ki pa jo lahko izračunamo iz formule $c = a_1 + b_1$. Višino potem lahko izračunamo s Pitagorovim izrekom v enem od manjših pravokotnih trikotnikov. Ploščino izračunamo po osnovnošolsko bodisi s formulo $p = \frac{c \cdot v}{2}$, bodisi s formulo $p = \frac{a \cdot b}{2}$.

Če uporabimo višinski izrek ($v^2 = a_1 b_1$), najprej izračunamo višino v, potem pa s Pitagorovim izrekom v manjših trikotnikih kateti a in b. Hipotenuzo izračunamo iz formule $c = a_1 + b_1$,lahko pa uporabimo Pitagorov izrek, saj smo kateti že izračunali. Ploščino izračunamo enako kot zgornjem načinu.

(c) **Izvedba:** Enote imamo poenotene, zato jih bomo pri računanju opuščali.

Z Evklidovim izrekom:

$$c = a_1 + b_1 = 10,\ a^2 = a_1 \cdot c = 36 \Rightarrow a = 6,\ b^2 = b_1 \cdot c = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$v^2 = a^2 - a_1^2 = 36 - 12,96 = 23,04 \Rightarrow v = \sqrt{23,04} = 4,8,\ p = \frac{10 \cdot 4,8}{2} = 24$$

Z višinskim izrekom:

$$v^2 = a_1 \cdot b_1 = 23,04 \Rightarrow v = 4,8,\ a^2 = v^2 + a_1^2 = 23,04 + 12,96 = 36 \Rightarrow a = 6$$

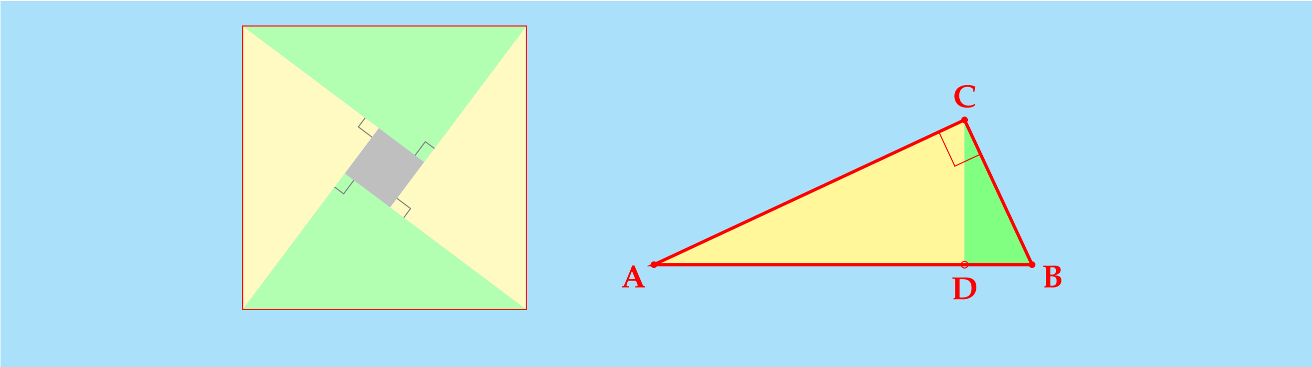
$$b^2 = v^2 + b_1^2 = 23,04 + 40,96 = 64 \Rightarrow b = 8,\ c^2 = a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow c = 10,\ p = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

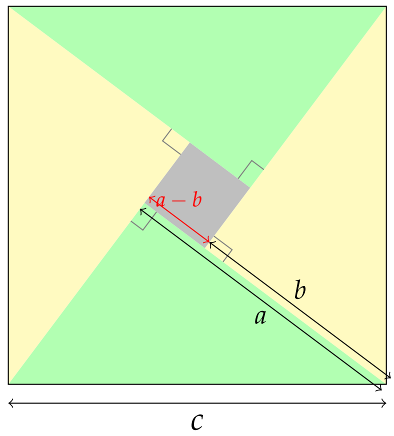
(d) **Odgovor:** Iskane količine so enake: $a = 6\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$, $v = 4,8\,\text{cm}$, $p = 24\,\text{cm}^2$. ■

Zgled 16: Oglejmo si še dve utemeljitvi (dokaza) Pitagorovega izreka:

(a) Na levi sliki smo v kvadrat s stranico c včrtali štiri skladne pravokotne trikotnike s hipotenuzo c in katetatama a ter b ($a > b$). S pomočjo slike in osnovnih znanj o ploščinah, dokaži Pitagorov izrek.

(b) Na desni sliki je ploščina pravokotnega trikotnika ABC enaka vsoti ploščin podobnih pravokotnih trikotnikov ADC in BDC. S pomočjo razmerja ploščin podobnih trikotnikov in pravkar opisane vsote ploščin, utemelji Pitagorov izrek.



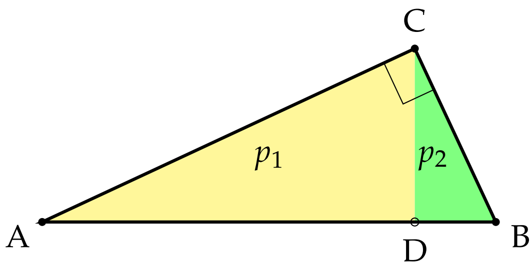


(a) Označimo kateti včrtanega trikotnika z a in b, hipotenuza pa je stranica začetnega kvadrata. Veliki kvadrat razpade na pet ločenih delov: na štiri skladne pravokotne trikotnike s katetama a in b ter na kvadrat s stranico $a - b$. V to se prepričamo z enostavnim razmislekom. Zato je ploščina velikega kvadrata enaka vsoti ploščini njegovih delov, torej je: $c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a-b)^2$. V zadnji enačbi odpravimo oklepaje in jo uredimo:

$$c^2 = \cancel{2ab} + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Na koncu zapisana enačba predstavlja Pitagorov izrek.

(b) Označimo ploščino velikega trikotnika s p, manjšega levega s p_1, manjšega desnega pa s p_2. Potem je $p = p_1 + p_2$. Upoštevajmo, da sta ploščini podobnih trikotnikov v razmerju kvadratov istoležnih stranic. Tako dobimo enačbi:



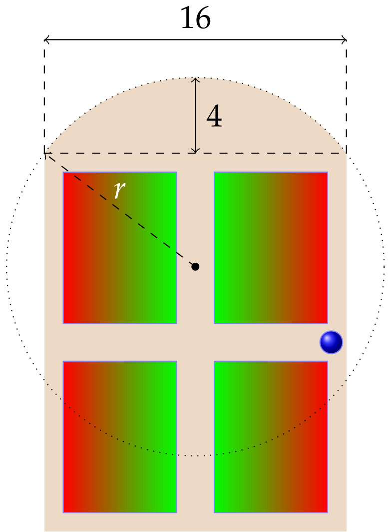
$$\frac{p_1}{p} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2}, \qquad \frac{p_2}{p} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2}$$

Potem je $p_1 = \frac{|AC|^2}{|AB|^2} \cdot p$ in $p_2 = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} \cdot p$. Ker je $p = p_1 + p_2$, je:

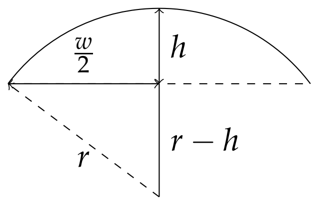
$$p = \frac{|AC|^2}{|AB|^2} \cdot p + \frac{|BC|^2}{|AB|^2} \cdot p \,|\cdot |AB|^2 \Rightarrow |AB|^2 \cdot \cancel{p} = |AC|^2 \cdot \cancel{p} + |BC|^2 \cdot \cancel{p} \Rightarrow |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Dobljena enačba pa je ravno Pitagorov izrek. ■

Zgled 17: **Mizarji pogosto vrh vrat okrasijo z dekorativnim obokom v obliki krožnega odseka, kot je prikazano na desni sliki. Če so vrata široka 16 dm in je odsek visok 4 dm, izračunaj polmer kroga, katerega del je opisani odsek.**



Označimo **širino** vrat z w, **višino odseka** s h, iskani **polmer** pa z r. Oglejmo si sliko:



Uporabimo Pitagorov izrek:

$$r^2 = \left(\frac{w}{2}\right)^2 + (r-h)^2 \Rightarrow \cancel{r^2} = \frac{w^2}{4} + \cancel{r^2} - 2rh + h^2 | \cdot 4 \Rightarrow 8rh = w^2 + 4h^2 | : 8h \Rightarrow r = \frac{w^2}{8h} + \frac{h}{2}$$

Izpeljano enačbo si uokvirimo: $\boxed{r = \frac{w^2}{8h} + \frac{h}{2}}$. V našem primeru je $w = 16\,\mathrm{dm}$, $h = 4\,\mathrm{dm}$.

Zato je $r = \frac{16^2}{8 \cdot 4} + \frac{4}{2} = 8 + 2 = 10\,\mathrm{dm} = 1\,\mathrm{m}$. ■

Zgled 18: **Reši naslednje naloge z uporabo Pitagorovega izreka:**

1. **V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza $\sqrt{20}\,\mathrm{cm}$, daljša kateta pa je dvakrat tolikšna kot krajša. Koliko merita kateti?**

2. **V enakokrakem trikotniku meri krak 13 cm in višina na osnovnico 12 cm. Koliko meri osnovnica?**

3. **V rombu merita diagonali 16 cm in 12 cm. Koliko meri stranica romba?**

4. **V krožnici s polmerom 2 dm meri tetiva 3,2 dm. Koliko je ta tetiva oddaljena od središča?**

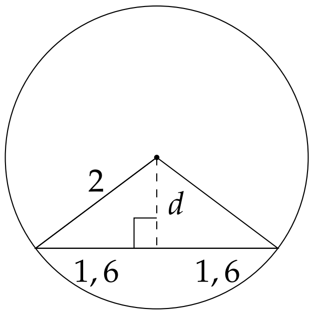
5. **Na pomol so privezali čoln. Ko je bil 12 m od pomola, je bila dolžina privezne vrvi za 3 m večja od dvojne višine pomola. Kako visok je pomol?**

1. Krajšo kateto označimo z x, daljša je potlej $2x$. Uporabimo Pitagorov izrek, da dobimo enačbo: $x^2 + (2x)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$, ki po preurejanju dobi obliko $5x^2 = 20$ in od tod $x = 2$. Zato kateti merita 2 cm in 4 cm.

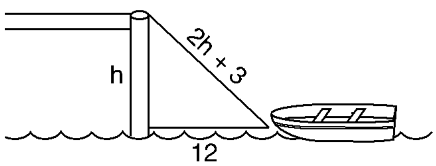
2. Narišemo ustrezno sliko in v njej ugledamo pravokotni trikotnik, ki ima kateto dolgo 12 cm (višina trikotnika) in hipotenuzo 13 cm (krak trikotnika). Druga kateta je polovica osnovnice, izračunamo pa jo s Pitagorovim izrekom $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Zato osnovnica meri 10 cm.

3. Diagonali romba se razpolavljata pod pravim kotom, zato je $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Stranica romba zato meri 10 cm.

4. Krajišči tetive skupaj s središčem sestavljajo enakokraki trikotnik z osnovnico 3,2 dm (tetiva) in krakoma 2 dm. Iskana oddaljenost ($= d$) središča od tetive je ravno višina opisanega trikotnika, ki jo izračunamo s Pitagorovim izrekom $d = \sqrt{2^2 - 1,6^2} = \sqrt{1,44} = 1,2$. Torej je tetiva 1,2 dm oddaljena od središča. ■



5. Označimo višino pomola s h. Potem je dolžina vrvi enaka $2h + 3$ in predstavlja hipotenuzo pravokotnega trikotnika s katetama 12 m (oddaljenost od pomola) in višino pomola (sliki na desni). Potem je



$$(2h+3)^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow 4h^2 + 12h + 9 = 144 + h^2 \Rightarrow 3h^2 + 12h - 135 = 0| : 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 + 4h - 45 = 0 \Rightarrow (h+9)(h-5) = 0 \Rightarrow h_1 = -9,\ h_2 = 5$$

Geometrijsko je možna le druga rešitev, zato je pomol visok 5 m. ■

Naloge:

1. Dane so stranice trikotnika. Kateri od trikotnikov so pravokotni? (premisli, kaj mora veljati za stranice pravokotnega trikotnika?)

   (a) 33 cm, 55 cm, 44 cm
   (b) 120 dm, 13 m, 50 dm
   (c) $4, 4\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$
   (d) 25 km, 7000 m, 240000 dm
   (e) 11 dm, 6 m, 61 dm
   (f) 5 cm, 5 cm, 7 cm

   [a, b, c, d, e]

2. V pravokotnem trikotniku sta a in b kateti, a_1 in b_1 njuni pravokotni projekciji na hipotenuzo c, v pa naj bo višina tega trikotnika. Določi ostale osnovne elemente v trikotniku, če je:

   (a) $b = 156\,\text{cm},\ b_1 = 144\,\text{cm}$ [65, 25, 169, 60]
   (b) $a_1 = 225\,\text{cm},\ b_1 = 64\,\text{cm}$ [255, 136, 289, 120]
   (c) $a = 136\,\text{cm},\ v = 120\,\text{cm}$ [255, 64, 289, 255]
   (d) $a = 130\,\text{cm},\ b = 312\,\text{cm}$ [338, 50, 288, 120]

3. Kateti pravokotnega trikotnika sta 12 cm in 35 cm. Poišči težiščnico na hipotenuzo. [18,5 cm]

4. V enakokrakem trikotniku deli višina krak na odseka z dolžino 7 cm in 2 cm merjeno od vrha trikotnika. Izračunaj osnovnico trikotnika. [6 cm]

5. Obseg romba je 100 mm, ena od diagonal pa meri 30 mm. Koliko meri druga diagonala ? [40 mm]

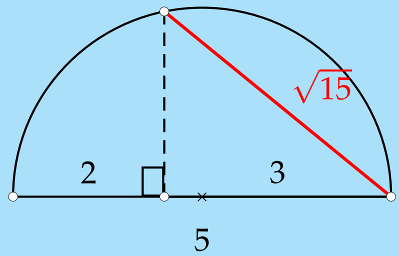
6. Osnovnici enakokrakega trapeza merita 21 cm in 11 cm, višina na krak pa 12 cm. Določi krak. [13 cm]

7. Krožnici s polmeroma 15 cm in 20 cm se sekata tako, da njuna skupna tetiva meri 24 cm. Kolika je središčna razdalja krožnic? [25 cm ali 7 cm]

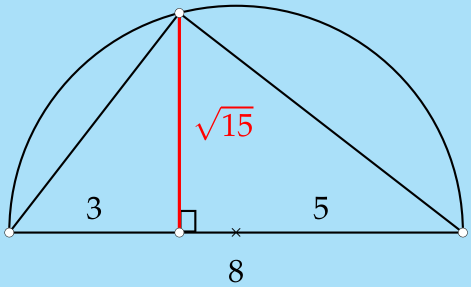
8. V enakokraki trapez z osnovnicama 16 cm in 9 cm je vpisana krožnica. Kolik je polmer krožnice ? [6 cm]

9. Z izreki v pravokotnem trikotniku lahko konstruiramo daljice z dolžino $\sqrt{n}$, kjer je n naravno število, ki ni popoln kvadrat, torej tako število, ki se ne koreni. Preveri naslednje konstrukcije in jih uporabi za konstrukcijo daljic z dolžinami $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{17}$.

(a) Na desni sliki je prikazana konstrukcija daljice z dolžino $\sqrt{15}$ enot. Za konstrukcij uporabimo **Evklidov** izrek $a = \sqrt{a_1 \cdot c}$. Ker je $15 = 3 \cdot 5$, za hipotenuzo c izberemo 5 enot, za projekcijo a_1 pa 3 enote. Potem konstruiramo pravokotni trikotnik tako, da nad hipotenuzo c narišemo polkrog in od enega oglišča premera odmerimo projekcijo a_1. V drugem oglišcu odmerjene projekcije narišemo pravokotnico, ki seka polkrožnico v tretjem oglišču pravokotnega trikotnika. Nad projekcijo a_1 leži kateta z dolžino $\sqrt{15}$ enot. Na podoben način konstruiraj še daljice z dolžinami $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{17}$.



(b) V drugem primeru za konstrukcijo uporabimo **višinski** izrek $v = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$. Ker je $15 = 3 \cdot 5$, za projekciji a_1 in b_1 katet na hipotenuzo c izberemo 5 enot in 3 enote. Zato hipotenuza meri 8 enot. Nad hipotenuzo narišemo polkrog in od enega oglišča premera odmerimo projekcijo a_1. V drugem oglišcu odmerjene projekcije narišemo pravokotnico, ki seka polkrožnico v tretjem oglišču pravokotnega trikotnika. Višina nastalega trikotnika ima dolžino $\sqrt{15}$ enot.



(c) Na desni sliki je prikazana konstrukcija daljice z dolžino $\sqrt{15} = \sqrt{4^2 - 1^2}$ enot s Pitagorovim izrekom.