DN#1 (Polinomi 1) 4B

1. Katera med naštetimi funkcijami ni polinom? Ostale štiri so polinomi. Zapiši njihove stopnje in vodilni koeficient ter prosti člen. Rešitev

   (A) $-x^2+6x-8$ (B) $\frac{-x^2+6x}{5}$ (C) $3x^2(3x-1)$ (D) $2^{-1}x^3+2^{-2}x-1$ (E) $x^{-3}+2x^{-2}+1$

Pomni:

- Stopnja polinoma je zapisana v stopnji vodilnega člena.
- Polinome seštevamo, odštevamo in množimo kot običajne veččlenike.
- Vodilni člen produkta polinomov je produkt vodilnih členov, prosti člen produkta je produkt prostih členov.

2. Ugotovi, kateri od spodaj zapisanih polinomov ima največjo stopnjo:

   (A) $(1-x^2)^3$ (B) $(2+3x^4)(4+x^2)$ (C) $(2-x^3)^2$ (D) $(2-x^2)^2(1-x^3)$ (E) $(7+4x+7x^7)-(7x^7-3x^6+x^2)$

   Rešitev

3. Zapiši predpis za polinom $p(x)$ tretje stopnje, če za njegove koeficiente velja:

   (a) vodilni koeficient je rešitev enačbe $8^{x-8}\cdot\sqrt[10]{2^{x-3}}\cdot 0,125^x=1$,

   (b) koeficient kvadratnega člena je 0,

   (c) koeficient linearnega člena je rešitev enačbe $\log_2(x-2)+5=2\log_2(x+6)$,

   (d) prosti člen je enak smernemu koeficientu premice $\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$.

   Rešitev

Pomni: Če polinom $p(x)$ (deljenec) delimo s polinomom $q(x)$ (delitelj), dobimo natanko določena polinoma $k(x)$ (količnik) in $o(x)$ (ostanek), da velja:

- $p(x)=k(x)\cdot q(x)+o(x)$ ali $\frac{p(x)}{q(x)}=k(x)+\frac{o(x)}{q(x)}$,
- stopnja ostanka $o(x)$ je manjša od stopnje delitelja $q(x)$.

Poleg običajnega algoritma deljenja, lahko pri deljenju z **linearnim** polinomom $x - a$ količnik in ostanek pridelamo s Hornerjevo shemo in algoritmom:

<table>
<tr><td></td><td>koeficienti polinoma $p(x)$, deljenec</td></tr>
<tr><td>a</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>koeficienti količnika $k(x)$ ||ostanek $= p(a)$</td></tr>
</table>

4. Izračunaj količnik in ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ s polinomom $q(x) = x^2 - 2$. [$k(x) = 2x - 4$, $o(x) = 10x - 11$]

5. Kateri polinom moraš deliti s polinom $3x - 5$, da dobiš količnik $x^2 - 2x + 7$ in ostanek 2? [C]

   (A) $3x^3 - 2x + 7$ (B) $3x^3 - 11x - 33$ (C) $3x^3 - 11x^2 + 31x - 33$ (D) $3x^3 + 11x^2 + 31x - 33$

   [Odgovor je C. Osnovni izrek o deljenju polinomov je formula $p = k \cdot q + o$. V našem primeru je neznani polinom p, ki ga dobimo z običajnimi računskimi operacijami.]

6. Polinom $p(x) = 2x^4 + mx^3 + 3x^2 + nx - 15$ je deljiv s polinomom $q(x) = x^2 - 2x - 3$. Izračunaj realni števili m in n ter zapiši količnik deljenja.

   Rešitev

7. Polinom $p(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + ax^2 + bx$ je deljiv s polinomom $q(x) = x^2 - 4x + 5$. Izračunaj realni števili a in b ter zapiši količnik deljenja.

   [Reševanje je podobno kot v prejšnji nalogi: $a = 26$, $b = -20$.]

8. Polinom $p(x) = x + 3$ je skupni delitelj polinomov $r(x) = 2x^3 + 11x^2 + ax + b$ in $s(x) = x^3 - 14x^2 - 3ax$. Izračunaj realni števili a in b. Rešitev

Pomni: Polinoma sta enaka, če imata

- enaki stopnji,
- enake enakoležne koeficiente.

9. Izračunaj realne konstante a, b in c tako, da bo za vsak x veljalo:

$$2x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = (2x + a)(x^2 + b) + 10x + c$$

   Rešitev

10. Zapiši vsoto števil a in b če veš, da je za vsak x:

$$2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (2x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 3)$$

. Rešitev

11. Izračunaj konstante a, b in c tako, da bo veljalo za vsak $x \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

Rešitev

12. Polinom $p(x) = x^{2018} - x + 1$ delimo s polinomom $q(x) = x + 1$. Izračunaj ostanek deljenja. Rešitev

13. * Utemelji, da je polinom $p(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ deljiv s polinomom $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Rešitev

Pomni: **Ničla** polinoma $p(x)$ je taka vrednost neodvisne spremenljivke, pri kateri je vrednost polinoma enaka 0, torej, če je $x = a$ ničla polinoma $p(x)$, je $p(a) = 0$.

Če poznamo ničle polinoma, lahko polinom zapišemo v **ničelni** obliki:

$$p(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \cdot \ldots$$

Pri tem so $x_1, x_2, \ldots$ realne ničle s stopnjami n_1, $n_2, \ldots$, polinomi $x^2 + p_1 x + q_1$, $x^2 + p_2 x + q_2$, ... pa imajo negativne diskriminante in zato nimajo realnih, temveč imajo kompleksne ničle. Ničle polinoma iščemo tako, da polinom razstavimo. Pri tem so koristne formule: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$, $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$. Polinom lahko razstavimo tudi s Hornerjevim algoritmom, če poznamo njegove ničle. Pri **ničli** je **ostanek** v Hornerjevem algoritmu enak 0.

14. Izračunaj neznane količine a, b in c v naslednji Hornerjevi shemi.

	1	a	b	-8	-2	12
1		1	3	-2	-10	-12
	1	3	-2	-10	c	$\|\|0$

Izračunaj ničle polinoma iz te sheme. [$a = 2, b = -5, c = -12$; $1, 2, -3, 1 \pm i$]

Pomni: Če ima polinom **celoštevilčne** koeficiente, so njegove možne **cele ničle delitelji prostega člena**, v možnih racionalnih ničlah (ulomkih), pa je števec te ničle **delitelj prostega člena**, imenovalec pa **delitelj vodilnega koeficienta**. Recimo, za polinom $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 3$ so možne cele ničle števila ± 1, ± 3,možne racionalne ničle pa so $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$.

15. Izračunaj realne ničle naslednjih polinomov

    (a) $t(x) = -3(x^2+1)(x^2-4)(x-5)$ $[\pm 2, 5]$

    (b) $p(x) = 3x^3+5x^2+5x+2$ $[-1]$

    (c) $r(x) = x^4+x^3+x^2-4x-20$ $[\pm 2]$

    (d) $q(x) = x^3+9x^2+15x+7$ $[-1(II), -8]$

    (e) $s(x) = 3x^4+14x^3-17x^2-56x+20$ Rešitev

16. Določi realno število a tako, da bo imel polinom $p(x) = x^3-5x^2-ax+6$ ničlo pri $x=3$ in nato poišči še preostale ničle. $[a=-4, 1\pm\sqrt{3}]$

17. Zapiši enačbo polinoma tretje stopnje z dvojno ničlo $-\frac{1}{2}$, ničlo 2 in začetno vrednostnjo 2. $[-4x^3+4x^2+7x+2]$