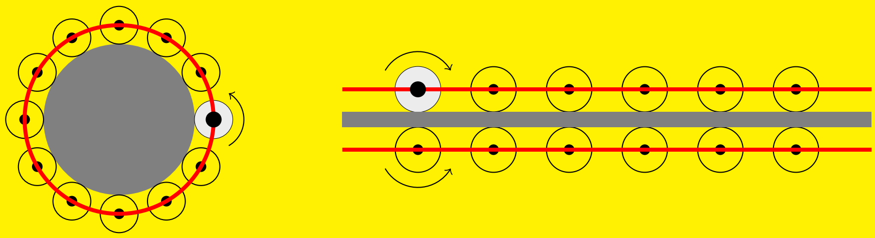
Geometrija 1

(osnovni pojmi, koti, liki, preproste konstrukcije)

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.



2020

Kazalo

1 UVOD

Geometrija je del matematike, ki se ukvarja z liki, telesi, njihovimi dolžinami, ploščinami in prostorninami, njihovim položajem v prostoru, itd. Začetki geometrije sodijo v obdobje najstarejših civilizacij: sumerske, babilonske, egipčanske, indijske, kitajske, itd. Še danes se uporaba geometrije vidi v ostankih teh civilizacij.

Prvi, ki so se sistematično ukvarjali z geometrijo, so bili grški misleci, kot so recimo Tales, Pitagora, Evklid, Arhimed, itd. Tudi beseda **geometrija** je sestavljena iz dveh grških besed: **gea** = **Zemlja** in **metron** = **merjenje**, zato bi jo lahko geometrijo imenovali tudi **zemljemerstvo**.

Osnovni **geometrijski objekti** ali **gradniki** so:

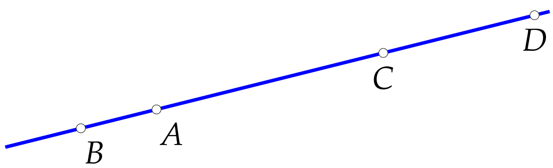
- **Točke:** označevali jih bomo s simboli ∘ • · , imenovali pa z veliki tiskanimi črkami, recimo A, B, C, ..., T.
- **Premice:** označevali jih bomo z ravnimi črtami, imenovali pa z malimi tiskanimi črkami, recimo $a, b, c, \ldots, p, q, r$
- **Ravnine:** imenovali jih bomo z velikimi grškimi črkami, kot so Σ (sigma), Π (pi), Φ (fi), Ψ, (psi), označevali pa primernimi štirikotniki, recimo  .

Vsi osnovni objekti se nahajajo v **prostoru**. Osnovnih objektov ne opisujemo (definiramo), le osnovne povezave med njimi bomo opisali in dodali še nekaj novih pojmov. Večino teh povezav in pojmov poznamo že iz osnovne šole, zato le osvežimo spomin nanje. Začnimo s premico in točko:

premica
točka

- Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica, ki jo označimo (A, B), če jo določata točki A in B.
- Točke, ki ležijo na isti premici, imenujemo **kolinearne** točke.

Latinsko ime za ravno črto je linea, zato točke na isti premici imenujemo **kolinearne točke**.



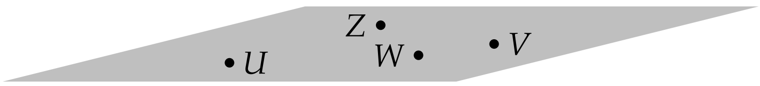
Slika 1: Kolinearne točke A, B, C, D

Nadaljujmo s povezavami med točkami in ravnino:

točka
ravnina

- Tri nekolinearne točke določajo natanko eno ravnino, ki jo označimo (A, B, C), če jo določajo točke A, B in C.
- Točke, ki ležijo na isti ravnini, imenujemo **komplanarne** ali **koplanarne** točke.

Tudi za točke, ki ležijo v isti ravnini uporabimo latinsko ime **planum** za ravnino. Zato točke v isti ravnini imenujemo **koplanarne** ali **komplanarne** točke.

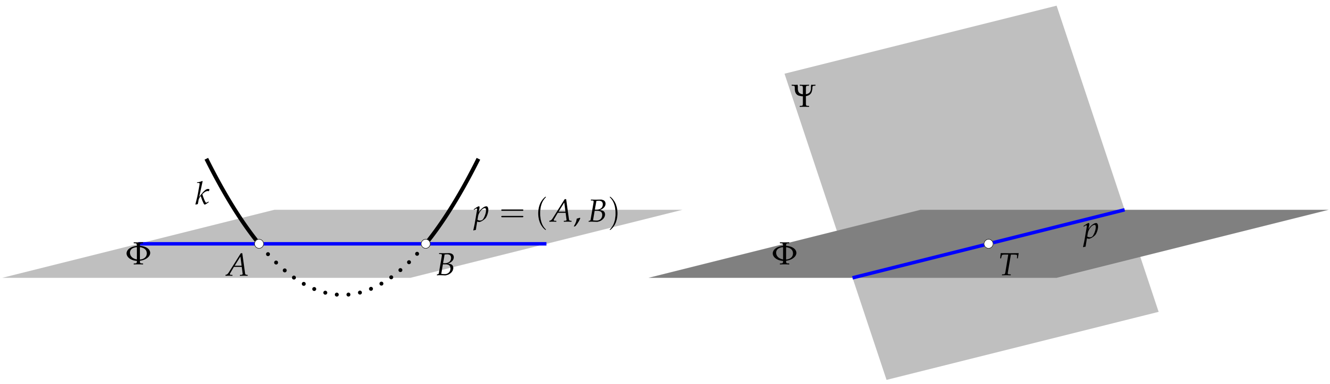


Slika 2: Koplanarne točke U, V, Z, W

Nadaljujmo s povezami med premico in ravnino:

premica
ravnina

- Če imata premica in ravnina skupni dve točki, premica leži v ravnini.
- Če imata različni ravnini skupno eno točko, imata skupno tudi premico.



Slika 3: Kriva črta k na levi sliki ne predstavlja premico skozi A in B; ravnini s skupno točko T imata skupno tudi premico

ležati med

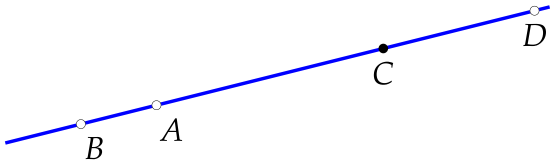
Vzemimo tri kolinearne točke X, Y in Z na premici p. Potem natanko ena izmed točk leži **med** drugima dvema točkama.

Relacija **„ležati med točkama“** velja le za kolinearne točke. Za tri točke na zaključeni krivi črti, recimo krožnici, nemoremo natanko določiti, katera leži med drugima dvema, kajti za vsako med njimi lahko trdimo, da leži med drugima dvema.

Slika 4: Točka X leži med točkama Y in Z; za točke U, V in W se nemoremo odločiti, katera je med drugima dvema

Naj bodo A, B, C in D kolinearne točke. Pravimo, da točki A in B **ležita na isti strani** točke C, če C ne leži med točkama A in B in, da točki A in D **ležita na različnih straneh** točke C, če C leži med A in D.

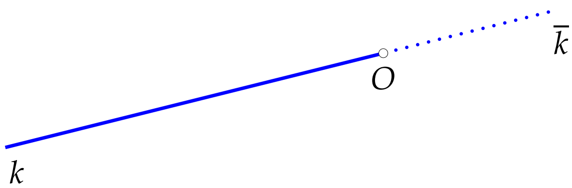
ležati na isti strani



Slika 5: Slika k relaciji „ležati na isti strani “

Poltrak (na sliki je označen s k) je množica točk na premici, ki vse leže na eni strani dane točke te premice. Dano točko imenujemo izhodišče (začetek) poltraka. Množica točk na preostanku premice sestavlja **dopolnilni poltrak** (na sliki je označen s $\overline{k}$).

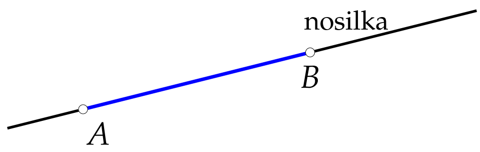
poltrak daljica



Slika 6: Poltrak k in njegov dopolnilnii poltrak $\overline{k}$

daljica

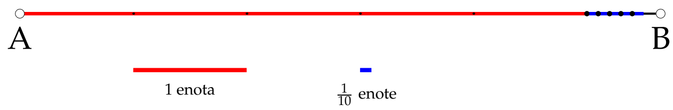
Daljica je množica točk na premici, ki ležijo med danima točkama premice. Dani točki imenujemo **krajišči** daljice, včasih tudi **oglišči** daljice. Krajišči daljice štejemo k daljici. Daljico označimo z AB, če sta njeni krajišči A in B. Premico (A, B) imenujemo **nosilka** daljice AB.



Slika 7: Daljica AB

dolžina daljice

Daljice tudi merimo. Izmeriti daljico pomeni, da daljici priredimo pozitivno realno število. To storimo tako, da vnajprej določeno **enotsko** daljico, ki ima dolžino 1 enota (običajno je to 1 m) polagamo v merjeno daljico eno za drugo, dokler so še znotraj daljice. Na preostanek merjene daljice polagamo $\frac{1}{10}$ enotske daljice, na preostanek preostanka polagamo $\frac{1}{100}$ enotske daljice in tako dalje.



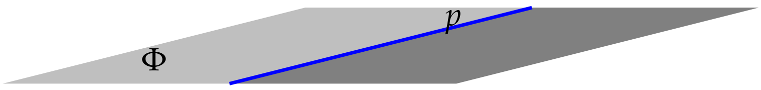
Slika 8: Merjenje daljice z enotsko daljico

V daljico AB na sliki smo položili 5 enotskih daljic in 5 daljic, ki merijo desetinko enotske daljice. Zato daljica AB meri malo več kot 5,5 enote.

Dolžino daljice sestavljata število in enota. Običajno za osnovno enoto izberemo **meter (m)**. Manjše enote tvorimo s predponami **deci-(d)**, **centi-(c)**, **mili-(m)**, **mikro-(μ)**, ki so zapored desetinko, stotinko, tisočinko in milijoninko osnovne enote. Predpona za večjo enoto je **kilo-(k)**, ki pomeni 1000 osnovnih enot.

polravnina

Polravnina je množica točk na ravnini, ki ležijo na isti strani dane premice v tej ravnini. Premico, ki tvori polravnino, imenujemo tvorilka polravnine. Polravnino imenujemo tudi **breg** premice v dani ravnini.

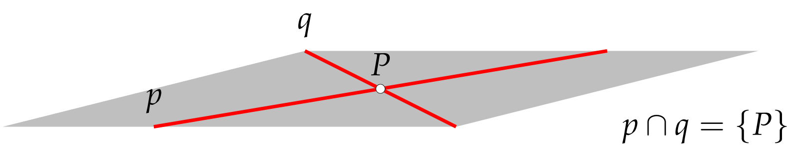


Slika 9: Polravnini, na kateri razpade ravnina Φ s premico p

Raziščimo medsebojno lego dveh premic. Vzemimo dve različni premici p in q. Ker je premica natanko določena z dvema različnima točkama (drugače povedano: premici, ki imata skupni dve točki, sta enaki), imata premici bodisi skupno eno točko, bodisi nimata nobene skupne točke.

sekanti

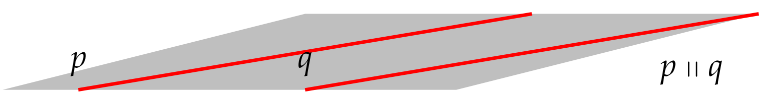
Če imata premici eno skupno točko, ju imenujemo **sekanti** ali **presečnici**, skupno točko pa **presečišče**.



Slika 10: Sekanti in presečišče P; simbol $\cap$ (presek) smo si sposodili iz poglavja o množicah

Če premici nimata skupne točke in **ležita** v isti ravnini ju imenujemo **vzporednici**.

vzporednici

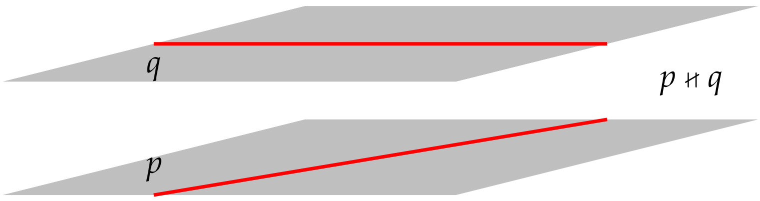


Slika 11: Vzporednici

Dodajmo, da zaradi praktičnih razlogov med vzporednici štejemo tudi enaki premici.

mimobežnici

Če premici nimata skupne točke in **ne ležita** v isti ravnini ju imenujemo **mimobežnici**.

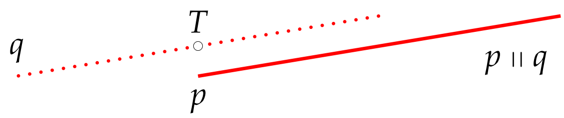


Slika 12: Mimobežnici

Koliko premic gre skozi dano točko k dani premici? Evklid je kot aksiom (=osnovni zakon, ki se ga ne dokazuje) privzel, da je taka premica **ena sama** (Evklidov aksiom). Skoraj dva tisoč let so skoraj vsi pomembni geometri (ljudje, ki so se ukvarjali z geometrijo) hoteli pokazati, da je Evklidov aksiom o vzporednici dokazljiv s pomočjo ostalih aksiomov (osnovnih zakonov). V prvi polovici 19. stoletja so ruski matematik **Lobačevski**, madžarski matematik **Bolyai** in tudi eden največjih matematikov vseh časov, **Karl Friedrich Gauss** (zapiše se tudi Gauβ), ugotovili da, če Evklidov aksiom o eni vzporednici zamenjamo z novima aksiomoma, da k dani premici skozi dano točko poteka neskončno premic ali pa, da k dani premici skozi dano točko ne poteka nobena vzporednica, dobimo popolnoma novi geometriji, ki ju danes imenujemo **hiperbolična** in **sferična** geometrija. Geometrijo, s katero se bomo ukvarjali mi, bomo imenovali **Evklidova geometrija**. V njej velja naslednji aksiom o vzporednici:

Skozi **dano točko** lahko k **dani premici** položimo **natanko eno** vzporednico.

aksiom o vzporednici

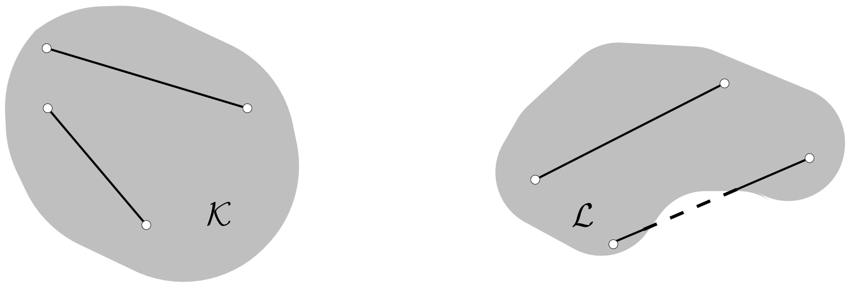


Slika 13: Skozi dano točko T lahko k dani premici p načrtamo natanko eno vzporednico q

Množica točk je **konveksna**, če **poljubna daljica**, s **krajišči** v množici, vsebuje **le** točke iz množice.

Če obstajata v množici **vsaj dve** taki točki, da daljica med njima vsebuje tudi točke, ki niso v tej množici, množica ni konveksna, pravimo tudi, da je **konkavna**.

Konveksne množice točk



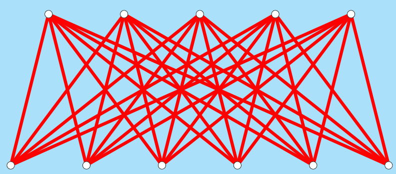
Slika 14: Konveksna monožica $\mathcal{K}$ in konkavna monožica $\mathcal{L}$

Naloge

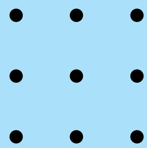
1. Naj bodo A, B, C in D take različne točke v ravnini, da nobene tri niso kolinearne. Koliko premic določajo? [6]

2. Vzemi 6 točk na ravnini tako, da nobene tri niso kolinearne. Koliko premic določajo? Koliko premic pa določa 10 točk, ki ustrezajo enakim pogojem? Zapiši še splošni rezultat, ko imaš n takih točk. [15, 45, $\frac{n(n-1)}{2}$]

3. Koliko daljic je narisanih na desni sliki, če je vsaka med petimi točkami v zgornji vrstici povezana z vsako med šestimi točkami v spodnji vrstici? Kaj pa, če je v zgornji vrsti 10 točk, v spodnji pa 20 točk? Kaj pa, če je v zgornji vrsti n in v spodnji m točk? [30]



4. Najmanj koliko točk moramo odstraniti na desni sliki, da potem nobene tri ne bodo kolinearne? Odgovor utemelji. [3]



5. Vemo, da je ravnina določena s tremi nekolinearnimi točkami. Koliko ravnin določajo tri nekomplanarne premice, ki se sekajo v eni točki? [3]

6. V največ koliko točkah prostora se sekajo 3 premice? Kaj pa 4, 5, 10 premic? V koliko točkah pa n premic? [3, 6, 10, 45, $\frac{n(n-1)}{2}$]

7. S pomočjo v razdelku opisanih osnovnih povezav utemelji naslednje trditve:

   (a) Če premica ne leži v dani ravnini, ima s to ravnino največ eno skupno točko.

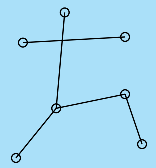
   (b) Če točka ne leži na dani premici, določata ta točka in dana premica natanko eno ravnino.

(c) Dve sekajoči se premici določata natanko eno ravnino, ki ju vsebuje.

(d) Dve različni vzporednici določata natanko eno ravnino, ki ju vsebuje.

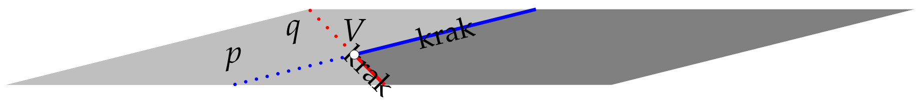
8. Najmanj koliko daljic moramo še dorisati na desni sliki, da bo vsaka izmed 7 točk povezana z enakim številom točk?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 10



2 Koti

Ena najpreprostejših ravninskih konveksnih množic je polravnina. Vzemimo dve polravnini iste ravnine in v preseku teh dveh ravnin izberimo poljubni točki. Ker sta polravnini konveksni množici, daljica med izbranima točkama leži v obeh polravninah in tako tudi v preseku polravnin. Zato je presek dveh polravnin iste ravnine konveksna množica, ki jo imenujemo **konveksni kot**.



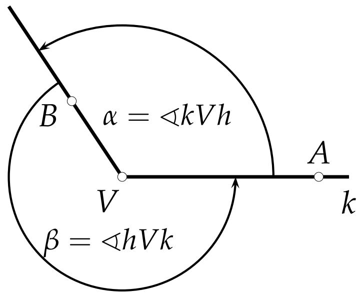
Slika 15: Nastanek kota

Točko V, v kateri se premici p in q, ki tvorita polravnini, sekata, imenujemo **vrh** kota, dela premic p in q, ki ležita v preseku polravnin (poltraka z izhodiščem v V), pa **kraka** kota.

Preostanek ravnine, v katerem leži konveksni kot, je **konkavni kot**.

Od zdaj naprej bomo obe vrsti kotov, konveksne in konkavne, imenovali kar kot. Kote bomo označevali običajno z grškimi črkami, recimo α, β, γ, δ (delta), ε (epsilon), ..., ali pa z vrhom in krakoma, recimo $\sphericalangle kVh$. Pri zadnjem zapisu vrh postavimo v sredino zapisa, prvo zapisan krak pa pomeni, da od njega preidemo v drugi krak v pozitivni smeri (smer nasprotna smeri gibanja urinega kazalca, $\circlearrowleft$). Povzemimo:

definicija kota



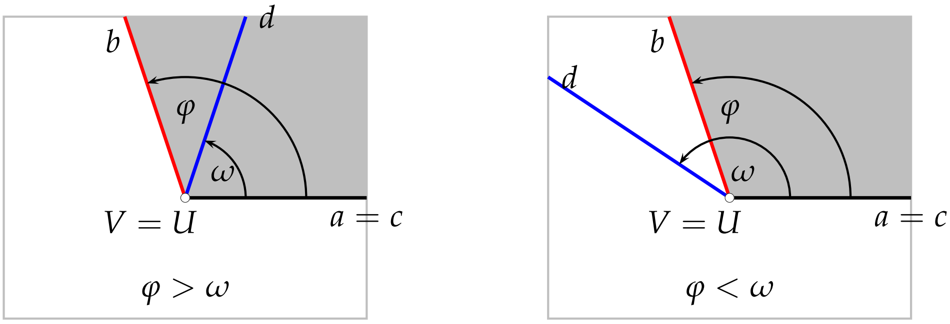
Slika 16: K definiciji kota

Namesto poltrakov k in h v poimenovanje kota lahko vpletemo tudi poljubne točke, ki ležijo na krakih. V zapisu kota tudi v tem primeru v sredini zapišemo vrh, pred vrhom postavimo točko na prvem kraku in za vrh točko na drugem kraku. Tudi v tem primeru se od prvega kraka gibljemo v pozitivni smeri v drugi krak. Tako kota na zadnji sliki zapišemo $\alpha = \sphericalangle AVB$ in $\beta = \sphericalangle BVA$.

Kot je ravninska množica, ki nastane kot presek dveh polravnin v dani ravnini. Točko, v kateri se sekata tvorilki polravnin, imenujemo **vrh kota**, nastala poltraka z izhodiščem v vrhu pa imenujemo **kraka kota**. Na sliki smo vrh označili z V, kraka pa s k in h. Konveksni kot α lahko zapišemo po dogovoru $\sphericalangle kVh = \sphericalangle AVB$, konkavni kot β pa z $\sphericalangle hVk = \sphericalangle BVA$.

primerjanje kotov

Kote lahko medseboj primerjamo. Vzemimo kota $\varphi = \sphericalangle aVb$ (fi) in $\omega = \sphericalangle cUd$ (omega). Enega od kotov, recimo ω, prenesemo v ravnino kota φ tako, da njegov vrh U postavimo v vrh V kota φ, njegov prvi krak c pa na prvi krak a. Če drugi krak d kota ω pade **v** kot φ, je kot φ večji od kota ω, če pa pade **izven** kota φ je kot ω večji od kota φ. V primeru, ko kraka d in b sovpadeta, sta kota φ in ω enaka.

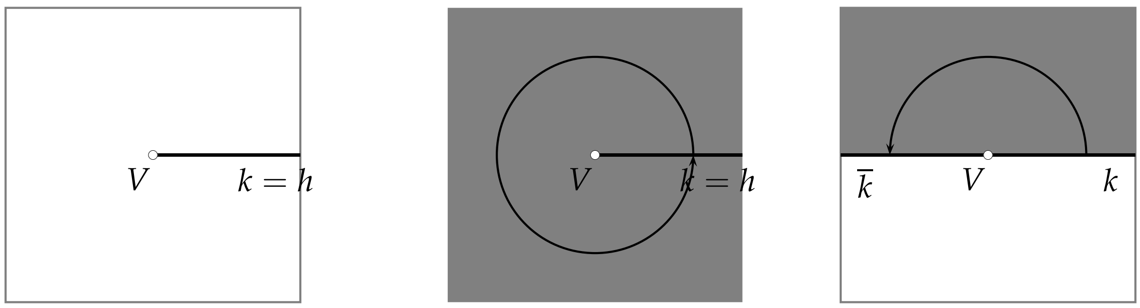


Slika 17: Primerjanje kotov

Oglejmo si nekatere posebne tipe kotov.

kot „nič“ **polni kot** **iztegnjeni kot**

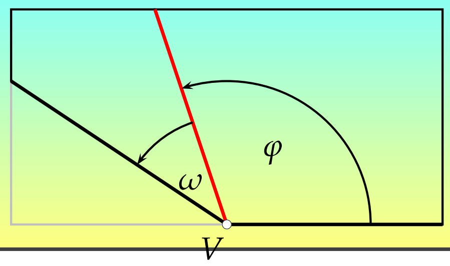
- **Kot „nič“** ima za kraka enaka poltraka, vsebuje pa le točke the dveh poltrakov, torej je: „nič“ $= 0 = \sphericalangle kVk$.
- **Polni kot** ima prav tako za kraka enaka poltraka, vsebuje pa vso ravnino, oznaka pa je prav tako $\sphericalangle kVk$.
- **Iztegnjeni kot** ima za kraka dopolnilna poltraka, torej predstavlja polravnino. Še oznaka iztegnjenega kota: $\sphericalangle kV\overline{k}$.



Slika 18: Kot 0, polni kot, iztegnjeni kot

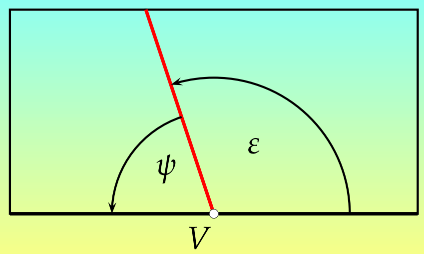
sosednja kota

Sosednja kota sta kota, ki imata **skupen vrhin skupen krak**. Na sosednji sliki sta prikazana sosednja kota φ in ω.



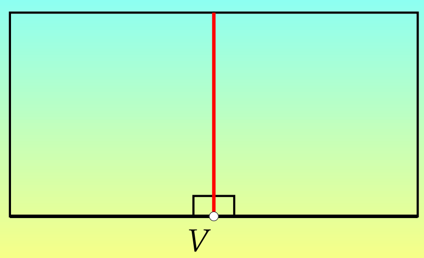
sokota

Sokota sta **sosednja** kota, ki skupaj sestavljata **iztegnjeni kot**. Na sosednji sliki sta prikazana sokota ε (epsilon) in ψ (psi).



pravi kot

Pravi kot je kot, ki je enak svojemu sokotu.



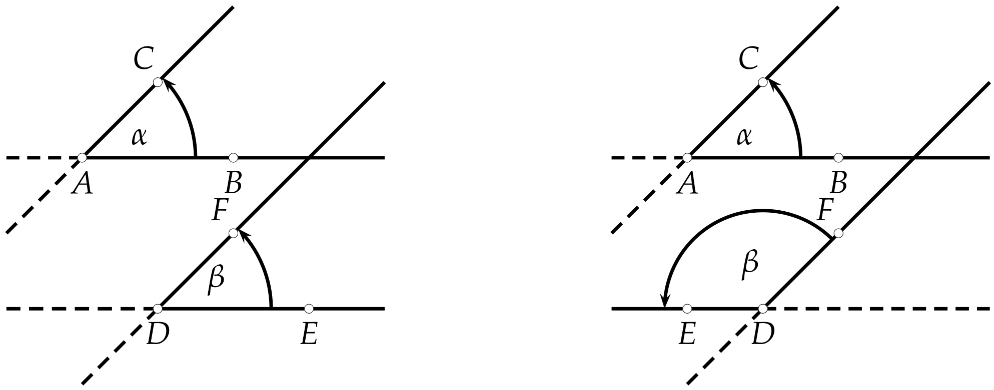
suplementarna

komplementarn
kota

Suplementarna sta kota, ki skupaj sestavita **iztegnjeni kot**, **komplementarna** pa sta taka kota, ki skupaj sestavita **pravi kot**.
Dodajmo, da suplementarna kota nista nujno sokota, pomembno je le, da s primernim premikom sestavita iztegnjeni kot.

kota z vzporedni kraki

Pomemben par kotov sta kota z vzporednimi kraki. Na levi strani spodnje slike sta prikazana para kotov z vzporednimi kraki: $\alpha = \sphericalangle BAC$ in $\beta = \sphericalangle EDF$, na desni sliki pa je $\beta = \sphericalangle FDE$. S preprostim vzporedni premikom lahko kot β premaknemo tako, da se prekrije s kotom α, ali pa je s kotom α sokot.

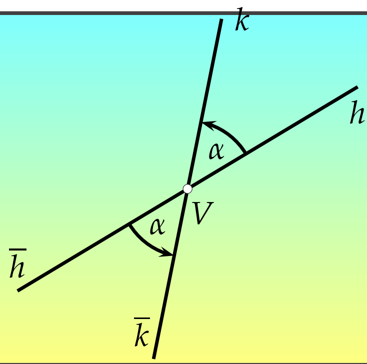


Slika 19: Koti z vzporednimi kraki

Kota, ki imata paroma vzporedne krake imenujemo kota z **vzporednimi kraki**. Zanju velja, da sta bodisi enaka ($\alpha = \beta$), bodisi suplementarna ($\alpha + \beta =$ iztegnjeni kot).

sovršna kota

Sovršna kota imata skupen vrh, kraka pa sta paroma dopolnilna poltraka, kota pa sta enaka.



Da sta sovršna kota skladna, lahko pojasnimo tudi tako, da imata oba enak sokot. Ker sokota tvorita iztegnjeni kot, sta zato sovršna kota enaka.

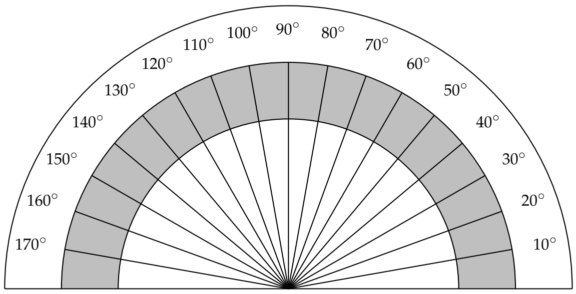
2.1 Merjenje kotov

Za merjenje kotov uporabljamo več osnovnih enot. Podrobneje se bomo ukvarjali z dvema: **kotno stopinjo** in **radianom**.

2.1.1 Kotna stopinja

Eno kotno stopinjo (1°) meri kot, ki je enak $\dfrac{1}{360}$ polnega kota. Manjši enoti sta kotna minuta ($1'$) in kotna sekunda ($1''$). Pretvorna faktorja sta: $1^\circ = 60'$ in $1' = 60''$.

Seveda so manjše enote tudi običajne decimalne enote, torej desetinka stopinje, stotinka stopinje, tisočinka stopinja .... Če je kot podan v stopinjah, minutah in sekundah, pravimo, da je kot z DMS enotami (degrees, minutes, seconds), če pa kot zapišemo z decimalnim zapisom pravimo, da smo ga zapisali v DD enotah (decimal degrees)



Slika 20: Kotomer je „ravnilo“ za merjenje kotov

Zgled 1: Naj bo $\alpha = 126^\circ 48' 36''$ in $\beta = 82{,}72^\circ$. Izračunaj $2\alpha - 3\beta$ na dva načina: prvič v DMS enotah in dobljeni rezultat zaokroži na minuto natančno, drugič v DD enotah in rezultat zaokroži na desetinko stopinje.

Izračunajmo iskano vrednost najprej v DMS enotah. Pretvorimo decimalni del kota β v minute in sekunde. To napravimo z sorazmernostno tabelo $\begin{array}{ccc} 1^\circ & \dots & 60' \\ 0{,}72^\circ & \dots & x' \end{array}$ iz katere izračunamo, da je $x' = 0{,}72^\circ = 60 \cdot 0{,}72' = 43{,}2'$, decimalni del minut ($= 0{,}2'$) pa s tabelo $\begin{array}{ccc} 1' & \dots & 60'' \\ 0{,}2' & \dots & x'' \end{array}$ pretvorimo v sekunde: $x'' = 0{,}2' = 60 \cdot 0{,}2'' = 12''$. Zato je $\beta = 82^\circ 43' 12''$.

Izračunanamo, da je $2\alpha = 2 \cdot 126°48'36'' = 252°96'72'' = 253°37'12''$ in $3\beta = 3 \cdot 82°43'12'' = 246°129'36'' = 248°9'36''$ ter

$$2\alpha - 3\beta = \begin{array}{rrr} 253° & 37' & 12'' \\ -248° & 9' & 36'' \end{array} = \begin{array}{rrr} 253° & 36' & 72'' \\ -248° & 9' & 36'' \\ \hline 5° & 27' & 36'' \end{array}$$

V gornjem računu smo $1'$ pretvorili v 60″ zato, da smo lahko opravili odštevanje sekund. Opisani postopek pogostokrat uporabimo za „ročno“ odštevanje kotov, ki so zapisani v $°\,'\,''$.

Končni rezultat zaokrožimo na minuto natančno: $2\alpha - 3\beta = \mathbf{5°28'}$, saj je $36''$ več kot pol minute.

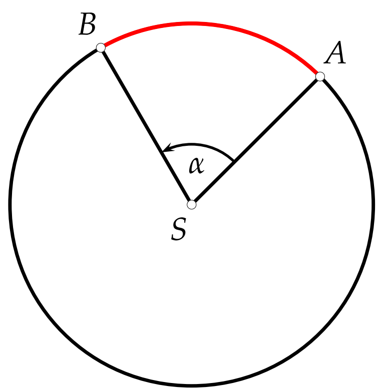
Za računanje z DD enotami moramo α pretvoriti v $°\,'\,''$. Spet si pomagamo s sorazmernostnimi tabelami: $\begin{array}{ccc} 1' & \ldots & 60'' \\ x' & \ldots & 36'' \end{array} \Rightarrow x = \frac{1' \cdot 36''}{60''} = 0,6'$ in $\begin{array}{ccc} 1° & \ldots & 60' \\ x° & \ldots & 48,6' \end{array} \Rightarrow x = \frac{1° \cdot 48,6'}{60'} = 0,81°$. Zato je $\alpha = 126°81'$ in tako $2\alpha - 3\beta = 2 \cdot 126°81' - 3 \cdot 82,72° = 5,46° \approx \mathbf{5,5°}$. Na koncu smo rezultat zaokrožili na desetinko stopinje. ■

Pretvarjanje med DMS in DD enotami lahko opravimo tudi s žepnim računalom. Običajno je pretvarjanje skrito v tipki $°\,'\,''$ ali pa v tipki DMS. Bolj podrobne opise, kako pretvarjati z računalom, najdemo v navodilih, ki smo jih dobili z računalom.

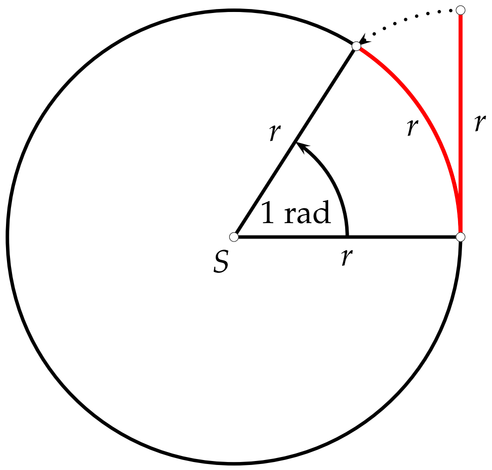
Polni kot očitno meri 360°, iztegnjeni pol manj, torej 180°, pravi kot pa 90°.

2.1.2 Radian

Preden zapišemo definicijo radiana, pojasnimo kaj je središčni kot loka. Privzemimo, da že poznamo definicijo krožnice, recimo iz osnovne šole. Recimo, da imamo na krožnici s središčem v točki S in s polmerom r dve točki: A in B. Množici točk med točkama A in B na krožnici, gledano v pozitivni smeri, imenujemo lok $\widehat{AB}$, kot $\sphericalangle ASB$ pa središčni kot loka.



> Kot **1 radian** meri središčni kot, ki mu ustreza lok z dolžino, ki je enaka polmeru kroga.



Slika 21: K definiciji radiana

Enota radian je predvsem koristna v višji matematiki. Njena glavna prednost je, da dolžina loka kar večkratnik polmera, če je kot podan z radiani, torej $l = r \cdot \alpha$, kjer je l dolžina loka, r polmer loka in α središčni kot loka, ki je merjen v radianih.
Ko kot zapisujemo z radiani, ga zapišemo običajno le s številom, redkeje pa z oznako **rad**. Tako, da kot β meri 2,46 radianov, običajno zapišemo $\beta = 2,46$, včasih, predvsem, ko hočemo poudariti, da je kot podan v radianih, pa zapišemo tudi $\beta = 2,46\,rad$.

Pretvornik med stopinjami in radiani poiščemo s sorazmernostno tabelo:

$$\begin{array}{rcc} 360^\circ & \ldots & 2\cdot\pi\cdot r \\ 1\text{ rad} & \ldots & r \end{array} \Rightarrow 1\text{ rad} = \frac{360^\circ \cdot r}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{180^\circ}{\pi \cdot}$$

Torej je:

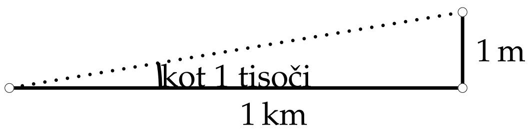
pretvornik °, rad

$$\boxed{1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad\qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad}}$$

Zgled 2: Pretvori kote 30°, 45°, 60°, 90° in 108° v radiane ter $\dfrac{5\pi}{6}$ v stopinje

Začnimo s kotom 108°: $108^\circ = 108 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{5}$. Podobno pretvajamo iz radianov v stopinje: $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$
Ostale kote zapišimo v tabeli:

°	30	45	60	90	180
rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π



Slika 22: K definiciji topniške kotne enote "tisoči"

■

Polni kot v radianih meri 2π, iztegnjeni pol manj, torej π radianov, pravi kot pa $\frac{\pi}{2}$.

Omenimo še dve enoti. Enota **grad** je definirana kot $\frac{1}{400}$ polnega kota, torej polni kot meri 400 gradov,kar zapišemo 400^g. Enoto vsebuje tudi večina žepnih računal, čeprav jo novejša računala opuščajo.

Enoto **tisoči** uporabljajo vojaki. En tisoči meri kot, pod katerim dolžino 1 m vidimo v razdalji 1 km.

Naloge

1. Dopolni naslednji tabeli:

stopinje	$36°$	$120°$	$300°$
radiani			

stopinje			
radiani	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$

2. Dopolni naslednji tabeli. V prvi tabeli rezultate zaokroži na desetinko stopinje, v drugi pa na minuto natančno.

$\circ\ \prime\ \prime\prime$	$36°48'$	$120°36''$	$300°24'36''$
DD			

DD	$36,8°$	$120,01°$	$300,4°$
$\circ\ \prime\ \prime\prime$			

3. Izračunaj vrednost kota $\alpha = 2 \cdot 36°48' + 3 \cdot 12°24'36''$ in rezultat zaokroži na stotinko stopinje natančno. $[\alpha = 110°49'48'' = 110,83°]$

4. Rešitev enačbe $\frac{x}{2} + 15° = \frac{\pi}{3}$ zapiši v stopinjah in radianih. $[x = 90° = \frac{\pi}{2}]$

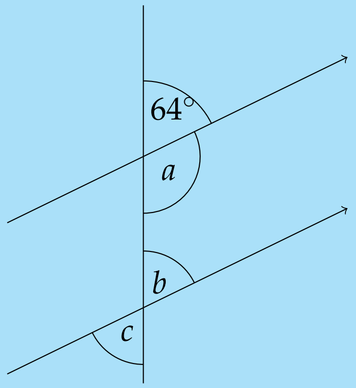
5. Koliko merita kota z vzporednimi kraki, če je eden za $40°$ večji od drugega? $[70°, 110°]$

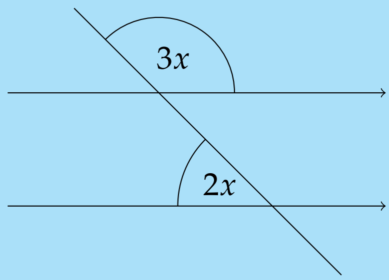
6. Koliko merita kota z vzporednimi kraki, če je njuna razlika $30°$? $[105°, 75°]$

7. Sokota sta v razmerju 4 : 5. Koliko merita? $[80°, 100°]$

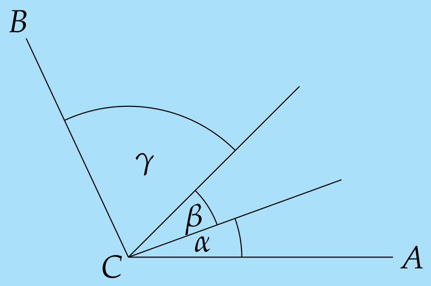
8. Kot α meri $26°31'$. Koliko meri suplementarni kot dvakratnika kota α? $[126°58']$

9. Na spodnjih slikah so premice, ki so označene s puščico, vzporedne. Izračunaj neznane kote a, b, c in neznanko x. [$a = 116°$, $b = c = 64°$, $x = 36°$]

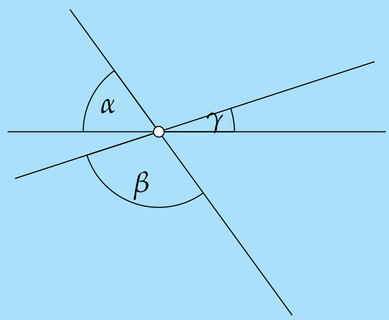




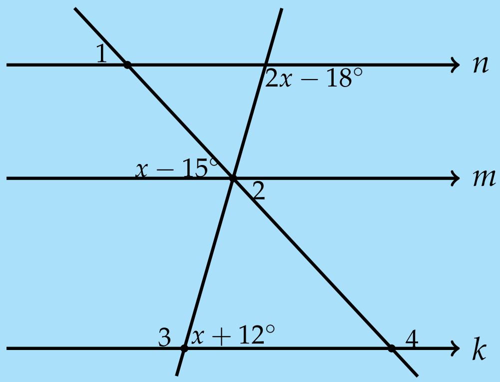
10. Kot $\sphericalangle ACB$ meri 115°. Če sta kota α in γ komplementarna, izračunaj velikost kota β. [25°]



11. Izračunaj kote α, β in γ na sosednji sliki, če veš, da je $\alpha = 3\gamma$ in $\beta = 2\alpha$. [54°, 108°, 18°]



12. Na sosednji sliki so premice m, n in k vzporedne. Izračunaj neznanko x v stopinjah in kote, ki so na sliki označeni z 1, 2, 3 in 4. [62°, 47°, 47°, 106°, 133°]

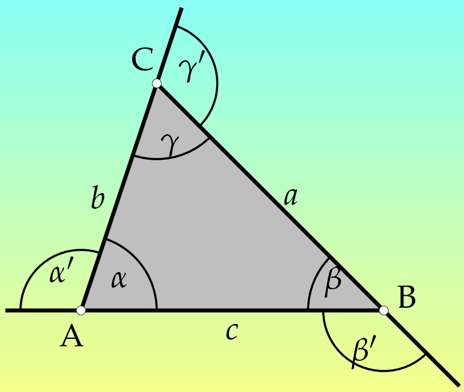


3 LIKI

Lik (tudi geometrijski lik) je **omejena množica točk v ravnini**. Sklenjeno krivo črto (krivuljo), ki lik omejuje, imenujemo **rob lika**. Med najpreprostejše like sodijo: trikotnik, štirikotnik, večkotnik, krog. V nadaljevanju si bomo ogledali njihove osnovne lasnosti.

3.1 Trikotnik

Vzemimo v dani ravnini točke A, B in C. **Trikotnik $\triangle$ ABC** imenujemo množico točk dane ravnine, ki jo omejujejo daljice AB, BC in CA. Točke A, B, C imenujemo **oglišča** trikotnika. Daljice AB, BC in CA imenujemo **stranice** trikotnika, njihove dolžine pa zaporedoma označimo s c, a in b, torej: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$.
Koti $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ so **notranji** koti, sokoti notranjih kotov pa so **zunanji** koti $\triangle$ ABC. Zunanje kote označimo s črtico $'$, torej α', β', γ'.



Dva ravninska lika sta skladna, če lahko en lik prenesemo (brez spreminjanja oblike)[1] na drugi lik tako, da se lika prekrivata. V primeru trikotnika to pomeni, da imata **skladna** (uporabljali bomo tudi besedo enaka) trikotnika enake stranice in enake notranje kote.

skladnost trikotniko

Trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ sta skladna natanko takrat, ko imata **skladne** vse tri stranice in vse tri notranje kote. Z drugimi besedami to pomeni, da imata skladna trikotnika enako dolge stranice in enako velike kote. Skladnost zapišemo s simbolom $\cong$ (razumljiv bo tudi običajni enačaj $=$), torej: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Pri zapisu skladnosti pazimo, da so notranji koti v ustreznih ogliščih enaki, torej, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

Če želimo preveriti ali sta dva trikotnika skladna, je torej treba preveriti enakost šestih količin. Kasneje bomo ugotovili, da je vsota notranjih kotov trikotnika 180°, zato je zadosti preveriti enakost treh stranic in dveh kotov, če pa poznamo še **izreke o skladnosti trikotnikov** je dovolj, da preverimo **tri količine**. V izrekih bomo uporabili zapis "**trikotnik je natanko določen z ...**", kar pomeni, da s temi podatki lahko neznane količine v trikotniku enolično izračunamo ali drugače povedano, da s temi podatki lahko natanko konstruiramo

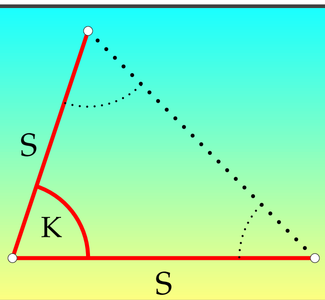
[1] učeno tako prenašanje imenujemo **togi premik**

samo **en** trikotnik (to pomeni, da če Janko in Metka pravilno narišeta trikotnik iz istih podatkov se bosta narisana trikotnika prekrivala, če prenesemo enega na drugega)

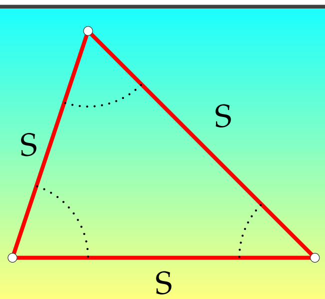
Izreki o skladnosti so štirje. V zapisu bomo v kraticah uporabljali črko S ali s za stranico trikotnika in K ali k za notranji kot trikotnika.

izreki o skladnosti

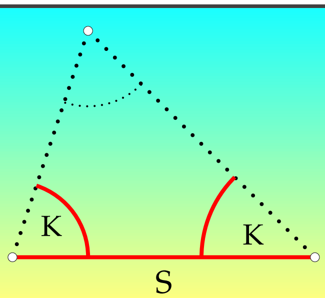
[SKS] Trikotnik je natanko določen z **dvema stranicama** in **kotom**, ki ga ti stranici **oklepata**.



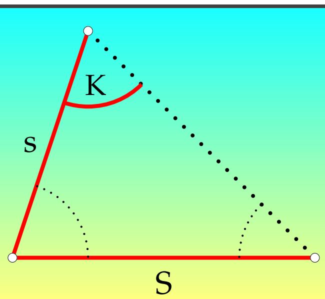
[SSS] Trikotnik je natanko določen s **tremi stranicami**.



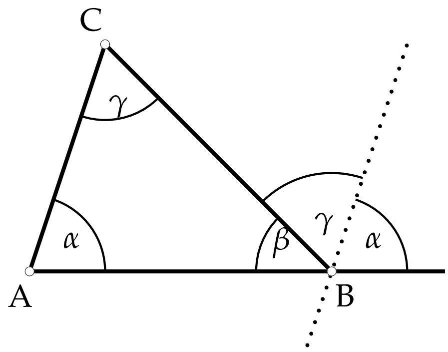
[SKK] Trikotnik je natanko določen s **stranico** in **dvema kotoma**.



[SsK] Trikotnik je natanko določen z **dvema stranicama (S in s, S $>$ s)** in **kotom (K)**, ki leži **večji stranici (S)** nasproti.



Nadaljujmo z lastnostmi kotov trikotnika. Na naslednji sliki v oglišču B trikotnika ABC narišemo vzporednico k nosilki stranice AC.



Slika 23: K izpeljavi vsote notranjih kotov trikotnika (prvič)

Oglišče B je poleg tega, da je vrh kota β, vrh še dveh kotov. Ker imata ta dva kota vzporedne krake z nesosednjima notranjima kotoma trikotnika, meri eden od njiju α, drugi pa γ. Zato vsi trije notranji koti trikotnika skupaj sestavljajo iztegnjeni kot. Poleg te ugotovitve, na sliki ugotovimo, da je zunanji kot trikotnika enak vsoti nesosednjih notranjih kotov.

koti trikotnika

Vsota notranjih kotov trikotnika meri 180°, torej: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$

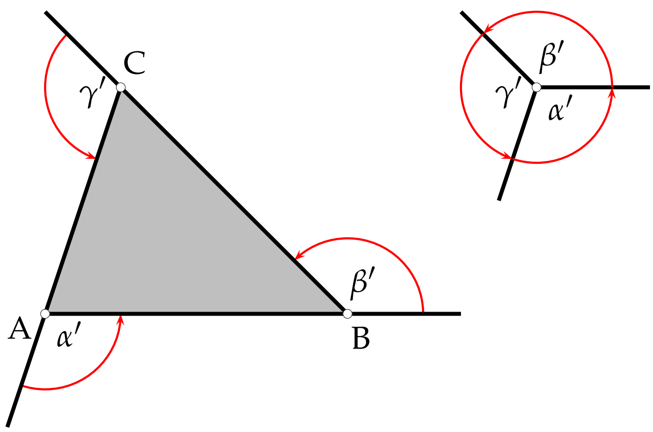
Zunanji kot trikotnika je enak vsoti nesosednjih notranjih kotov, torej:

$$\boxed{\alpha' = \beta + \gamma,\ \beta' = \alpha + \gamma,\ \gamma' = \beta + \beta}$$

Ker sta notranji in zunanji kot trikotnika sokota in je vsota notranjih kotov 180°, je vsota zunanjih kotov trikotnika enaka $3 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 360^\circ$, torej polnemu kotu.

Vsota zunanjih kotov meri toliko, kot polni kot, torej je $\boxed{\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ}$

Da je vsota zunanjih kotov trikotnika meri polni kot lahko ugotovimo tudi na naslednji način: Sprehodimo se po stranicah trikotnika od oglišča A preko oglišč B in C nazaj do oglišča A. Tako smo se zasukali ravno za polni kot, zasuki v posameznih ogliščih pa so zunanji koti trikotnika.



Da vsota notranjih kotov meri 180° se lahko prepričamo še na drug način. Notranji in ustrezni zunanji kot trikotnika sta sokota, zato skupaj prineseta 180°. Taki pari sokotov so trije, torej skupaj prinesejo $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. K rezultatu zunanji koti prinesejo 360°, zato potem notranji koti dodajo $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

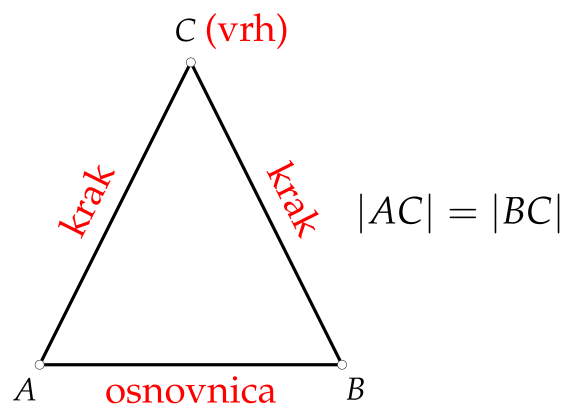
3.1.1 Enakokraki trikotnik

Če primerjamo dolžine stranic, lahko trikotnike razdelimo na:

- **raznostranični trikotnik**; vse stranice imajo različne dolžine.
- **enakokraki trikotnik**; dve stranici imata enako dolžino.
- **enakostranični trikotnik**; vse stranice imajo enako dolžino.

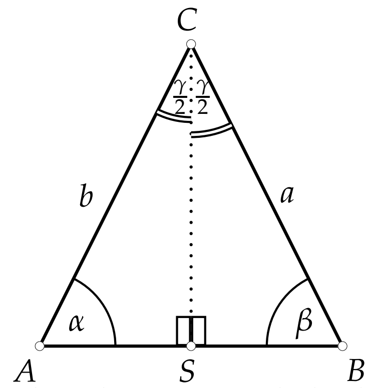
Za nas bo posebno zanimiv enakokraki trikotnik.

Trikotnik, ki ima skladni (enaki) dve stranici, imenujemo **enakokraki** trikotnik. Skladni stranici imenujemo **kraka**, tretja stranica je **osnovnica** trikotnika, oglišče nasproti osnovnice je **vrh** trikotnika.



Slika 24: Enakokraki trikotnik

Na naslednji sliki smo v enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ ($|AC| = |BC|$) s točko S razpolovili osnovnico AB. Trikotnika $\triangle ASC$ in $\triangle BSC$ imata skladne vse tri stranice: $|AC| = |BC|$ zaradi enakokrakosti trikotnika ABC, $|AS| = |BS|$, ker je S razpolovišče osnovnice AB, daljica CS pa je skladna sama sebi. Zato je (izrek SSS): $\triangle ASC \cong \triangle BSC$. Zato so potem koti nasproti enakih stranic enaki.



Slika 25: K izpeljavi lastnosti enakokrakega trikotnika

lastnosti enakokrak trikotnika

V enakokrakem trikotniku ABC s krakoma $a = |BC| = |AC| = b$ velja:

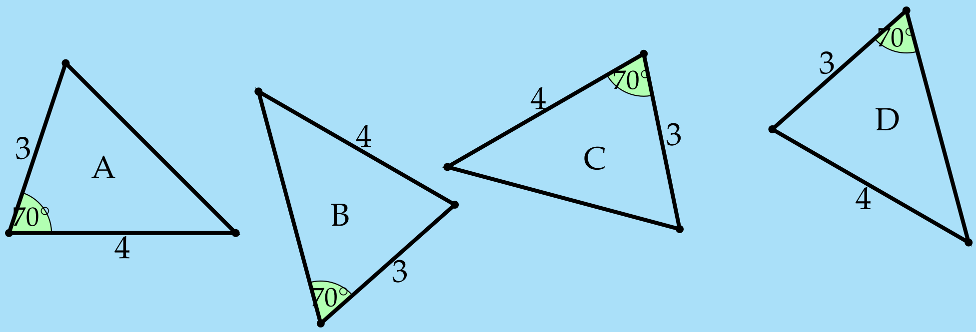
1. Kota ob osnovnici sta enaka, torej $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \beta$.
2. Daljica SC razpolavlja kot ob vrhu.
3. Kota $\sphericalangle CSA$ in $\sphericalangle BSC$ sta skladna in hkrati sokota, zato je daljica SC pravokotna na osnovnico AB.

enakostran trikotnik

Poseben primer enakokrakega trikotnika je **enakostranični** trikotnik, ki ima vse tri stranice skladne. V enakostraničnem trikotniku sta poljubni stranici par krakov enakokrakega trikotnika, zato so vsi notranji koti skladni, torej vsak med njimi meri 60°.

Naloge

1. Za trikotnike A, B, C in D na spodnji sliki ugotovi skladnosti in utemelji skladnost z ustreznim izrekom o skladnosti trikotnikov: SKS, SSS, SKK, SsK.



2. Naj ima trikotnik ABC običajne oznake α, β, γ za notranje in α', β', γ' za zunanje kote. Izračunaj notranje kote trikotnika, če:

   (a) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 7 : 8$, [$30°, 70°, 80°$]

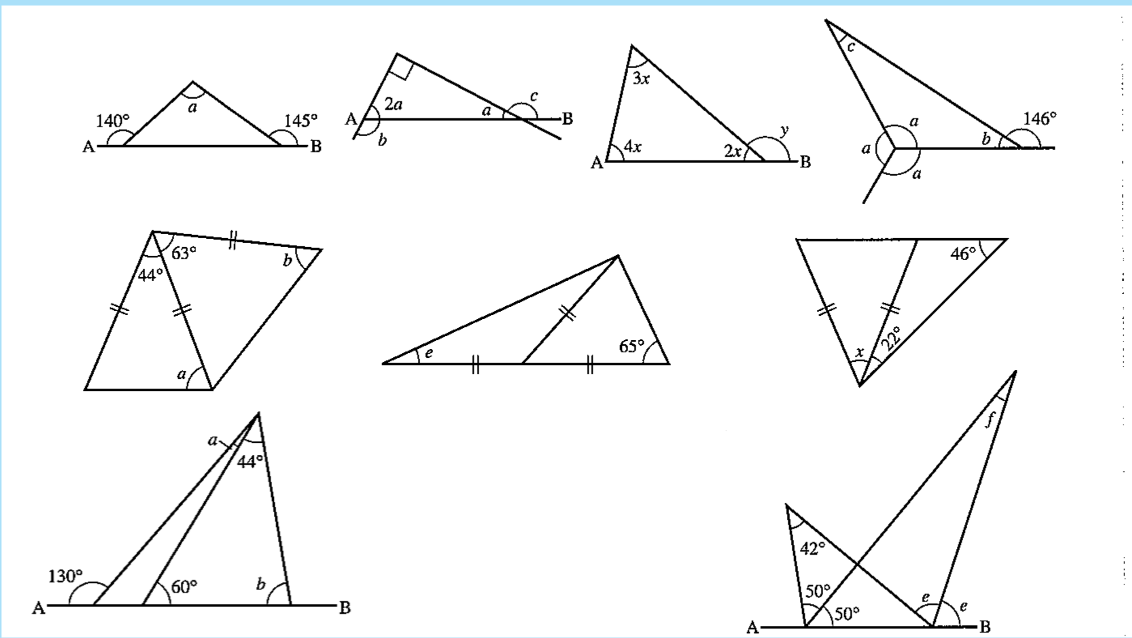
   (b) α je $20°$ večji od kota β, kot γ pa je za $12°$ manjši od dvakratnika kota α, [$53°, 33°, 94°$]

   (c) β meri $\frac{3}{4}$ pravega kota, zunanji kot α' je enak $145°$ [$77.5°, 67.5°, 35°$]

   (d) $\alpha : \beta = 1 : 2$, $\beta : \gamma = 4 : 9$, [$24°$, $48°$, $108°$]

   (e) $\alpha' : \beta' = 13 : 17$, $\gamma = 90°$, [$63°$, $27°$]

3. Izračunaj neznane kote a, b, c, e, f in x na spodnjih slikah. Enake oznake na posameznih stranicah pomenijo, da imajo stranice isto dolžino.



[$a = 105°; a = 105°,\ b = 160°,\ c = 170°; x = 20°,\ y = 140°; a = 105°, b = 34°, c = 26°; a = 68°, b = 58{,}5°; e = 25°; x = 44°; a = 10°, b = 76°; e = 71°, f = 21°$]

3.1.2 Še nekaj posledic lastnosti enakokrakega trikotnika

V naslednjih vrsticah si bomo ogledali nekaj posledic lastnosti enakokrakega trikotnika. Začnimo z naslednjima definicijama:

Simetrala daljice je premica, ki daljico razpolavlja in je nanjo pravokotna.

Simetrala kota je premica, ki kot razpolavlja.

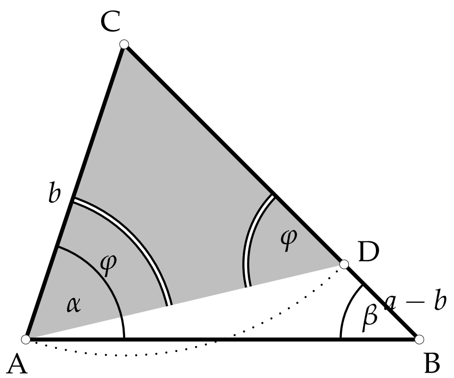
simetrala daljice in kota

Pravokotnica na dano premico je premica, ki v presečišču z dano premico oklepa pravi kot.

pravokotnica na premico

medsebojni odnos kotov in stranic trikotnika

Zgled 3: Dokaži, da v trikotniku nasproti daljše stranice leži večji kot in obratno, torej, da nasproti večjega kota leži daljša stranica?



Vzemimo najprej, da je stranica $a = |BC|$ daljša od stranice $b = |AC|$. Tedaj lahko prenesemo krajšo stranico b v notranjost daljše stranice tako, kot smo to napravili na sliki, kjer je $b = |CD|$. Trikotnik $\triangle ADC$ je enakokrak trikotnik s krakoma AC in DC. Zato sta kota $\sphericalangle CAD$ in $\sphericalangle CDA$ enaka, recimo φ. Očitno je $\alpha > \varphi$. Ker je $\sphericalangle CDA = \varphi$ zunanji kot trikotnika $\triangle ABD$, je zato večji od nesosednjega notranjega kota $\sphericalangle CBA = \beta$, torej je $\varphi > \beta$. Zato je $\alpha > \beta$.

Podobno pokažemo obratno trditev, da nasproti večjega kota leži daljša stranica. Vzemimo, da je $\alpha > \beta$. V trikotniku $\triangle ABC$ odmerimo kot $\sphericalangle BAD = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Ker je $\alpha > \beta$, točka D leži v notranjosti stranice BC. Račun, da je $\sphericalangle CAD = \alpha - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, dejstvo, da je $\sphericalangle CAD$ zunanji kot trikotnika $\triangle ABD$ in račun $\sphericalangle CDA = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ pokažejo, da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA$ in zato $b = |AC| = |CD| < |CB| = a$. Torej ob predpostavki $\alpha > \beta$ res velja, da je $a > b$. ■

Pokazali smo, da za notranje kote in stranice trikotnika velja (oznake so običajne, torej nasproti kota α leži stranica A, nasproti β stranica b in nasproti γ stranica c):

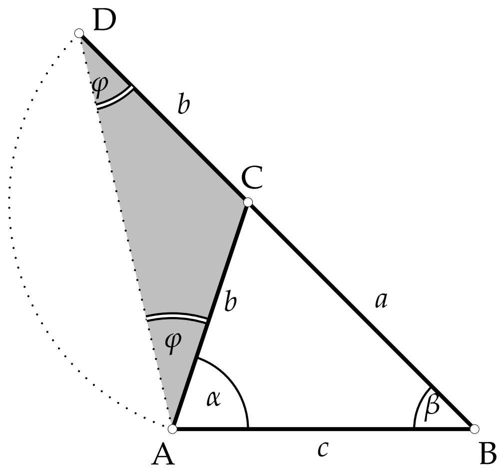
$$\boxed{\alpha > \beta > \gamma \Leftrightarrow a > b > c}$$

trikotniška neenakost

Zgled 4: Dokaži, da je v trikotniku vsota dveh stranic trikotnika večja od tretje stranice trikotnika.

Na nosilko stranice BC prenesemo stranico $b = |AC| = |CD|$. Trikotnik $\triangle ACD$ je enakokraki trikotnik, zato sta kota $\sphericalangle CAD$ in $\sphericalangle ADC$ enaka, recimo φ. V trikotniku $\triangle ABD$ je nasproti stranice BD kot $\alpha + \varphi$, ki je večji od kota φ, ki leži nasproti stranice AB $\triangle ABD$. Zato je tudi stranica BD daljša od stranice AB. Torej je res $a + b > c$. Podobno bi pokazali tudi neenakosti $b + c > a$ in $a + c > b$. Zapisane neenakosti imenujemo trikotniške neenakosti:

$$\boxed{a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a}$$



Zgled 5: Konstruiraj trikotnika s podatki:

1. $a = 8\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ in $c = 14\,\text{cm}$
2. $a = 8\,\text{cm}$, $b = 9\,\text{cm}$ in $\alpha = 95^\circ$

V prvem primeru dolžine stranic trikotnika ne ustrezajo trikotniški neenakosti ($14 = 8 + 6 \not> 14$), zato ga je nemogoče konstruirati. Tudi trikotnik v drugem primeru je nemogoče konstruirati, saj je $b > a$, zato tudi $\beta > \alpha$, kar pa ne gre, saj v tem primeru vsota $\alpha + \beta$ preseže 190°. ■

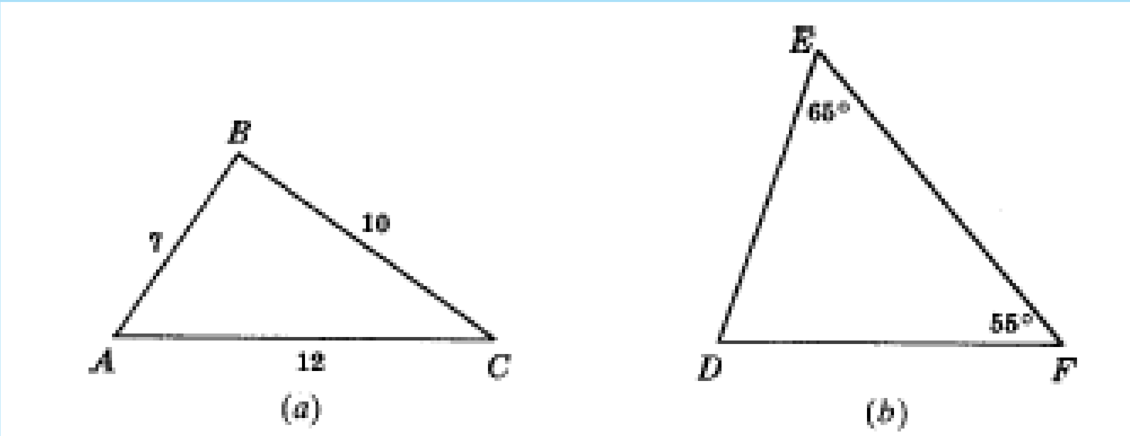
Naloge

1. Katera od naslednjih trojk naravnih števil lahko predstavlja stranice trikotnika?

   (a) 3, 4, 8 (b) 5, 7, 12 (c) 3, 4, 6 (d) 2, 7, 8 (e) 50, 50, 5

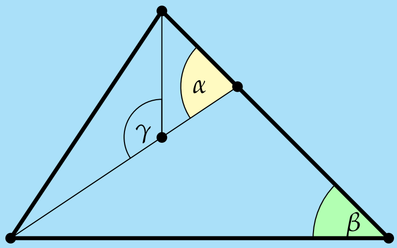
   [(c), (d), (e)]

2. Na spodnji sliki (a) uredi notranje kote trikotnika po velikosti od najmanjšega proti največjemu. Kote poimenuj kar po ogliščih, recimo kot pri oglišču A označi z $\sphericalangle A$. V trikotniku na sliki (b) uredi po velikosti stranice od najmanjše proti največji. Stranice poimenuj z malimi črkami nasprotnega oglišča, recimo nasproti oglišču D je stranica d.



[$\sphericalangle C < \sphericalangle A < \sphericalangle B$; $f < d < e$]

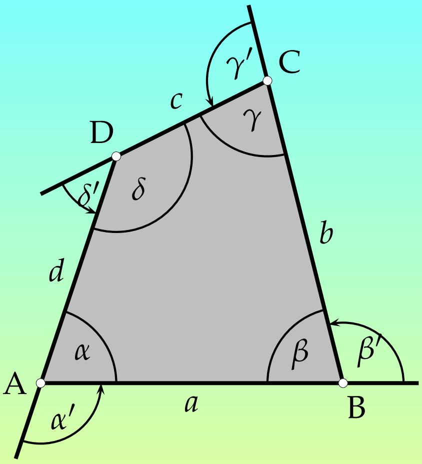
3. Razvrsti od najmanjšega do največjega kote α, β in γ na sosednji sliki. Uredite utemelji. [$\beta < \alpha < \gamma$; najlaže utemeljiš z lastnostjo, da je zunanji kot trikotnika večji od nesosednjega notranjega kota]



4. Za katera števila x so števila x, 3, 4 stranice trikotnika? [$1 < x < 7$]

3.2 Konveksni štirikotniki

Vzemimo v dani ravnini štiri polravnine. Štiri tvorilke polravnin naj se sekajo v točkah A, B, C in D. Skupni presek vseh štirih polravnin imenujemo **konveksni štirikotnik ABCD** z **oglišči** A, B, C in D.



Daljice AB, BC, CD in DA, ki ležijo na tvorilkah polravnin, imenujemo **stranice** štirikotnika, njihove dolžine pa zaporedoma označimo z a, b, c in d, torej: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$.

Koti $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle DCB = \gamma$ in $\sphericalangle ADC = \delta$ so **notranji** koti, sokoti notranjih kotov pa so **zunanji** koti štirikotnika ABCD. Zunanje kote označimo s črtico $'$, torej α', β', γ' in δ'.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali v glavnem s konveksnimi štirikotniki, zato bomo pridevnik konveksni opuščali. S konkavnimi štirikotniki, kot je recimo štirikotnik, se bomo ukvarjali le občasno.

V zgledih si oglejmo nekaj lastnosti in pojmov konveksnih štirikotnikov.

Zgled 6: Izračunaj vsoto zunanjih kotov konveksnega štirikotnika.

Recimo, da se nahajamo v oglišču A štirikotnika ABCD in se sprehodimo po stranici a do oglišča B. V B se obrnemo v smeri oglišča C, torej se zavrtimo za zunanji kot β'. Nadaljujemo sprehod po stranici b do oglišča C, kjer se zavrtimo za zunanji kot γ' in nadaljujemo sprehod po stranici c do oglišča D, se tam zavrtimo za zunanji kot δ' in usmerimo po stranici d do oglišča A, kjer smo sprehod začeli. V A se zavrtimo za zunanji kot α' in smo tako spet usmerjeni, kot na začetku, proti oglišču B. Pri vrtenju v ogliščih smo se skupaj zavrteli za polni kot, posamezni zasuki pa so bili zunanji koti štirikotnika. Zato je vsota zunanjih kotov štirikotnika enaka polnemu kotu, torej je:

zunanji koti

$$\boxed{\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°}$$

Zgled 7: Izračunaj vsoto notranjih kotov konveksnega štirikotnika.

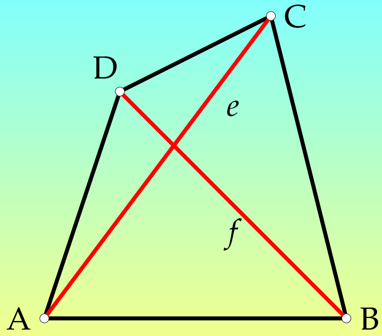
Notranji in ustrezni zunanji kot sta sokota. Zato je njuna vsota iztegnjeni kot, torej 180°. Skupna vsota zunanjih in notranjih kotov štirikotnika je tako $4 \cdot 180° = 720°$. Ker zunanji koti k tej vsoti prispevajo 360°, je vsota notranjih kotov tudi enaka 360°, torej:

notranji koti

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$$

diagonali

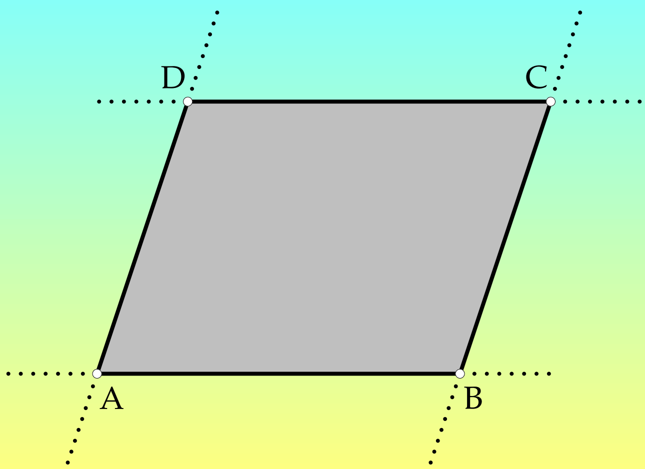
Daljici, ki imata krajišči v nesosednjih ogliščih štirikotnika ABCD, imenujemo **diagonali**. Običajno njuni dolžini označimo z $e = |AC|$ in $f = |BD|$.



3.2.1 Paralelogram

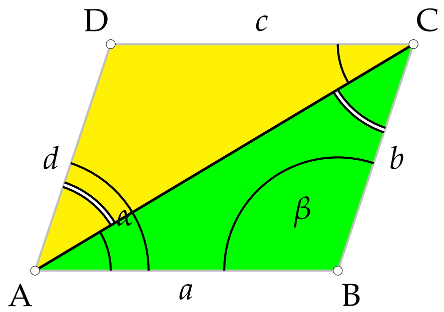
definicija

Štirikotnik ABCD, ki ima paroma vzporedne stranice (nosilke stranic), recimo $(A, B) \parallel (C, D)$, $(A, D) \parallel (B, C)$, imenujemo **paralelogram** ali **romboid**.



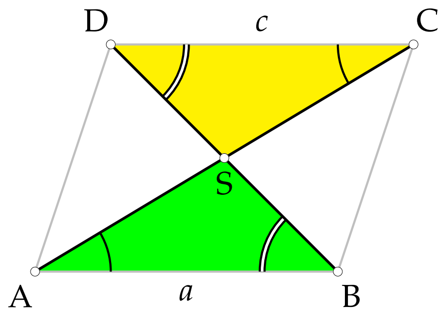
V naslednjih vrsticah bomo izpeljali osnovne lastnosti paralelograma. ¡Paralelogram ABCD z diagonalo AC razdelimo na dva trikotnika: $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$.

Para kotov $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ACB$ (desna slika) imata vzporedne krake, zato sta skladna. Diagonala AC leži v trikotniku $\triangle ABC$ in v trikotniku $\triangle CDA$, ki imata tako skladno stranico in dva kota, zato sta skladna (izrek SSK). Ker sta skladna, imata enake stranice in enake kote. Zato je $a = |AB| = |CD| = c$, $b = |BC| = |AD| = d$ in $\beta = \sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = \delta$ ter $\alpha = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD = \sphericalangle DCA + \sphericalangle DCA = \gamma$.



Pokažimo, da sta sosednja kota α in β suplementarna. Ker je $\alpha = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD$ in so $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CAD$ in β notranji koti trikotnika ABC, je $\alpha + \beta = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD + \beta = 180°$.

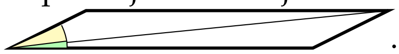
Pokažimo še, da se diagonali paralelograma razpolavljata. Na sosednji sliki si ogledamo skladna trikotnika $\triangle ABS$ in $\triangle CDS$. Skladna sta, ker imata enako stranico ($a = c$) in dva kota ($\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BDC$). Zato je $|AS| = |CS|$ in $|BS| = |DS|$, torej je točka res sredina obeh diagonal ■



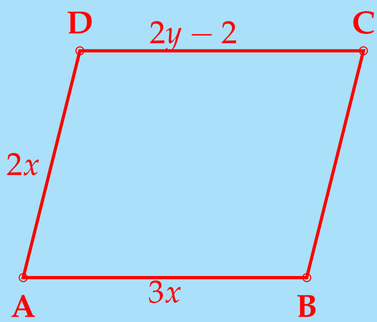
lastnosti paralelograma

Za paralelogram veljajo naslednje lastnosti:

- Nasprotni stranici paralelograma sta enaki, torej $a = c$, $b = d$.
- Nasprotna kota paralelograma sta enaka, torej $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.
- Sosednja kota sta suplementarna, torej $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$.
- Diagonali paralelograma se razpolavljata, torej je $|AS| = |BS| = \frac{e}{2}$, $|BS| = |DS| = \frac{f}{2}$.

Naj dodamo, da diagonali paralelograma v splošnem ne razpolavljata notranjih kotov, recimo v dolgem in ozkem paralelogramu se to hitro opazi:  .

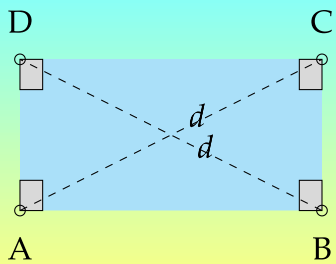
Zgled 8: **Na spodnji sliki je narisan paralelogram z obsegom (vsota dolžin vseh stranic) 40 enot. Izračunaj njegovi stranici.**



Stranice paralelograma so: $a = 3x$, $b = d = 2x$, $c = 2y - 2$. Izračunati moramo dve neznanki, zato potrebujemo pomoč dveh enačb. Prvo: $3x + 2x + 2y - 2 + 2x = 40$ najdemo v obsegu, drugo: $3x = 2y - 2$ pa v enakosti nasprotnih stranic. Enačbi uredimo v sistem $\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 2y & = & 42 \\ 3x & - & 2y & = & -2 \end{array}$, ki nam postreže z rešitvijo: $x = 4$, $y = 7$. Zato merita stranici paralelograma 12 in 8 enot. ■

pravokotnik

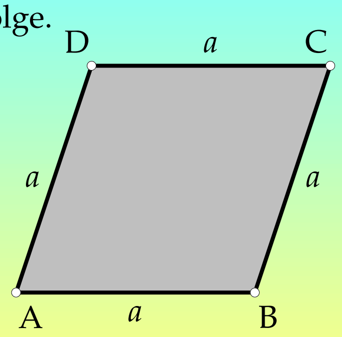
Poseben primer paralelograma je pravokotnik. Pravokotnik ima vse notranje kote prave, torej enake 90°, pa tudi diagonali sta enako dolgi.

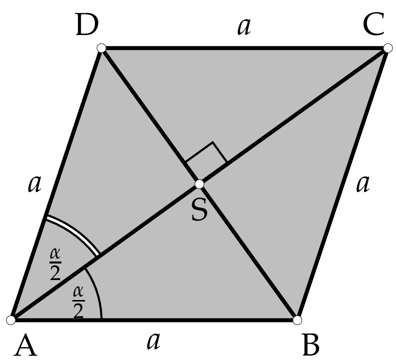


3.2.2 Romb

definicija

Romb je enakostranični paralelogram. Drugače povedano: romb je paralelogram, ki ima vse štiri stranice enako dolge.





Naj bo S razpolovišče diagonal romba ABCD. Trikotniki $\triangle ABS$, $\triangle CBS$, $\triangle CDS$ in $\triangle ADS$ imajo skladne tri stranice (a, $\frac{e}{2}$, $\frac{f}{2}$), zato so skladni in imajo tako skladne tudi notranje kote.

Štirje koti ob oglišču S ležijo nasproti stranice romba, zato so skladni, skupaj sestavljajo polni kot, torej je vsak od njih pravi kot.

Ker kota $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CAD$ ležita nasproti skladnih stranic v skladnih trikotnih in skupaj sestavljata kot α, je vsak od njiju enak $\frac{\alpha}{2}$.

Ugotovljeno zapišimo:

lastnosti romba

Poleg vseh lastnosti paralelograma ima romb še naslednji lastnosti:

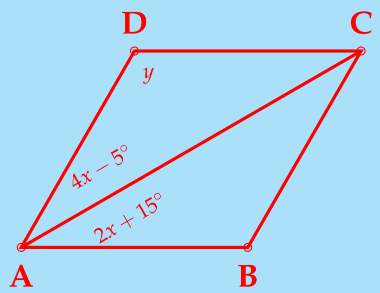
- Diagonali romba se sekata pod pravim kotom.
- Diagonali razpolavljata notranje kote romba.

Posebne vrste romb je kvadrat:

kvadrat

Romb, ki ima en notranji kot enak pravemu kotu, imenujemo **kvadrat**.

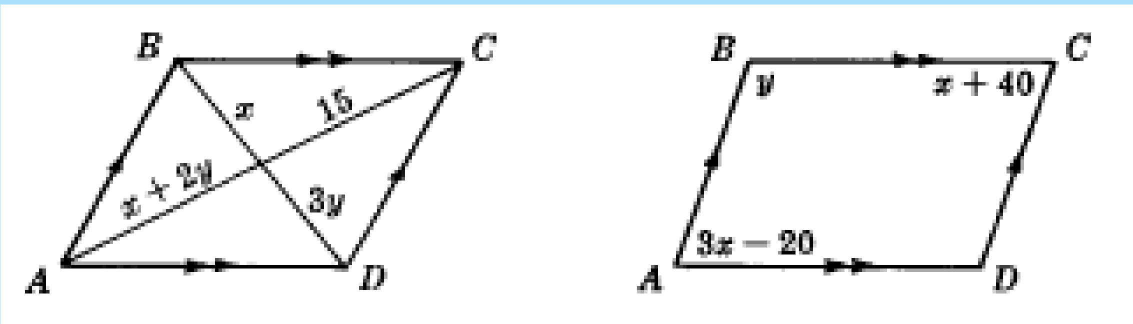
Zgled 9: Izračunaj notranje kote romba ABCD na spodnji sliki:



Ker diagonala razpolavlja notranji kot romba, je $2x + 15° = 4x - 5°$ in zato $x = 10°$. Notranji koti romba so tako: $\alpha = 2(2 \cdot 10° + 15°) = 70°$ in $\beta = y = 180° - \alpha = 110°$. ■

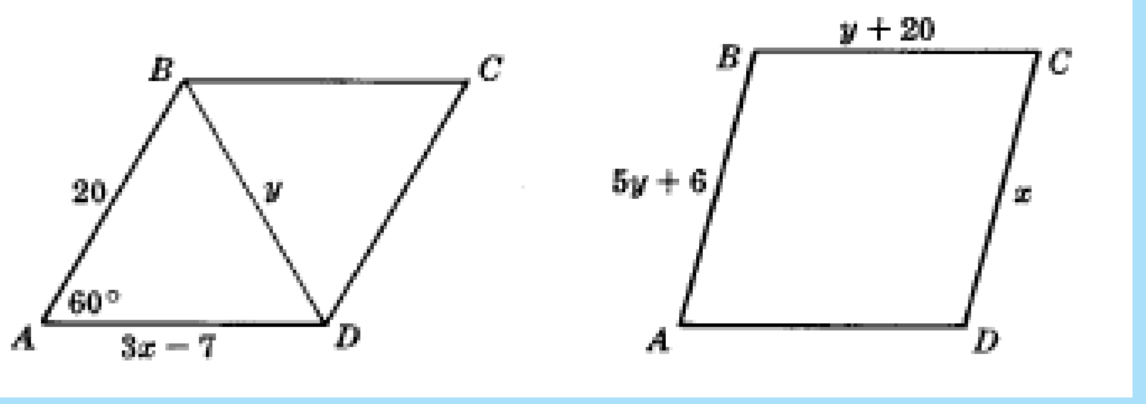
Naloge

1. Izračunaj neznani količini x in y v paralelogramih na spodnji sliki.



   [$x = 9$, $y = 3$; $x = 30°$, $y = 110°$]

2. Izračunaj neznani količini x in y v rombih na spodnji sliki.



[$x = 9$, $y = 20$; $x = 23\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{1}{2}$]

3.2.3 Trapez

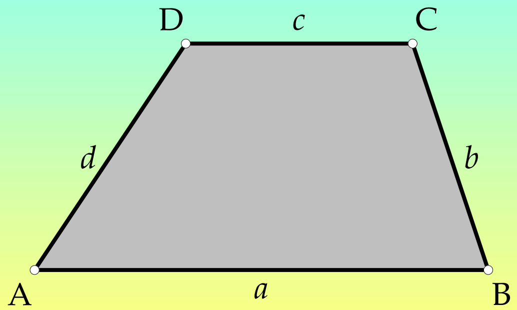
definicija

Trapez je štirikotnik, ki ima **vzporedni dve stranici**. Stranici, ki sta vzporedni, imenujemo **osnovnici** trapeza, ostali dve stranici sta **kraka** trapeza.

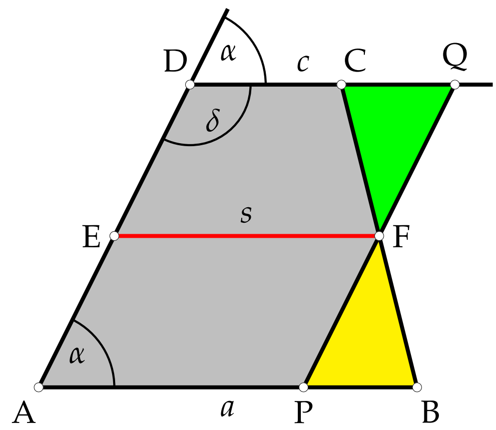
$(A, B) \parallel (C, D)$

a, $c \ldots$ osnovnici

b, d $\ldots$ kraka



Oglejmo si lastnosti notranjih kotov trapeza. Na sosednji sliki ima sokot notranjega kota δ pri oglišču D kraka vzporedna z notranjim kotom α v oglišču A, zato je enak kotu α. Potem pa velja $\alpha + \delta = 180°$. Ker je vsota notranjih kotov štirikotnikov enaka $360°$, je tudi vsota ostalih dveh notranjih kotov $180°$.



Kota ob krakih trapeza sta suplementarna: $\boxed{\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°}$

V gornji sliki smo z E in F označili središči krakov AD in BC. Daljico EF imenujemo srednjica trapeza. Kako izračunamo srednjico? V točki F narišemo vzporednico k kraku AD. Vzporednica seka nosilki osnovnic a in c trapeza v točkah P in Q. Trikotnika $\triangle PBF$ in $\triangle QCF$ ima enako stranico ($|BF| = |CF|$), njuni notranji koti pa imajo paroma vzporedne krake. Zato sta trikotnika skladna in sta stranici nasproti oglišča F enaki, torej je $|PB| = a - s = s - c = |CQ|$. Iz zadnje enačbe izračunamo srenjico $s = \frac{a+c}{2}$. Povzemimo:

srednjica

Srednjica s trapeza je daljica, ki povezuje središči krakov trapeza. Srednjico trapeza izračunamo s formulo:

$$\boxed{s = \frac{a+c}{2}}$$

V formuli sta z a in c označeni osnovnici trapeza.

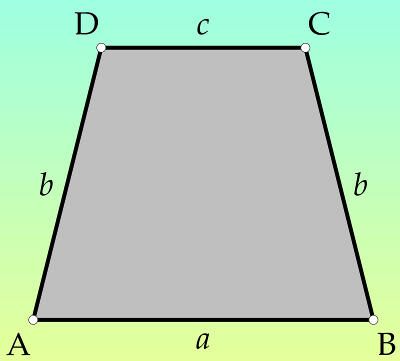
Posebni vrsti trapeza sta enakokraki trapez in pravokotni trapez:

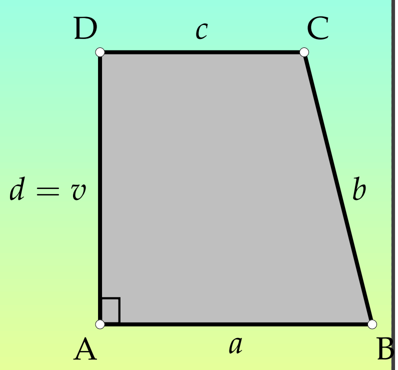
enakokraki, pravokotni trapez

Trapez, ki ima enaka kraka, imenujemo **enakokraki** trapez. Preprost razmislek nam pove, da sta enakokrakem trapezu kota ob isti osnovnici enaka, torej:

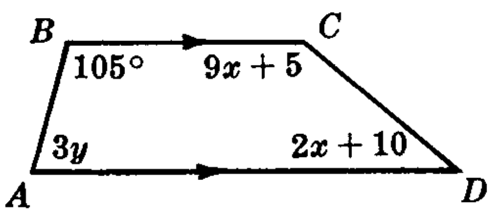
$$\boxed{\alpha = \beta, \gamma = \delta}$$

Trapez, ki ima en notranji kot pravi kot, imenujemo **pravokotni** trapez.





Zgled 10: Izračunaj neznanki x in y na sliki trapeza ABCD:

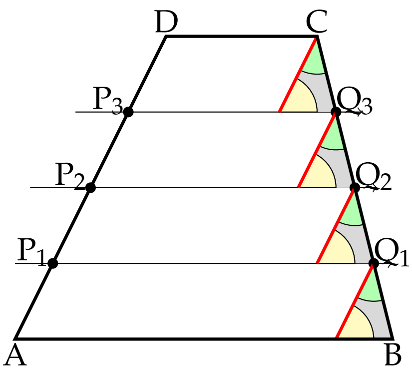


Ker sta kota ob krakih suplementarna, je $3y + 105° = 180°$ in $(2x + 10°) + (9x + 5°) = 180°$.

Zato je $y = 25^\circ$ in $x = 15^\circ$. ■

Zgled 11: **Utemelji naslednjo trditev: Če tri ali več vzporednih premic preseka en krak trapeza na enake odseke, potem ta množica vzporednic (= snop premic) preseka tudi drug krak trapeza na enake dolge odseke.**

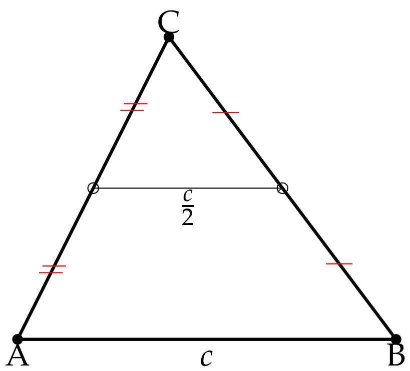
Vzemimo, da snop vzporednih premic sestavljajo tri premice. Na desni sliki snop preseka krak AD trapeza ABCD v točkah P_1, P_2 in P_3, krak BC pa v točkah Q_1, Q_2 in Q_3. Predpostavka trditve je, da je $|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3D|$. Dokazati moramo, da je tudi $|BQ_1| = |Q_1Q_2| = |Q_2Q_3| = |Q_3C|$. To storimo takole:



V vsaki od točk Q_1, Q_2 in Q_3 narišemo vzporednico k kraku AD. Tako na sliki nastanejo v označenih nastalih trikotnikih štiri rdeče daljice. Ker so levo od označenih trikotnikov nastali paralelogrami, imajo vse rdeče daljice enako dolžino. Koti ob rdečih daljicah so skladni, ker imajo paroma vzporedne krake. Označeni trikotniki imajo skladno stranico in dva kota, zato so po izreku SKK skladni. Zato so skladne tudi ostale enakoležne stranice, torej tudi odseki na kraku BC. Ravno to pa smo hoteli dokazati.

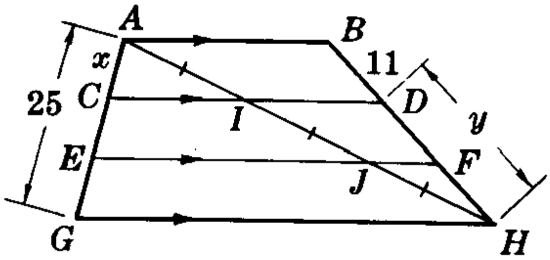
Na podoben način bi trditev dokazali tudi za več vzporednih premic. ■

Dodajmo še, da gornjo trditev lahko uporabimo tudi v trikotniku, ki ga lahko obravnavamo kot trapez, katerega ena osnovnica je enaka 0.



Tudi srednjica trikotnika je enaka polovici vzporedne stranice; na sliki je $s = \frac{c+0}{2} = \frac{c}{2}$.

Zgled 12: **Izračunaj neznani količini x in y označene na naslednji sliki.**

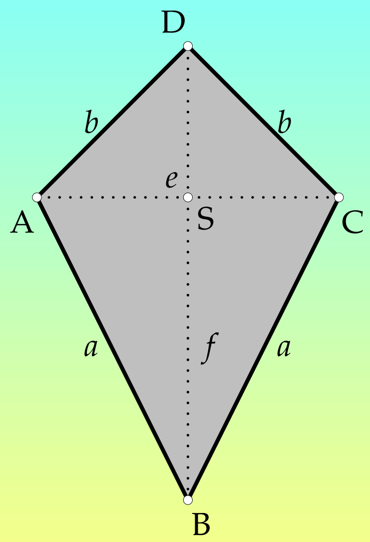


Ker tri vzporednice k osnovnicama trapeza razdelijo diagonalo na tri enake dele, razdelijo tudi kraka trapeza na enake dele (dva ″kvazitrapeza″ = trikotnika). Odsek BD na sliki meri 11 enot, zato je $y = 2 \cdot 11 = 22$ enot. Tudi krak AG je s snopom vzporednic razdeljen na tri enake dele, zato $x = \frac{1}{3}|AG| = 8\frac{1}{3}$ enot. ■

3.2.4 Deltoid

definicija

Deltoid je konveksni štirikotnik, ki ga sestavljata dva enakokraka trikotnika s skupno osnovnico.



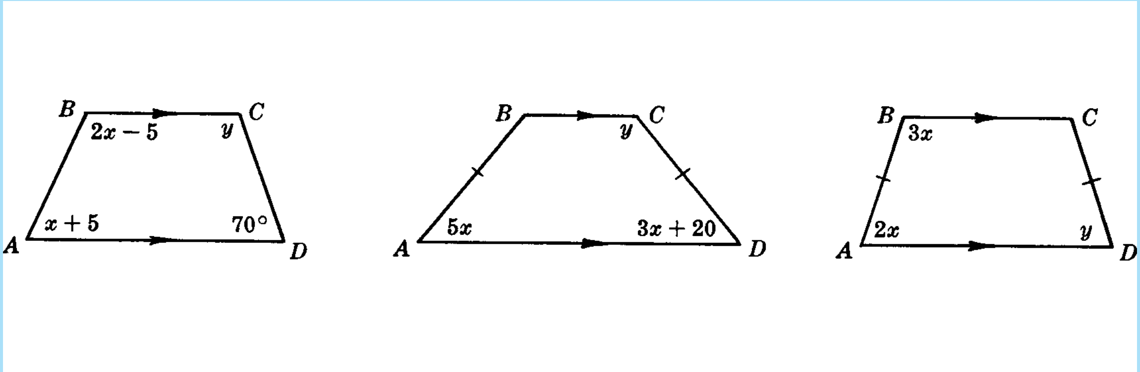
Ne preveč težek razmislek pove, da ima deltoid naslednje glavne lastnosti:

- Ena od diagonal je simetrala deltoida.
- Deltoid ima skladna vsaj dva kota.
- Ena diagonala razpolavlja drugo diagonalo.
- Diagonali sta med sabo pravokotni.

Naloge

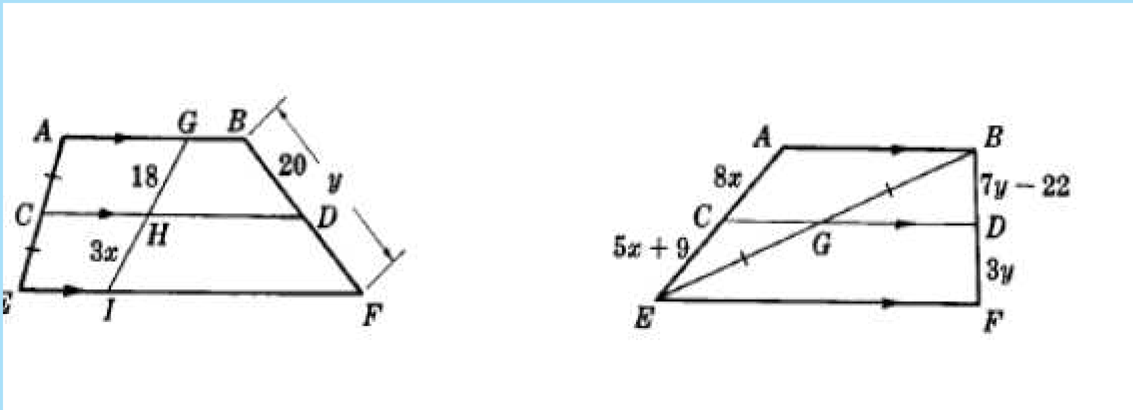
Uporabi lastnosti trapeza in reši naslednje naloge:

1. Izračunaj neznani količini x in y v trapezih na spodnjih slikah. Pri tem so skladne daljice označene z enako oznako



[$x = 60°$, $y = 110°$; $x = 10°$, $y = 130°$; $x = 36°$, $y = 72°$]

2. Izračunaj neznane količine v trapezih na spodnjih slikah



[$x = 6$, $y = 40$; $x = 3$, $y = 5.5$]

3. Zaporedni prečki lestve na desni sliki merita AH = 60 cm and BI = 65 cm. Prečke so enako oddaljene medseboj in so osnovnice enakokrakih trapezov, ki jih sestavljajo skupaj z robovi lestve.

   (a) Izračunaj GN, torej dolžino spodnje prečke.

   (b) Katera prečka je srednjica trapeza z osnovnicama AH and GN?

   [90 cm,   DK]

4. V deltoidu ABCD ($|AB| = |AD|$, $|CB| = |CD|$) je notranji kot $\sphericalangle B = \frac{3x}{2} + 15°$, $\sphericalangle D = \frac{9x}{4} - 30°$ in $\sphericalangle A = 70°$. Izračunaj x in $\sphericalangle C$. [$x = 60°$, $\sphericalangle C = 80°$]

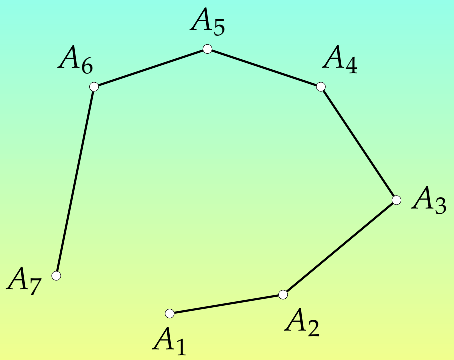
3.3 Konveksni večkotniki

Na desni sliki je narisana **večkotniška** (tudi mnogokotniška se uporablja) ali **poligonska** črta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Točke $A_1, \ldots, A_7$ so **koplanarne**, torej ležijo v isti ravnini.

poligonska črta

Ime poligonska izhaja iz grške besede **poligon**, ki je sestavljena iz dveh besed:

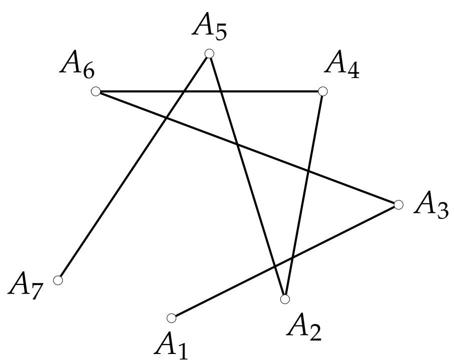
- polus ($\pi o\lambda\upsilon\varsigma$) pomeni več, mnogo,
- gonia ($\gamma\omega\nu\iota\alpha$), ki pomeni kot, možna pa je tudi izpeljanka iz besede gonu ($\gamma\acute{o}\nu\upsilon$), ki pomeni koleno.



Točke A_1, A_2, $, \ldots, A_7$ imenujemo **oglišča** črte, daljice A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_6A_7$ pa **stranice** črte.

Za oglišča črte je pomembno:

- da ležijo v isti ravnini,
- da nobena tri zaporedna ne ležijo na isti premici,
- kakšen je vrstni red oglišč.



Na desni sliki je prikazana poligonska črta $A_1A_3A_6A_4A_2A_5A_7$, ki ima ista oglišča kot prejšnja, le vrstni red oglišč je drugačen.

enostavna črta

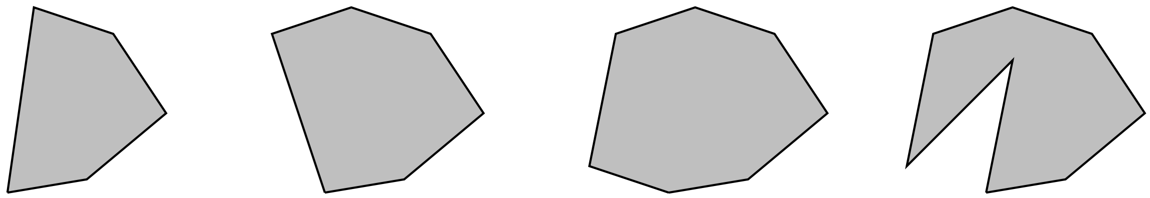
Daljice A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, ki sestavljajo poligonsko črto v prvem primeru ($A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$), se medseboj ne sekajo. V takem primeru pravimo, da je poligonska črta **enostavna**, če pa se daljice, ki sestavljajo črto medseboj sekajo, črta ni enostavna. Črta $A_1A_3A_6A_4A_2A_5A_7$ iz drugega primera ni enostavna. V bodoče se bomo ukvarjali le z enostavnim črtami.

Definicija večkotnika

Če se enostavna poligonska črta začne in konča z istim ogliščem, jo imenujemo zaključena poligonska črta. V takem primeru poligonska črta omejuje končen del ravnine, ki ga imenujemo **notranjost večkotnika**. Notranjost skupaj s poligonsko črto tvori večkotnik, ki ga imenujemo tudi **mnogokotnik** ali **poligon**. Poligonsko črto, ki tvori večkotnik imenujemo **tvorilka** poligona. Glede na število različnih oglišč tvorilke, večkotnike delimo na trikotnike, štirikotnike, petkotnike in tako dalje. V splošnem primeru, ko je oglišč n, govorimo o n-kotniku.

Oglišča tvorilke poligonske črte so tudi **oglišča večkotnika**, prav tako stranice poligonske črte imenujemo **stranice večkotnika**.

Na naslednjih slikah so prikazani petkotnik, šestkotnik, sedemkotnik, osemkotnik:

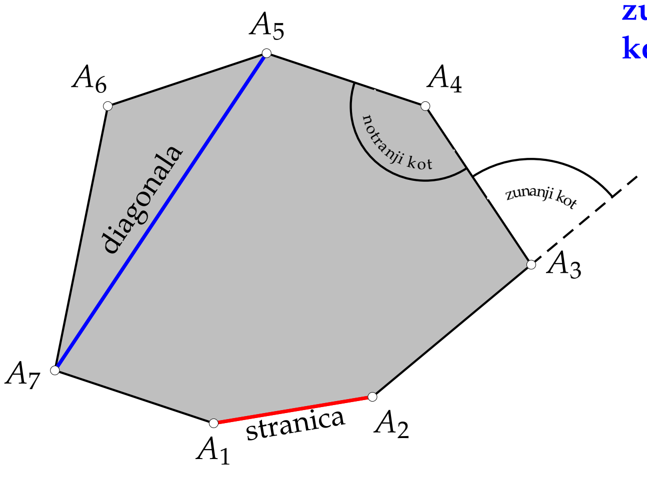


Prvi trije večkotniki so **konveksni**, zadnji je **konkaven**. V bodoče bomo z besedo večkotnik imeli v mislih konveksne večkotnike.

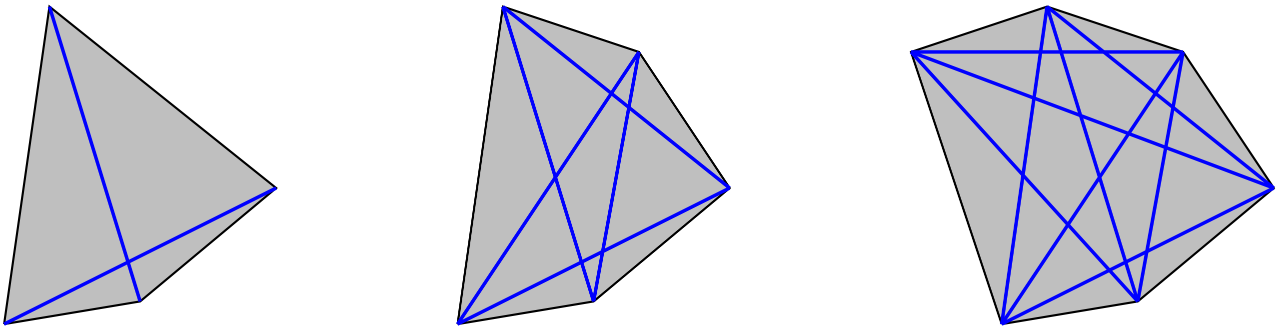
diagonala
notranji,
zunanji
kot

Pomembne količine v večkotniku so:

- stranica je daljica, ki povezuje sosednji oglišči večkotnika,
- diagonala je daljica, ki povezuje nesosednji oglišči večkotnika,
- notranji kot ima za kraka nosilki sosednjih stranic, vsebuje pa točke v notranjosti večkotnika,
- zunanji kot je sokot notranjega kota.



Označimo z D_n število diagonal n-kotnika. Kako poiskati število D_n? Pri malih vrednostih števila n diagonale lahko narišemo in preštejemo, kakor smo to napravili s slikami za štirikotnik, petkotnik in šestkotnik. Že v primeru šestkotnika je opisan način štetja diagonal nepregleden. Opazimo pa, da iz vsakega oglišča izhaja enako število diagonal: pri štirikotniku po ena, pri petkotniku po dve, pri šestkotniku tri. Diagonalo lahko iz izbranega oglišča položimo v vsa druga oglišča n-kotnika, razen v tri: v izbrano oglišče samo in v obe izbranemu oglišču sosednji oglišči.



$D_4 = 2$ $\qquad$ $D_5 = 5$ $\qquad$ $D_6 = 9$

Zato je število diagonal iz izbranega oglišča n-kotnika enako $n-3$, oglišč je n, zato je tedaj diagonal $n \cdot (n-3)$. Toda na tak način smo vsako diagonalo šteli dvakrat, zato je vseh diagonal:

število diagonal

$$\boxed{D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}}$$

Zaradi matematične korektnosti moramo zadnjo formulo potrditi z načinom dokazovanja, ki ga imenujemo **matematična** ali tudi **popolna indukcija**. Induktivno sklepanje pomeni, da iz posameznih primerov sklepamo na splošen primer. V našem primeru smo ugotovili, da formula za število diagonal $D_n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$ velja v primerih $n = 4, 5, 6$. Zato bi z običajnim indukcijskim sklepanjem ugotovili, da formula velja za vsako naravno število. Toda tak način sklepanja v matematiki ni korekten. Recimo, število $a_n = n^2 + n + 1$ je praštevilo v primerih, ko je $n = 1, 2$ in 3, ni pa praštevilo, ko je $n = 4$. Zato je v tem primeru sklepanje, da je a_n praštevilo za vsako naravno število n, nekorektno.

Označimo s $T(n)$ dejstvo, da neka trditev T velja za naravno število n. Z matematično indukcijo izpeljemo pravilnost trditve $T(n)$ za poljubno naravno število n v dveh korakih:

1. Trditev velja za neko začetno naravno število, recimo $T(1)$ ali $T(2)$, lahko tudi $T(7)$, če je 7 prvo število, za katerega velja trditev.
2. Iz predpostavke, da trditev velja za n izpeljemo, da trditev velja tudi za naslednje naravno število $n+1$, torej dokažemo trditev: $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

Koraka delujeta kot padanje "domin". Domina, na kateri je zapisano prvo naravno število, za katerega trditev velja, recimo mu n_1, povzroči padec domine z oznako njegovega naslednika $n_1 + 1$ (korak 2), padec te domine spet zaradi koraka 2 povzroči padec domine z oznako $(n_1 + 1) + 1 = n_1 + 2$, ta povzroči padec domine z oznako $n_1 + 3$ in tako dalje.

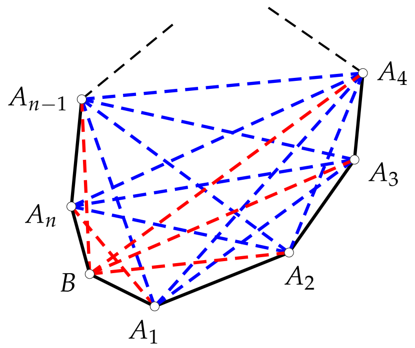
Opisano uporabimo v dokazu trditve, da je število D_n diagonal n-kotnika enako $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, torej je: $T(n) : D_n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$, $n \geq 3$. Za $n = 3$ je večkotnik trikotnik, ta pa nima diagonal, zato je $D_3 = 0$, torej velja $T(3)$.

Pokažimo še pravilnost trditve v drugem koraku. Vzemimo, da velja $T(n)$, torej ima n-kotnik $A_1A_2\ldots A_n$ $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonal. Dokazati moramo, da ima formula tudi $(n+1)$-kotnik enako obliko, torej, da je $D_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$.
Naslednji $(n+1)$-kotnik $A_1A_2\ldots A_nB$ dobimo tako, da n-kotniku $A_1A_2\ldots A_n$ dodamo oglišče B.

Stranica A_nA_1 v n-kotniku postane v $(n+1)$-kotniku diagonala, na novo pa nastanejo še diagonale iz oglišča B v $(n+1)$-kotniku. Vse ostale diagonale so iste kot v n-kotniku. Zato je število diagonal $D_{n+1} = 1 + (n-2) + D_n = n - 1 + \frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Ne preveč težek račun pove, da je:

$$D_{n+1} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$$



Torej je tudi formula za D_{n+1} enake oblike kot formula za D_n. Ravno to pa smo hoteli dokazati. ■

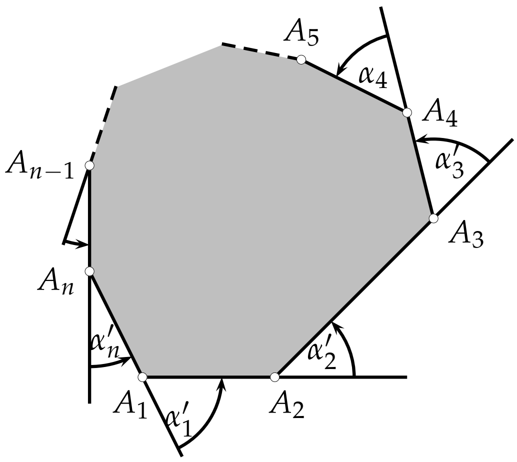
Zgled 13: Kateri večkotnik ima osemkrat toliko diagonal kot stranic?

Označimo število stranic iskanega večkotnika z neznanko n. Za neznanko v besedilu najdemo enačbo $D_n = 8 \cdot n$ (diagonal je osemkrat toliko, kot je stranic). Enačbo preoblikujemo do razcepne enačbe in jo rešimo:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2} = 8\cdot n \Rightarrow n^2 - 3n = 16n \Rightarrow n^2 - 19n = 0 \Rightarrow n = 19$$

Tako smo ugotovili, da ima iskani večkotnik 19 oglišč. Druga rešitev, $n = 0$, ni ustrezna. ■

Raziskovanje lastnosti večkotnikov nadaljujmo z njegovimi zunanjimi koti.Sprehodimo se po tvorilki večkotnika $A_1A_2\ldots A_n$ od A_1 nazaj do A_1 v pozitivni smeri. Ko prispemo iz A_1 v A_2 se moramo s prvotne smeri zasukati za zunanji kot α_2' tako, da lahko po tvorilki nadaljujemo do oglišča A_3, tu se zasukamo za zunanji kot α_3'. Potovanje nadaljujejemo in se v vsakem naslednjem oglišču zasukamo za ustrezni zunanji kot.



Tako prispemo v oglišče A_1, kjer se zasukamo za zunanji kot α_1' in smo usmerjeni tako, kot na začetku. Z vsemi zasuki smo skupaj napravili polni kot. Zato je vsota vseh zunanjih kotov večkotnika, ne glede na število oglišč, vedno enaka 360°.

zunanji koti

$$\boxed{\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n' = 360^\circ}$$

Preselimo se k notranjim kotom večkotnika, recimo, da imamo v mislih n-kotnik in kote $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Notranji in njegov sosednji zunanji kot sta sokota, zato je njuna vsota 180°. Torej je vsota vseh notranjih in zunanjih kotov enaka $n \cdot 180^\circ$. Ker pa je vsota zunanjih kotov enaka 360°, je vsota notranjih kotov enaka $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$.

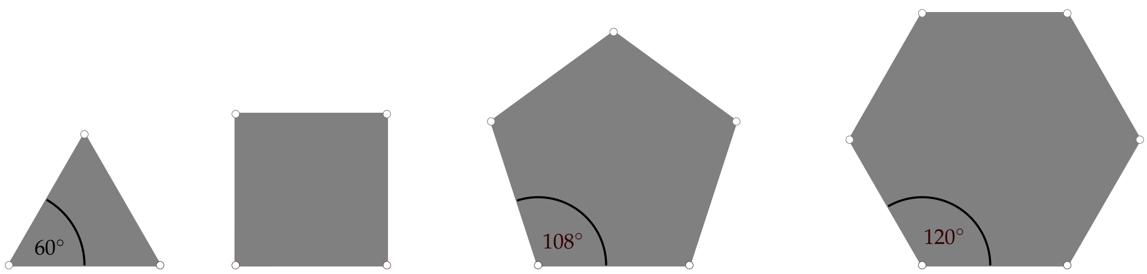
notranji koti

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ}$$

3.3.1 Pravilni večkotniki

Večkotnik, ki ima **enako dolge** stranice in **enako velike** notranje kote, imenujemo **pravilni** večkotnik.

Nekaj pravilnih večkotnikov že poznamo: pravilni trikotnik imenujemo enakostranični trikotnik, pravilni štirikotnik je kvadrat, romb pa ne, saj nima enakih notranjih kotov.



Na gornji sliki sta narisana še pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik, napisane pa so tudi velikosti njihovih notranjih kotov. Notranji kot pravilnega $n-$kotnika izračunamo tako, da vsoto vseh notranjih kotov delimo z n, torej:

notranji kot pravilnega $n-$kotnika

$$\boxed{\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}}$$

Zgled 14: Kateri pravilni večkotnik ima notranji kot, ki meri $\frac{11\pi}{12}$?

Radiane spremenimo v stopinje: $\frac{11\pi}{12} = \frac{11\cdot 180^\circ}{12} = 165^\circ$. Potem je

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 165^\circ \Rightarrow 180n - 360 = 165n \Rightarrow n = 24$$

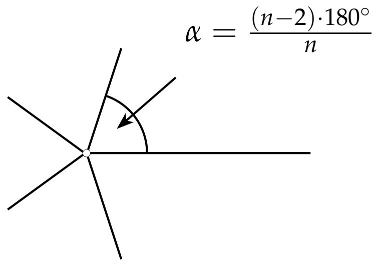
Iskani pravilni večkotnik ima 24 stranic.

Nalogo rešimo tudi takole. Ker je notranji kot enak 165°, je ustrezni zunanji kot enak 15°. Ker so pri pravilnih večkotnikih tudi zunanji koti enaki in skupaj tvorijo polni kot, je število oglišč enako $n = 360^\circ : 15 = 24$. ■

Zgled 15: Ravnino bi radi tlakovali z enakimi pravilnimi večkotniki. S katerimi večkotniki nam uspe?

Tlakovati ravnino pomeni, da z ustreznimi večkotniki prekrijemo celo ravnino in, da imata dva različna večkotnika skupno kvečjemu stranico ali oglišče.

Vzemimo, da tlakujemo s pravilnimi $n-$kotniki in, da se jih v vsakem oglišču stika m ($m,\ n \in \mathbb{N}$). Notranji kot pravilnega $n-$kotnika meri $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, okrog enega oglišča vsi skupaj tvorijo polni kot. Zato je $360^\circ = m\cdot\alpha = m\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Zadnjo enačbo uredimo:

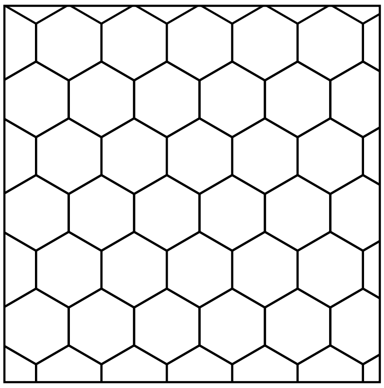


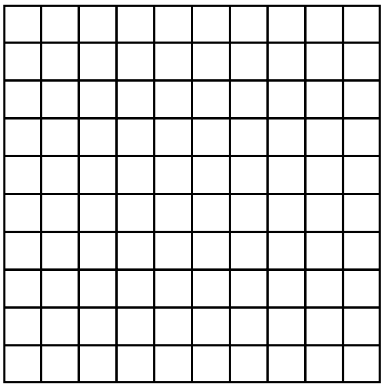
$$m\cdot(n-2)\cdot 180^\circ = n\cdot 360^\circ \Rightarrow mn - 2m = 2n \Rightarrow mn - 2m - 2n + 4 = 4 \Rightarrow (m-2)\cdot(n-2) = 4$$

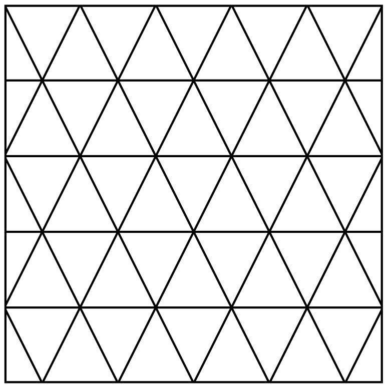
Neznanki m in n sta naravni števili, zato sta tudi $m-2$ in $n-2$ naravni števili, katerih produkt je 4. To pa je mogoče le v primeru, da je en faktor 4, drugi 1, ali pa sta oba faktorja enaka 2. Ugotovljeno zapišemo s tabelo:

$m-2$	$n-2$	m	n
1	4	3	6
2	2	4	4
4	1	6	3

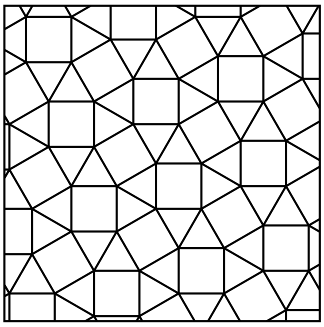
Torej so tlakovanja z enakimi večkotniki možna le z enakostraničnimi trikotniki, kvadrati ali pravilnimi šestkotniki. Tlakovanja so prikazana na naslednjih slikah:

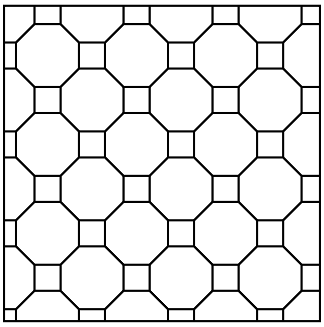






Tlakovanja z enakimi pravilnimi večkotniki so poznali že v stari Grčiji. V začetku 17. stoletja je Johannes Kepler dokazal, da obstaja še sedem tlakovanj, ki vsebujejo različne pravilne večkotnike. Taka tlakovanja se imenujejo Arhimedova tlakovanja. Dva primera takega tlakovanja sta prikazana na spodnji sliki:



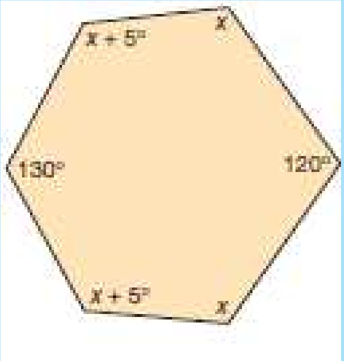


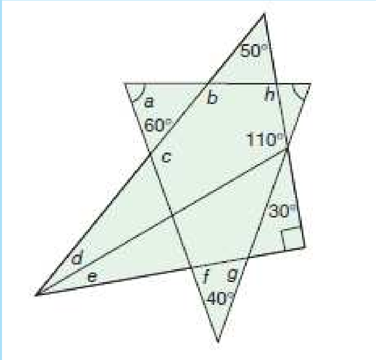
Naloge

1. Dopolni tabelo o pravilnih večkotnikih:

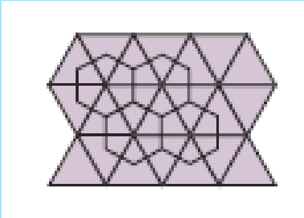
ime	št. stranic	št. diagonal	notranji kot	zunanji kot
enakostranični trikotnik				
	3			
		35		
			162°	
				20°

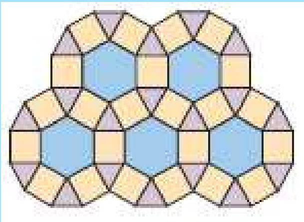
2. Izračunaj neznane kote na spodnjih slikah:

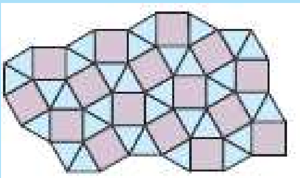


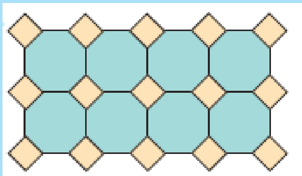


3. Dualno tlakovanje nastane s povezovanjem središč večkotnikov, ki imajo imajo skupno stranico v začetnem tlakovanju. Na sliki je prikazano dualno tlakovanje tlakovanja z enakostraničnimi trikotniki (dualno je s šestkotniki). Poišči dualni tlakovanji tlakovanj na spodnji sliki:









3.4 Krožnica in krog

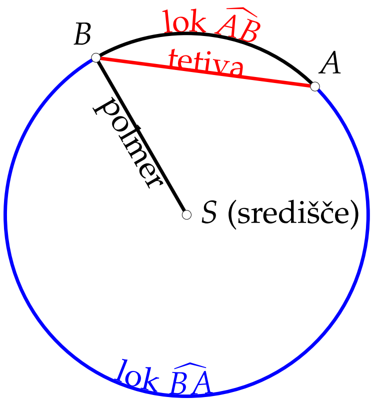
definicija

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so **enako oddaljene** od dane točke, ki jo imenujemo **središče**. Razdaljo točke na krožnici od središča krožnice imenujemo **polmer** (radij) krožnice. Slika: $\odot$

Krog je množica točk v ravnini, ki so **kvečjemu** za polmer oddaljene od središča krožnice. Slika:

Oglejmo si nekaj pojmov, ki so povezani s krožnico.

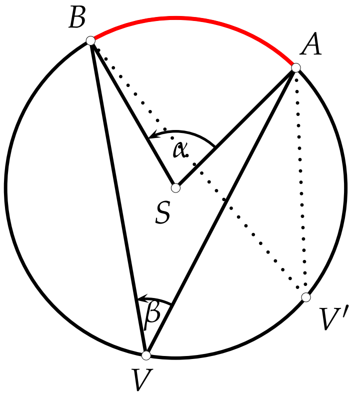
Tetiva je daljica AB, ki ima krajišči na krožnici. Najdaljšo tetivo, ki jo razpolavlja središče krožnice, imenujemo **premer** ali **diameter**.
Lok $\widehat{AB}$ je množica točk na krožnici, ki jo dobimo, ko se po krožnici sprehodimo od točke A do točke B v pozitivni smeri ($\circlearrowleft$). Točki A in B imenujemo krajišči loka.



Slika 26: Krožnica s tetivo AB in lokoma $\widehat{AB}$ ter $\widehat{BA}$

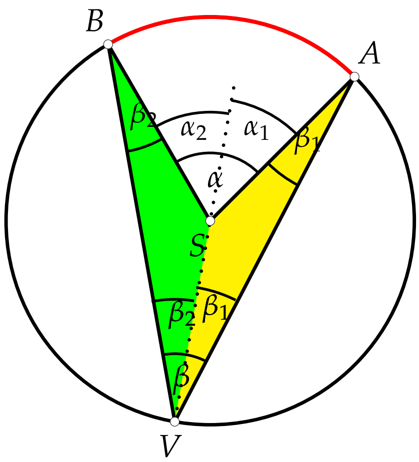
središčni in obodni kot

Središčni kot nad lokom $\widehat{AB}$ je kot, ki ima vrh v središču S kroga, kraka pa potekata skozi krajišči A in B loka $\widehat{AB}$, torej kot $\alpha = \sphericalangle ASB$.
Obodni kot nad lokom $\widehat{AB}$ je kot, ki ima vrh v poljubni točki V na loku $\widehat{BA}$, kraka pa potekata skozi krajišči A in B loka $\widehat{AB}$, torej kot $\beta = \sphericalangle AVB$.
Središčni kot nad danim lokom $\widehat{AB}$ je en sam, obodnih kotov pa je nešteto, saj je vrh lahko poljubna točka na loku $\widehat{BA}$



Slika 27: Središčni (α) in obodni (β) kot nad lokom AB

Središčni in obodni kot na danim lokom povezana. Vzemimo na krožnici s središčem v S lok točki A in B, ki naj bosta krajišči loka $\widehat{AB}$. Z α označimo središčni kot $\sphericalangle ASB$, z β pa obodni kot $\sphericalangle AVB$ nad lokom $\widehat{AB}$.



Poltrak $(V;S)$ razdeli obodni kot β na kota β_1 in β_2, središčni kot pa na kota α_1 in α_2. Trikotnika $\triangle AVS$ in $\triangle BVS$ sta enakokraka trikotnika z vrhom v S, kota α_1 in α_2 pa sta njuna zunanja kota v oglišču S. Zato je $\alpha_1 = 2\beta_1$ in $\alpha_2 = 2\beta_2$. Ker je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ in $\beta = \beta_1 + \beta_2$, središčni kot α in obodni kot β povezuje enačba $\alpha = 2\beta$.

Središčni kot danega loka je dvakrat tolikšen kot je obodni kot nad istim lokom, torej:

$$\boxed{\alpha = 2 \cdot \beta}$$

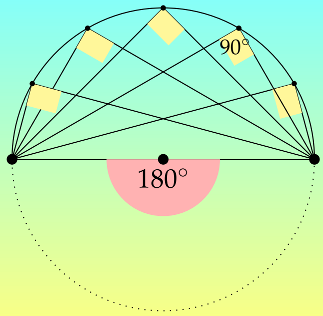
Vsi obodni koti nad istim lokom so enaki polovici središčnega kota, zato so medseboj enaki.

zveza med središčnim in obodnim kotom

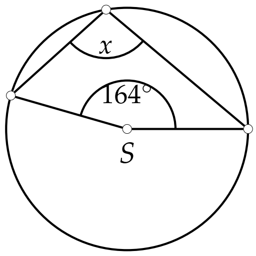
Neposredna posledica zapisanega je naslednja trditev:

Talesov izrek o kotu v polkrogu

Kot v polkrogu imenujemo kot, ki ima vrh na krožnici, njegova kraka pa potekata skozi diametralni točki iste krožnice. Že starogrški matematik Tales je pred 2500 leti spoznal, da je **kot v polkrogu pravi kot**.

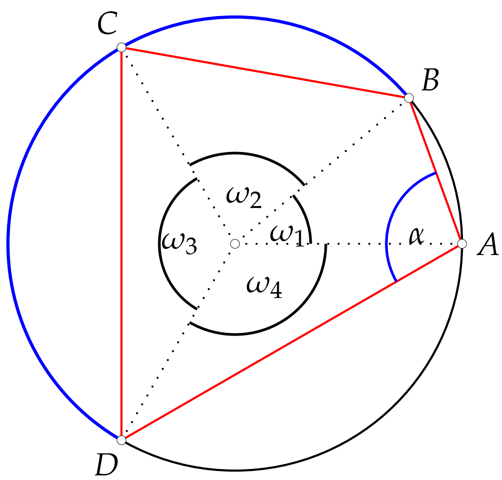


Zgled 16: Izračunaj kot x na sosednji sliki. Točka S je središče krožnice.



Iskani kot x je obodni kot nad spodnjim lokom. Njegov središčni kot meri $360° - 164° = 196°$. Zato je $x = \frac{196°}{2} = 98°$. ■

Zgled 17: Krožnico s točkami A, B, C in D razdelimo tako, da je razmerje dolžin lokov $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 1 : 2 : 3 : 3$. Izračunaj notranje kote $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle DCB$ in $\delta = \sphericalangle ADC$ štirikotnika $ABCD$.



V enakem razmerju kot so dolžine lokov, je tudi razmerje ustreznih središčnih kotov $\omega_1 = \sphericalangle ASB$, $\omega_2 = \sphericalangle BSC$, $\omega_3 = \sphericalangle CSD$ in $\omega_4 = \sphericalangle DSA$, torej je $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = 1 : 2 : 3 : 3$ ali $\omega_1 = x, \omega_2 = 2x, \omega_3 = 3x, \omega_4 = 3x$. Ker koti $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ skupaj tvorijo polni kot, je $x + 2x + 3x + 3x = 360° \Rightarrow x = 40°$. Zato je $\omega_1 = 40°, \omega_2 = 80°, \omega_3 = 120°, \omega_4 = 120°$.

Notranji kot v oglišču α je obodni kot nad lokom $\widehat{BD}$ (slika). Središčni kot tega loka je $\omega_2 + \omega_3 = 80° + 120° = 200°$, zato je $\alpha = 200°/2 = 100°$. Podobno izračunamo $\beta =$

$(\omega_3 + \omega_4)/2 = 120°$, $\gamma = (\omega_4 + \omega_1)/2 = 80°$ in $\delta = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 60°$. ■

Naloge

1. Na sosednji sliki meri polmer notranje krožnice A 5 enot, krožnica B je od krožnice A oddaljena 5 enot, prav tako pa je 5 enot oddaljena krožnica C od krožnice B. Opiši množice točk, ki ležijo na ali znotraj kroga C in

   (a) so oddaljene 5 enot od središča O,

   (b) so oddaljene 15 enot od središča O,

   (c) so enako oddaljene krožnic A and C,

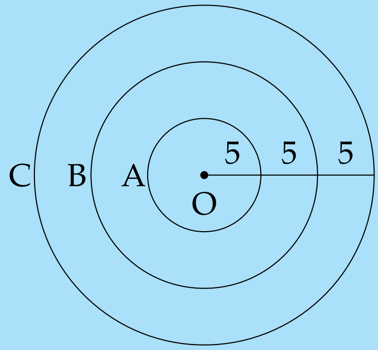
   (d) so oddaljene 10 enot od krožnice C,

   (e) so oddaljene 10 enot od krožnice A,

   (f) so oddaljene 5 enot od krožnice B,

   (g) so središče krožnice, ki se dotika krožnic A in C.

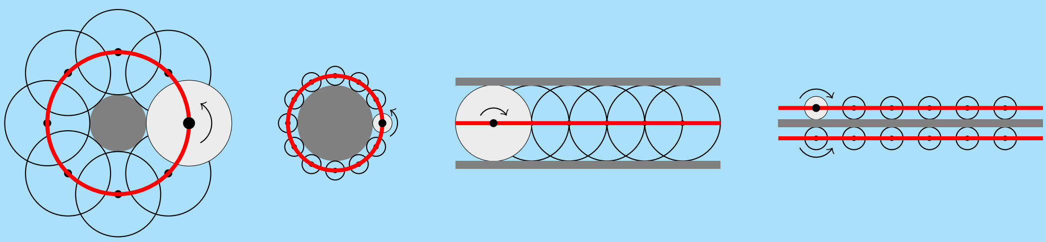
   [(a) A; (b) C; (c) B; (d) A; (e) C; (f) A in C; (g) B]



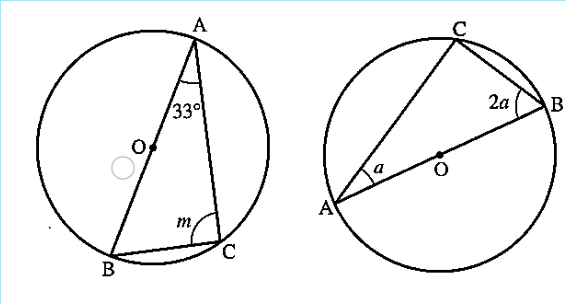
2. Opiši množico vseh točk, ki jih opiše središče

   (a) kovanca, ki se kotali okoli manjšega kovanca,
   (b) kovanca, ki se kotali okoli večjega kovanca,
   (c) kolesa, ki se giblje med dvema vzporednima ploščama in se jih med gibanjem dotika,
   (d) kolesa, ki se giblje vzdolž ravne kovinske plošče in se je dotika.

   Rešitve so naslikane v rdeči barvi.

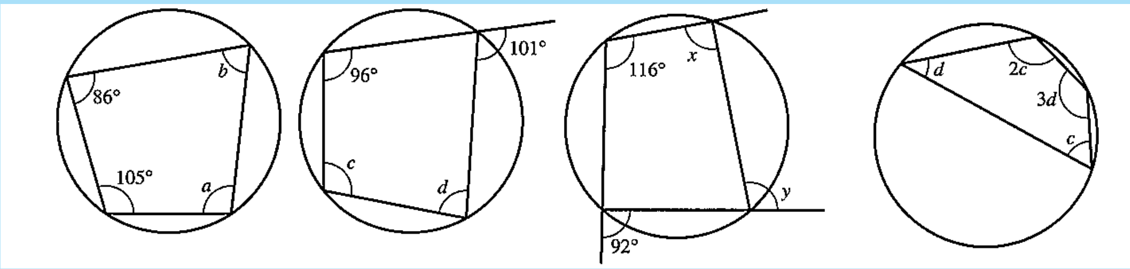


3. Izračunaj neznane kote na spodnjih slikah. Točka O je središče krožnice.



[$m = 90°$; $a = 30°$]

4. Izračunaj neznane kote na spodnjih slikah:



[Štirikotniki, ki jim lahko očrtamo krožnico, se imenujejo tetivni štirikotniki. Za tetivne štirikotnike je karakteristično, da sta nasprotna kota suplementarna. Premisli, zakaj? Če uporabiš karakteristično lastnost, dobiš: $a = 94°$, $b = 75°$; $c = 101°$, $d = 84°$; $x = 92°$, $y = 116°$; $c = 60°$, $d = 45°$]

3.5 Znamenite točke trikotnika

Znamenitih točk trikotnika je veliko. Mi si bomo ogledali štiri najpomembnejše: **središče trikotniku očrtanega kroga**, **središče trikotniku včrtanega kroga**, **težišče** in **višinsko točko** ali **ortocenter** trikotnika.

Trikotniku **očrtana krožnica** (ustrezni krog imenujemo **očrtani krog**) je krožnica, ki vsebuje vsa tri oglišča trikotnika. **Simetrale stranic** trikotnika se sekajo v skupni točki, ki je središče trikotniku **očrtanega** kroga.

središče očrtanega kroga

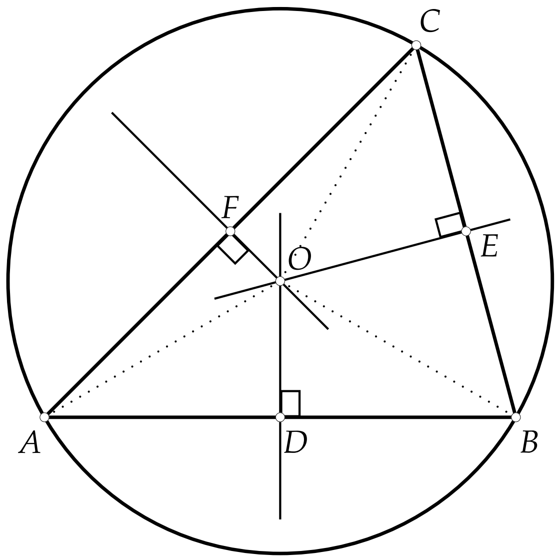
Trditev utemeljimo takole:

Na desni sliki sta točki D in E središči stranic AB in BC, simetrali stranic AB in BC pa se sekata v točki O. Dokazati moramo, da je točka O enako oddaljena od vseh treh oglišč A, B, C, in, da pravokotnica iz točke O na nosilko stranice AC to stranico razpolavlja.

Trikotnika $\triangle ADO$ in $\triangle BDO$ sta skladna, ker sta pravokotna in imata skladni stranici, ki pravi kot oklepata (izrek SKS). Zato je $|AO| = |BO|$.

Podobno pokažemo, da sta skladna trikotnika $\triangle BEO$ in $\triangle CEO$, in, da je $|BO| = |CO|$. Torej res velja $|AO| = |BO| = |CO|$.

Pokažimo še, da je pravokotnica iz O na stranico AC tudi simetrala stranice AC.



Trikotnika $\triangle AFO$ in $\triangle CFO$ imata skladni dve stranici ($|AO| = |CO|$, $|OF| = |OF|$) in sta pravokotna, zato sta po izreku SsK skladna. Potem pa je $|AF| = |CF|$. Zato je F razpolovišče stranice AC, kar smo želeli dokazati. ■

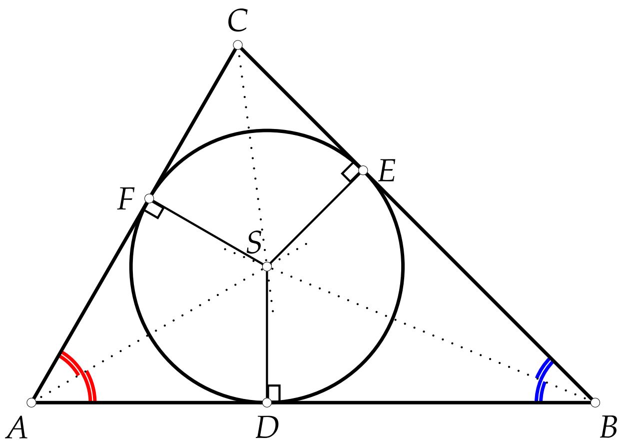
Trikotniku **včrtani krog** je krog, ki se dotika stranic trikotnika. Središče včrtanega kroga je v presečišču **simetral notranjih kotov** trikotnika.

središče včrtanega kroga

Na sliki je S presečišče simetral notranjih kotov v ogliščih A in B trikotnika $\triangle ABC$. Točke D, E in F so pravokotne projekcije točke S na stranice AB, BC in AC. Dokazati moramo, da $|SD| = |SE| = |SF|$. Potem točke D, E in F ležijo na krožnici s središčem v S, nosilke stranic pa so tangente na to krožnico.

Trikotnika $\triangle ADS$ in $\triangle AFS$ sta skladna, ker sta pravokotna in imata skladno še stranico AS in kot $\sphericalangle DAS = \sphericalangle SAF$ (izrek SKK). Zato je $|SD| = |SF|$. S podobnim sklepanjem ugotovimo, da sta skladna trikotnika $\triangle BDS$ in $\triangle BES$ in je zato $|SD| = |SE|$. Torej res velja $|SD| = |SE| = |SF|$.

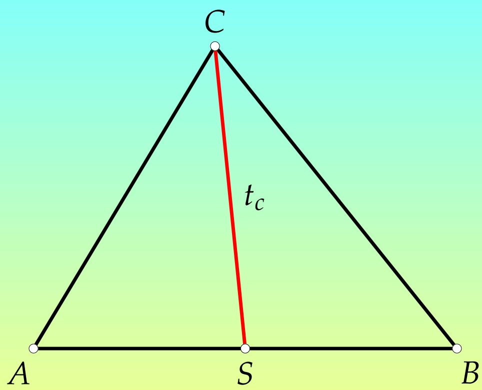
Pokažimo še, da je premica skozi S in C simetrala notranjega kota pri C. Trikotnika $\triangle SEC$ in $\triangle SFC$ imata skladni dve stranici ($|SE| = |SF|$, $|SC| = |SC|$) in sta pravokotna, zato sta po izreku SsK skladna.



Potem pa je $\sphericalangle SCE = \sphericalangle FCS$. Zato je premica skozi S in C simetrala kota pri C. ■

težiščnica

Težiščnica trikotnika je daljica, ki ima krajišči v oglišču in razpolovišču nasprotne stranice. Na desni sliki je prikazana težiščnica iz oglišča C na nasprotno stranico AB. Običajno jo označimo s t_c.



Trikotnik premore tri težiščnice. Zanje velja naslednja trditev:

težišče

Težiščnice trikotnika se sekajo v skupni točki, ki jo imenujemo **težišče** trikotnika. Običajno težišče označimo s T.

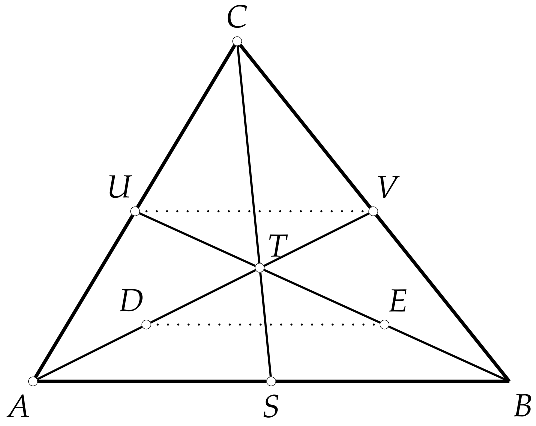
Težišče trikotnika razdeli težiščnico v razmerju 2 : 1 za del težiščnice od od oglišča do težišča.

Utemeljimo zadnjo trditev:

Najprej pokažemo, da težišče T deli težiščnico v razmerju 2:1. Pri tem bomo uporabili dejstvo, da je srednjica trikotnika, to je daljica, ki povezuje razpolovišči dveh stranic trikotnika, enaka polovici tretje stranice trikotnika in je z njo vzporedna (oglej si razdelek o trapezu).

Na desni sliki sta AV in BU težiščnici na ustrezni stranici, s točkama D in E razpolovili daljici AT in BT. Daljici UV in DE sta srednjici trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle ABT$ nad isto stranico AB. Zato sta enaki in medseboj vzporedni.

Trikotnika $\triangle UVT$ in $\triangle EDT$ imata tako skladno stranico in kote, zato sta skladna. Potem je $|UT| = |ET|$ in $|VT| = |ED|$. Ker pa sta točki D in E razpolovišči daljic AT in BT, je $|DT| = |AD|$ in $|ET| = |BE|$.



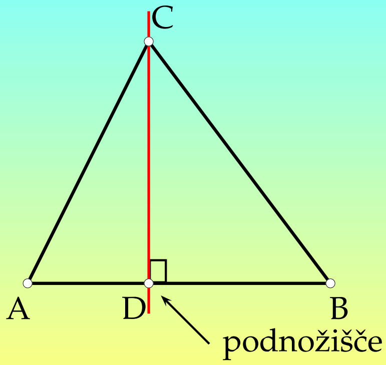
Zato je $|AD| = |DT| = |TV|$ in $|BE| = |ET| = |TU|$, zato sta obe težiščnici s točkama D, E in T razdeljeni na tretjine in je tako res $|AT| : |VT| = 2 : 1$ in $|BT| : |UT| = 2 : 1$ ali drugače povedano: $|AT| = \frac{2}{3}|AV|$.

Pokažimo še, da gre tudi tretja težiščnica CS skozi presečišče ostalih dveh težiščnic, torej točko T. Trditev dokažemo z nasprotjem. Recimo, da bi težiščnica CS sekala težiščnico AV v točki T_1. Potem bi, kar smo pokazali zgoraj, veljalo $|AT_1| = \frac{2}{3}|AV|$. Ker pa tudi za točko T velja enačba $|AT| = \frac{2}{3}|AV|$, je $|AT_1| = |AT|$ in zato $T_1 = T$. ■

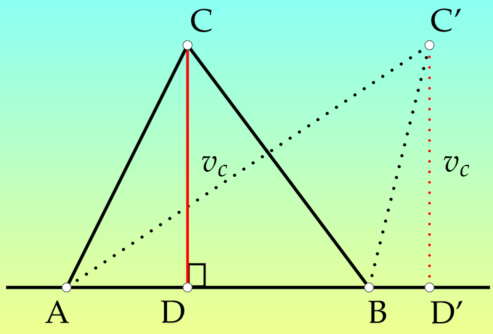
Nadaljujmo s pojmom **višina trikotnika**. S pojmom višina običajno razumemo, recimo, kako visok je človek, kako visoka je stavba, kako visoka je gora in tako dalje. V vseh primerih višino izmerimo kot dolžino neke daljice, v primeru višine človeka od tal do temena glave, v primeru gore pa je višina običajna nadmorska višina vrha gore. V trikotniku bo višina pomenila oddaljenost oglišča trikotnika od nasprotne stranice.

podnožišče

Iz poljubnega oglišča trikotnika spustimo pravokotnico na nosilko nasprotne stranice. Presečišče pravokotnice in nosilke imenujemo **podnožišče**.



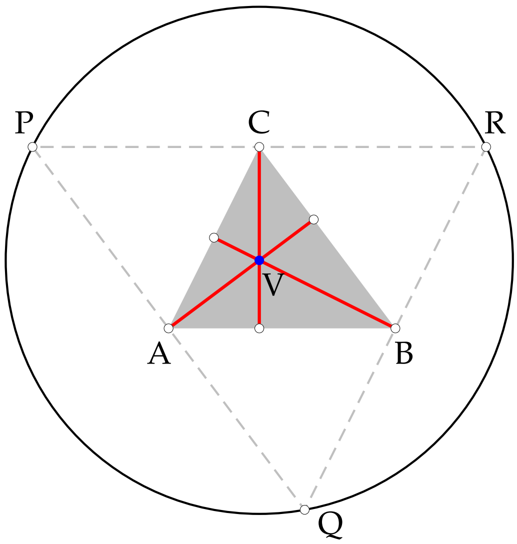
Višina trikotnika je daljica, ki povezuje oglišče in ustrezno podnožišče. Na desni sliki sta prikazani višina iz oglišča C in višina iz oglišča C′ na nasprotno stranico AB. Višino na stranico c običajno označimo s v_c. Slika tudi pokaže, da višina trikotnika lahko leži tudi cela izven trikotnika.



višinska točka

Nosilke višin trikotnika se sekajo v skupni točki, ki jo imenujemo **višinska točka** (tudi **ortocenter**) trikotnika.

Utemeljitev: Trditev pokažemo takole. V vsakem oglišču trikotnika $\triangle ABC$ načrtamo vzporednico k nasprotni stranici. Načrtane vzporednice se sekajo v točkah P, Q in R. S preprostim razmislekom ugotovimo, da so trikotniki $\triangle PAC$, $\triangle CBR$, $\triangle AQB$ skladni s trikotnikom $\triangle BCA$. Zato so točke C, A in B sredine stranic trikotnika $\triangle PQR$, nosilke višin $\triangle ABC$ pa zato simetrale stranic $\triangle PQR$. Za simetrale stranic pa vemo, da se sekajo v skupni točki. Torej je višinska točka V presečišče vseh treh nosilk višin trikotnika $\triangle ABC$, ki je hkrati tudi središče trikotniku $\triangle PQR$ očrtane krožnice.



3.6 Osnovne konstrukcije

Oglejmo si kaj razumemo pod pojmom **konstrukcija** ali **načrtovanje** geometrijskega objekta. Konstrukcijo izvajamo z geometrijskim orodjem:

- **šestilom**,
- **ravnilom**, ki ima označene dolžinske enote.

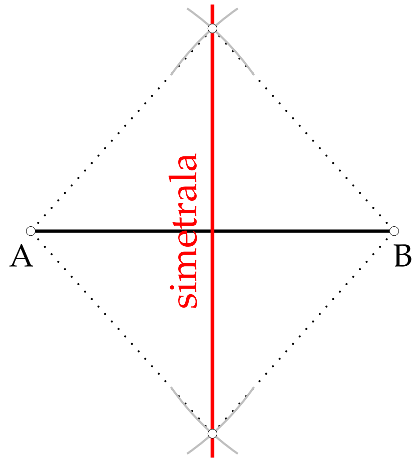
Praviloma konstrukcijo izvedemo v naslednjem zaporedju:

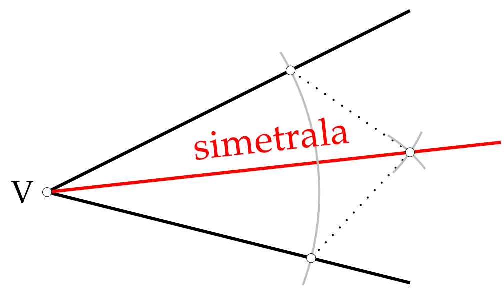
- Narišemo skico, na začetku z ravnilom, kasneje prostoročno.
- Opišemo korake konstrukcije.
- Napravimo konstrukcijo.

Konstrukcijo lahko namesto uporabe orodja izvedemo tudi s kakšno od odprtokodnih ("zastonj") aplikacij dinamične geometrije, recimo **Geogebra** ali pa **C.a.R.** (compass and ruler = šestilo in ravnilo). Seveda je potrebno postopek konstrukcije tudi v aplikacijah utemeljiti.

Zgled 18: Opiši potek onstrukcije simetrale dane daljice in simetrale danega kota. **simetrala daljice in kota**

Na vsako stran dane daljice, recimo ji AB, načrtamo enakokrak trikotnik, ki ima dano daljico za osnovnico. To storimo tako, da v šestilo odmerimo malo več kot polovico dolžine daljice in iz obeh krajišč daljice začrtamo na obe strani krožne loke enakih polmerov. Skozi presečišce lokov na eni strani in drugi strani daljice (vrhova enakokrakih trikotnikov) položimo premico, ki je simetrala daljice. Konstrukcija je prikazana na spodnji levi sliki:



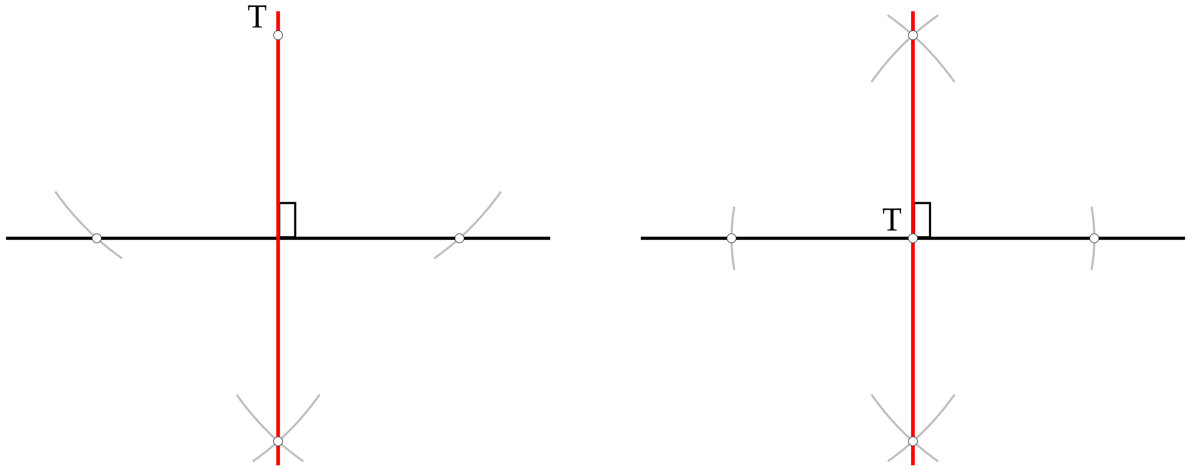


Na desni delu prve slike je prikazana konstrukcija simetrale kota z vrhm v V. Zapičimo šestilo v vrh kota in z lokom presekamo oba kraka kota. Konstruiramo enakokraki trikotnik z osnovnico v nastalih presečiščih in skozi njegov vrh in vrh kota položimo premico. Nastala premica, lahko tudi samo poltrak, je simetrala kota. ■

pravokotn na premico

Zgled 19: Opiši konstrukcijo pravokotnice na dano premico iz dane točke.

Ločimo primera, ko dana točka, recimo ji T, ne leži na premici in, ko dana točka T leži na premici. V prvem primeru zapičimo šestilo v točko T in z lokom presekamo dano premico v dveh točkah. Presečišči sta krajišci osnovnice enakokrakega trikotnika z vrhom v točki T. Nadaljujemo tako, da konstruiramo simetralo nastale osnovnice, ki je iskana pravokotnica. Opisana konstrukcija je prikazana na levi sliki.

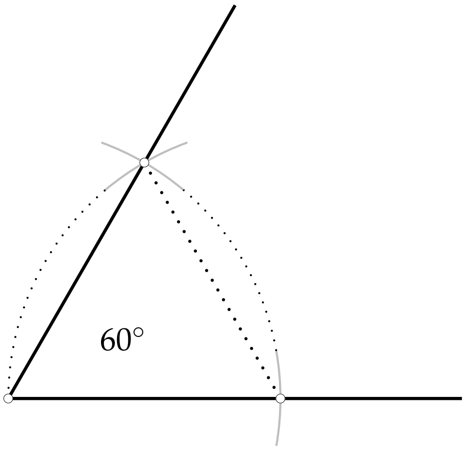


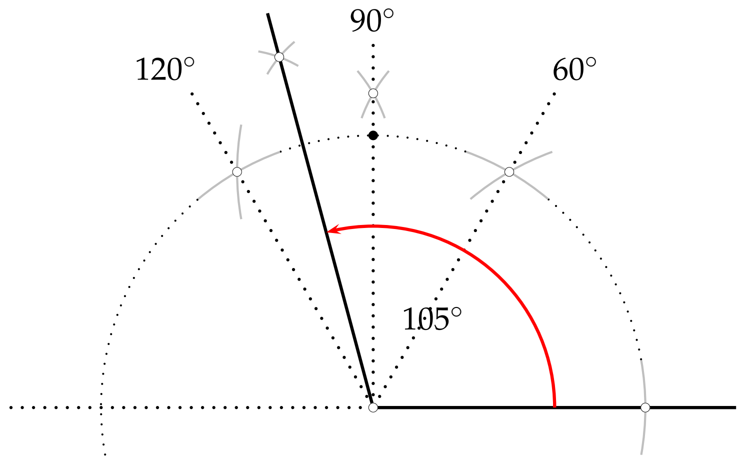
Na desni sliki je prikazana konstrukcija pravokotnice v primeru, ko je dana točka T na dani premici. V T zapičimo šestilo, na obe strani premice odmerimo lok. Iz dobljenih presečišč loka in premice na obe strani premice konstruiramo enakokraka trikotnika. Skozi njuna vrhova narišemo iskano pravokotnico. ■

Zgled 20: Kako konstruiramo kota, ki merita 60° in 105°?

Kot 60° je notranji kot enakostraničnega trikotnika. Zato konstruiramo enakostranični trikotnik z izbrano dolžino stranice. To storimo tako, kot je prikazano na levem delu slike.

konstrukcija kotov 60° in $15^\circ, 30^\circ, \ldots$





Na desnem delu slike je prikazana konstrukcija kota 105°. Dvakrat zapored odmerimo kot 60°, da dobimo kot 120°. Drugi odmerjen kot 60° (med 60° in 120°) razpolovimo. Dobimo kot 90°. Na koncu razpolovimo kot med 90° in 120° ter tako dobimo kot 105°.

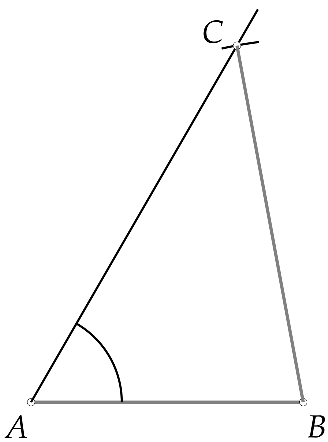
Če bi razpolovili kot 60°, bi dobili kot 30°, če bi razpolovili tega, bi dobili kot 15°. Razpolavljanje kota med 60° in 120° nam dá kot 90°. ■

nekateri trikotniki

Konstrukcije trikotnikov s podatki, ki ustrezajo izrekom SKS, SSS in SKK niso preveč zapletene, take trikotnike smo konstruirali že v osnovni šoli. Pri izreku SKK moramo paziti, da sta za konstrukcijo pomembna kota ob dani stranici, če nimamo obeh, lahko neznanega izračunamo. Več težav nam lahko povzroča konstrukcija s podatki izreka SsK.

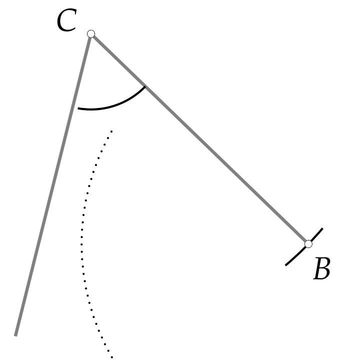
Zgled 21: Oglejmo si, kako konstruiramo trikotnik s podatki iz izreka SsK. Vzemimo, da je v trikotniku ABC dolžina stranice $c = 6\,\text{cm}$, dolžina stranice $a = 8\,\text{cm}$ in velikost kota $\alpha = 60°$.

Narišemo kot α (dobimo oglišče A) in na enem od krakov odmerimo stranico $c = |AB|$ (dobimo oglišče B). Iz oglišča B s šestilom odmerimo lok, ki ima polmer enak dolžini stranice $a = |BC|$. Tam, kjer odmerjen lok seka drugi krak kota α je oglišče C. ■

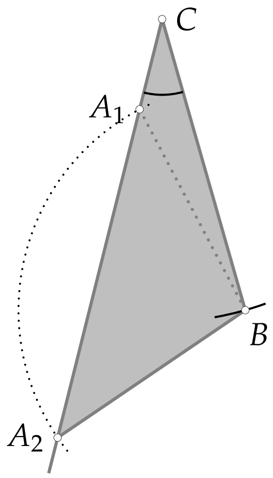


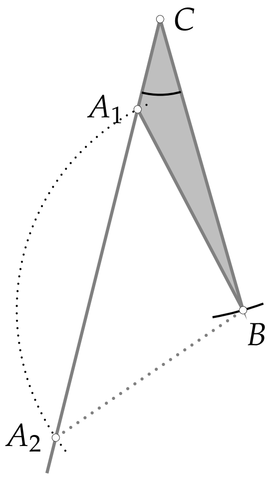
Zgled 22: V izreku SsK je poudarjeno, da dani kot (K) leži nasproti večji od danih stranic (S). Oglejmo si, kaj se zgodi, če leži dani kot nasproti manjše (s) od danih stranic. Vzemimo, da ima trikotnik ABC podatke $c = 6\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ in $\gamma = 60°$.

Konstrukcijo izvedemo ko v prejšnjem primeru. Začnemo tako, da narišemo kot γ (dobimo oglišče C), nato na en krak kota γ iz oglišča C odmerimo dolžino stranice a; dobimo oglišče B. Iz oglišča B s šestilom odmerimo lok s polmerom, ki ima dolžino stranice c. Opazimo, da narisani lok ne preseka drugega kraka kota γ. Zato trikotnika s takimi podatki sploh ni. ■



Zgled 23: V tem primeru vzemimo enake podatke kot v prejšnjem primeru, le kot γ zmanjšajmo, torej konstruirajmo trikotnik s podatki: $c = 6\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ in $\gamma = 30°$.





Konstrukcijo izvedemo kot v prejšnjem primeru, torej najprej narišemo kot γ (oglišče C), nato od C odmerimo na enem kraku kota γ dolžino stranice a. Tako dobimo oglišce B, iz katerega načrtamo lok s polmerom, ki je enak dolžini stranici c. Tam kjer lok preseka drugi krak kota γ dobimo oglišče A. V našem primeru se to zgodi dvakrat, v točkah A_1 in A_2. Torej v primeru podatkov iz primera obstajata dva trikotnika: $\triangle A_1BC$ in $\triangle A_1BC$. ■

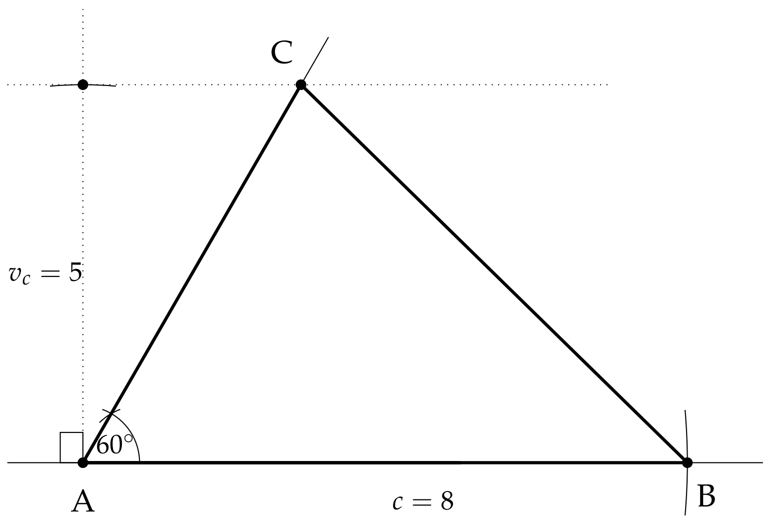
Iz zadnjih dveh zgledov se prepričamo o naslednjem:

Če ima trikotnik znani dve stranici in kot, ki leži nasproti manjši od danih stranic (**Ssk**), se zgodi dvoje:

- tak trikotnik je nemogoče načrtati, torej ga sploh ni,
- lahko narišemo dva, neskladna, trikotnika z istimi podatki.

Zgled 24: Konstruirajmo trikotnik s podatki $c = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$ in $v_c = 5\,\text{cm}$.

Narišemo skico, ki naj bo približno verna podatkom, predvsem kot v skici naj bo kot α okoli $60°$.



Potek konstrukcije:

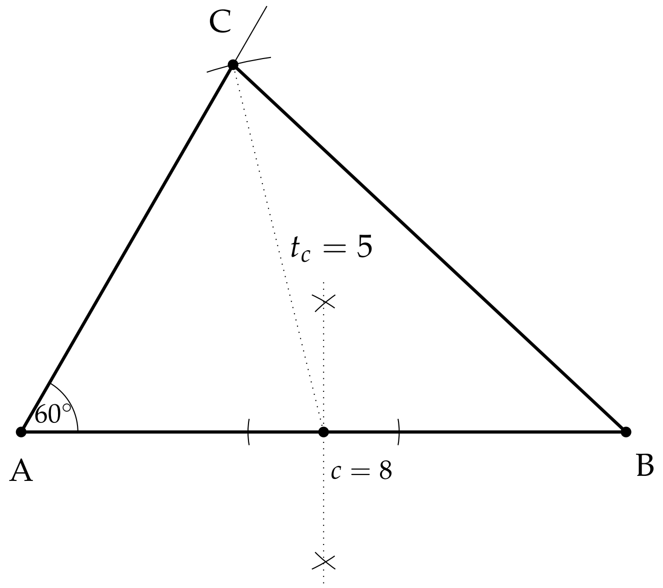
1. Narišemo premico,na njej označimo oglišče A in od A odmerimo dolžino $c = 8\,\text{cm}$. Tako dobimo še oglišče B.

2. V enem od dobljenih oglišč odmerimo pomožno višino v_c. V našem primeru smo to storili v oglišču A tako, da smo narisali pravokotnico na stranico c v točki A. Na pravokotnici od oglišča A odmerimo višino $v_c = 5\,\text{cm}$ in potem narišemo vzporednico k stranici c.

3. V oglišču A konstruiramo kot $\alpha = 60°$ tako, da je en njegov krak nosilka stranice c. Drugi krak narisanega kota seka vzporednico v oglišču C trikotnika.

4. Točko C povežemo z A in B ter tako narišemo trikotnik ABC. ■

Zgled 25: Konstruirajmo trikotnik s podatki $c = 8$ cm, $\alpha = 60°$ in $t_c = 5$ cm.



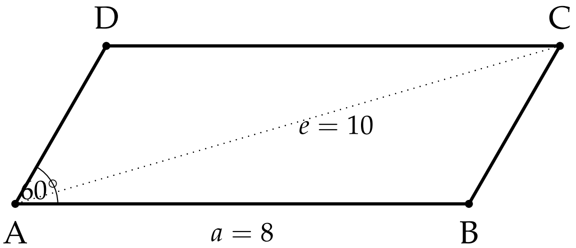
Potek konstrukcije:

1. Narišemo premico,na njej označimo oglišče A in od A odmerimo dolžino $c = 8$ cm. Tako dobimo še oglišče B.
2. V oglišču A konstruiramo kot $\alpha = 60°$ tako, da je en njegov krak nosilka stranice c.
3. Razpolovimo stranico c in iz razpolovišča odmerimo lok s polmerom $t_c = 5$ cm. Kjer lok seka prosti krak kota α (tisti, ki ne vsebuje stranice c), je oglišče C.
4. Točko C povežemo z A in B ter tako narišemo trikotnik ABC. ■

Konstrukcije štirikotnikov izvedemo tako, da ga razdelimo na take like, ki jih že znamo konstruirati, običajno je vpleten trikotnik. Uporabljali bomo običajne, dogovorjene oznake za imena stranic in kotov.

nekateri štirikotnik

Zgled 26: Konstruirajmo paralelogram ABCD s podatki $a = 8$ cm, $\alpha = 60°$ in $e = 10$ cm.

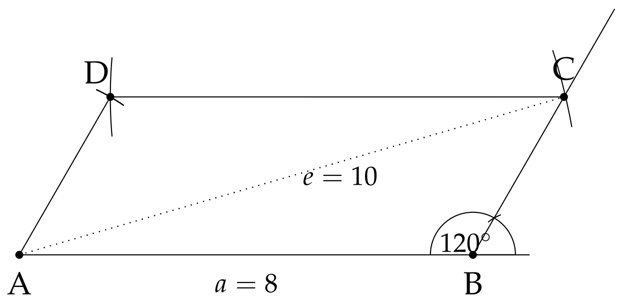
Skica: 

Z diagonalo e paralelogram razpade na dva trikotnika. Za risanje trikotnikov potrebujemo tri podatke, ki jih ugledamo v spodnjem trikotniku $\triangle ABC$: $c = 8\,\text{cm}$, $e = 10\,\text{cm}$ in $\beta = \sphericalangle CBA = 120°$ (lastnost paralelograma). Zapisani podatki ustrezajo izreku SsK o skladnosti trikotnikov, zato bo rešitev ena sama.

Potek konstrukcije:

1. Narišemo premico,na njej označimo oglišče A in od A odmerimo dolžino $a = 8\,\text{cm}$. Tako dobimo še oglišče B.

2. V oglišču B konstruiramo kot $\beta = 180° - \alpha = 120°$ tako, da je en njegov krak nosilka stranice a.



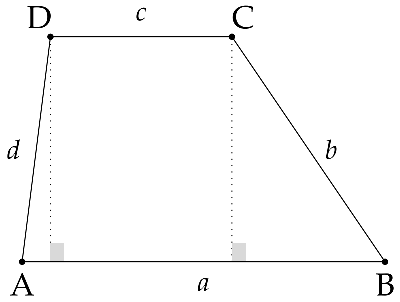
3. Iz oglišča A odmeri lok z dolžino diagonale e. Kjer lok seka prosti krak kota β (tisti, ki ne vsebuje stranice a), je oglišče C.

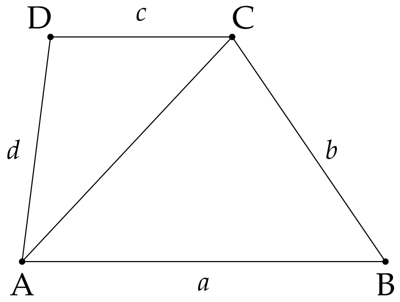
4. Iz C odmerimo lok z dolžino stranice a, iz oglišča A pa odmerimo lok z dolžino $|BC|$. Kjer se loka sekata, je oglišče D.

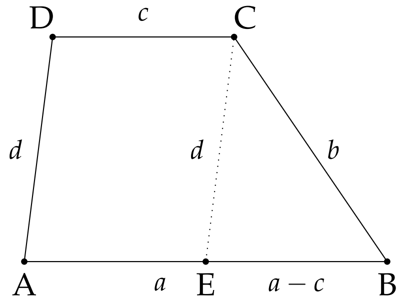
5. Točko D povežemo z A in C ter tako narišemo paralelogram ABCD. ■

Zgled 27: Konstruirajmo trapez ABCD s podatki $a = 8\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ in $d = 5\,\text{cm}$, $a \parallel c$

Skice za razmišljanje:







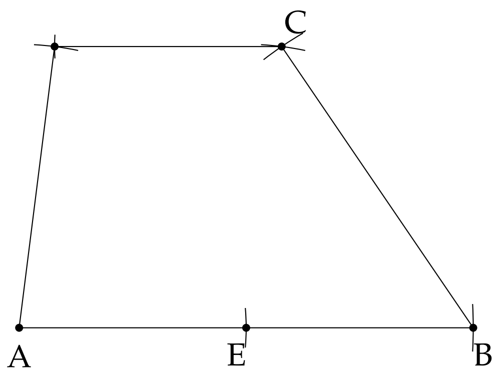
Na gornjih slikah smo si prikazali nekaj razbitij trapeza na trikotnik(e) in še kaj. Pomembno je, da kakega od nastalih trikotnikov lahko narišemo. Zato pa potrebujemo tri podatke, ki ustrezajo enemu od izrekov o skladnosti trikotnikov. V prvi skici imata oba pravokotna trikotnika dva podatka: pravi kot in hipotenuzo; premalo podatkov. V drugi skici imamo v obeh nastalih trikotnikih podani le dve stranici, zato trikotnikov nemoremo narisati.

Tretjo skico trapeza smo dobili tako, da smo skozi oglišče C narisali vzporednico k kraku d (podobno bi bilo, če bi skozi oglišče D narisali vzporednico k kraku b). Vzporednica seka stranico a v točki E in razdeli trapez na paralelogram AECD in trikotnik BCE. Ker je $|AE| = c$, je $|EB| = a - c$. Zato v trikotniku EBC poznamo vse tri stranice in ga zato lahko narišemo in to uporabimo pri konstrukciji trapeza.

Potek konstrukcije:

1. Narišemo premico,na njej označimo oglišče A in od A odmerimo dolžino $a = 8\,\text{cm}$. Tako dobimo še oglišče B.

2. V oglišču A odmerimo proti oglišču B stranico c in tako dobimo točko E.

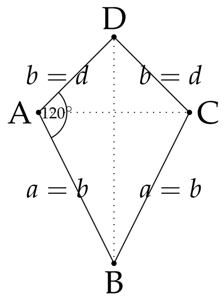


3. Iz E odmerimo lok s polmerom $d = 5\,\text{cm}$, iz oglišča B pa lok z dolžino $b = 6\,\text{cm}$. Kjer se loka sekata, je oglišče C.

4. Iz C odmerimo lok s polmerom $c = 4\,\text{cm}$, iz oglišča A pa lok z dolžino $d = 5\,\text{cm}$ (konstrukcija vzporednic). Kjer se loka sekata, je oglišče D. ■

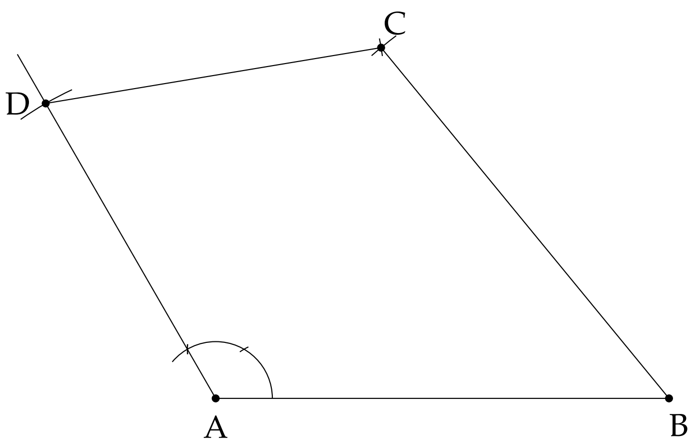
Zgled 28: **Konstruirajmo deltoid ABCD s podatki $a = b = 8\,\mathrm{cm}$, $c = d = 6\,\mathrm{cm}$ in $\alpha = 120^\circ$.**

Na skici z narisanima digonalama opazimo množico trikotnikov. Za nas je zanimiv trikotnik ABD s podatki izreka SKS (a,α,d).



Potek konstrukcije:

1. Narišemo premico,na njej označimo oglišče A in od A odmerimo dolžino $a = 8\,\mathrm{cm}$. Tako dobimo še oglišče B.
2. V A odmerimo kot α z enim krakom vzdolž stranice a. Na drugem kraku odmerimo stranico $d = 6\,\mathrm{cm}$ in dobimo oglišče D.



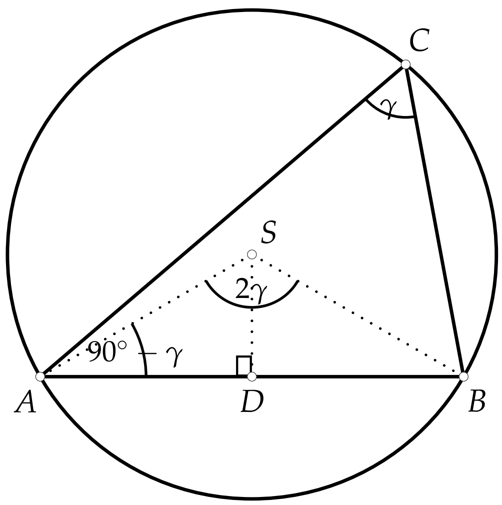
3. Iz D odmerimo lok z dolžino d, iz B lok z dolžino a. Kjer se loka sekata dobimo oglišče C.
4. Povežemo oglišče D s C in C z A ter tako narišemo deltoid ABCD.

Za konec še dve zahtevnejši konstrukciji trikotnikov.

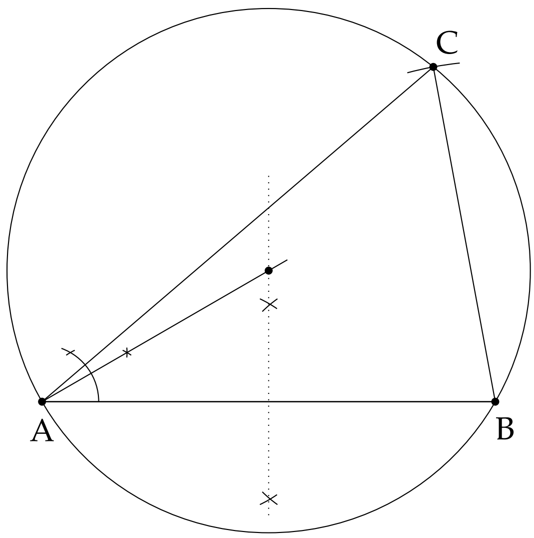
Zgled 29: * **Načrtajmo $\triangle ABC$ s podatki $c = 8\,\mathrm{cm}$, $a = 6\,\mathrm{cm}$ in $\gamma = 60^\circ$. Oznake so običajne.**

Na desni skici smo trikotniku $\triangle ABC$ očrtali krožnico. Središče krožnice naj bo točka S. Potem je notranji kot γ obodni kot nad lokom $\widehat{AB}$, središčni kot nad tem lokom je potem 2γ. V enakokrakem trikotniku $\triangle ABS$ poznamo osnovnico $AB = c$ in kot ob vrhu S, ki je enak 2γ. Zato trikotnik $\triangle ABS$ lahko narišemo:

- narišemo osnovnico AB,
- narišemo simetralo osnovnice AB,
- v A odmerimo kot $\sphericalangle BAS = 90° - \gamma$; simetrala osnovnice in krak kota $\sphericalangle BAS$ se sekata v točki S.



Konstrukcijo trikotnika $\triangle ABC$ nadaljujemo tako, da narišemo krožnico s središčem v S in polmerom $|AS|$. Potem iz oglišča B odmerimo lok, ki ima polmer $a = |BC|$. Tam, kjer načrtani lok seka narisano krožnico, je oglišče C. Konstrukcija:



■

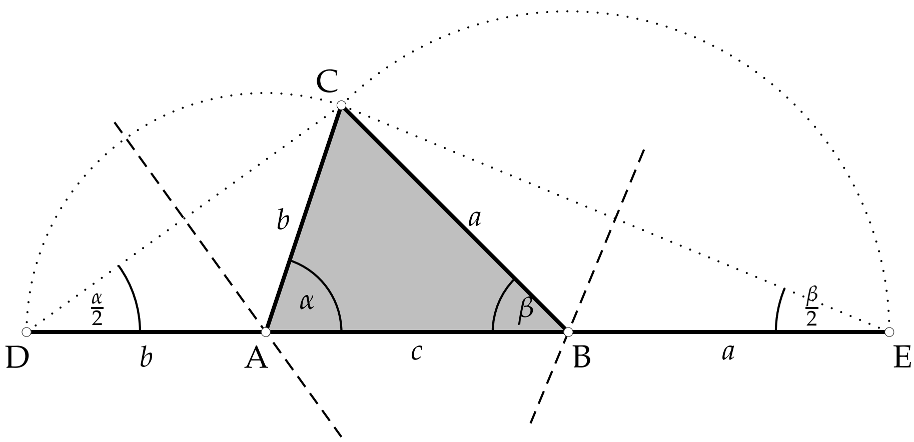
Zgled 30: * **Konstruiraj trikotnik s kotoma $\alpha = 60°$ in $\beta = 45°$ ter obsegom $o = 10\,\text{cm}$.**

Obseg trikotnika $\triangle ABC$ je vsota stranic trikotnika, v običajnih oznakah je torej $a+b+c=10\,\text{cm}$. Na spodnji skici obseg trikotnika prikažemo z daljico DE ($|DE|=o=a+b+c$), ki jo dobimo tako, da na nosilko stranice AB nanesemo daljici AD ($|AD|=b$) in BE ($|BE|=a$).

Trikotnika $\triangle DAC$ in $\triangle BEC$ sta enakokraka trikotnika s krakoma $|DA|=|AC|$ in $|BE|=|BC|$. Preprost račun pokaže, da je $\sphericalangle CDA=\sphericalangle DCA=\frac{\alpha}{2}$ in $\sphericalangle CEB=\sphericalangle BCE=\frac{\beta}{2}$.

Izračunano nam omogoča konstrukcijo $\triangle DEC$:

- Narišemo stranico DE, ki ima dolžino $o=10\,\text{cm}$; dobimo oglišči D in E;
- v oglišču D narišemo kot $\frac{\alpha}{2}$ z enim krakom na premici (D,E), v oglišču E pa narišemo kot $\frac{\beta}{2}$ z enim krakom na premici (E,D).
- Kjer se sekata druga kraka pravkar narisanih kotov, je oglišče C.



Oglišči A in B trikotnika $\triangle ABC$ sta vrha enakokrakih trikotnikov $\triangle DAC$ in $\triangle BEC$, zato ležita na simetrali njunih osnovnic DC in EC. ■

Naloge:

Opiši naslednje konstrukcije (dolžine so podane v cm):

1. trikotnik ABC, $a=6$, $v_c=4$, $\alpha=105^\circ$
2. pravokotni trikotnik ABC (pravi kot je pri oglišču C), $b=3$, $c=5$
3. enakokraki trikotnik ABC (a = b), $v_c=4$, $\gamma=60^\circ$
4. * trikotnik ABC, $a+c=10$, $b=4$, $\alpha=30^\circ$
5. * trikotnik ABC, $c-a=2$, $v_c=4$, $\alpha=30^\circ$
6. paralelogram ABCD, $a=6$, $b=2$, $e=7$
7. trapez ABCD ($a \parallel c$), $a=6$, $c=3$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$