VERJETNOST

(Interno gradivo)

Sestavil I.K.

2016

Kazalo

1 Uvod

Zamislimo si naslednje postopke:

1. V nekem mestu opoldne izmerimo temperaturo.
2. Z anketo merimo priljubljenost nekaj politikov.
3. Na tla spustimo evrski kovanec, dva evrska kovanca, tri evrske kovance.
4. Vržemo eno, dve, tri poštene igralne kocke.
5. V tarčo ustrelimo z lokom enkrat, dvakrat, trikrat.
6. V razredu pri uri matematike izberemo enega, dva, tri učence.
7. Iz črte prostih metov vržemo na koš enkrat, dvakrat, trikrat.
8. Na nogometnem igrišču streljamo en, dva, tri kazenske udarce.
9. Iz kupa 32 kart izberemo eno, dve, štiri, osem kart.

Na koncu vsakega od izvedenih postopkov se nekaj zgodi. Recimo:

1. Temperatura je 28° C.
2. Politik A je dvakrat bolj prilubljen kot politik B.
3. Na padlem kovancu se je pokazala številka (cifra). V primeru meta treh kovancev se lahko zgodi, da padeta dve številki in ena glava (grb)
4. Vsota števila pik na zgornjih ploskvah dveh vrženih kock je 8.
5. Tarčo smo zadeli v sredino.
6. Izbrali smo Janeza in Barbaro.
7. Ko smo na koš vrgli trikrat, smo dvakrat zadeli.
8. Kazenski udarec smo zgrešili.
9. Izvlekli smo karinega kralja in pikovo osmico.

Opisane postopke imenujemo **poskus** ali **eksperiment**, rezultate poskusa pa **dogodki**. Kaj zahtevamo za poskus? **poskus**

Poskus lahko pri enakih pogojih ponovimo poljubno mnogokrat.

Ker rezultat poskusa (=dogodek) ne moremo vnaprej predvideti, dogodek praviloma imenujemo **slučajni dogodek**. Ker pa bi radi manj pisali in manj govorili, bomo besedo slučajni kar opustili in slučajnemu dogodku pravili dogodek. Kaj zahtevamo za dogodek?

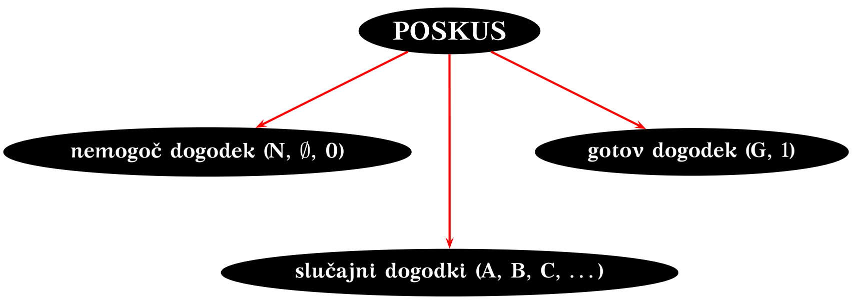
slučajni dogodek

Za vsak (slučajni) dogodek je mogoče le dvoje: ali se dogodek v izvedbi poskusa **zgodi** ali pa se **ne zgodi**, tretje možnosti za dogodek ni.

Matematično disciplino, ki se ukvarja z dogodki imenujemo verjetnostni račun. Vsakemu dogodku danega poskusa verjetnostni račun priredi neko število, ki ga imenujemo verjetnost dogodka. V naslednjih poglavjih bomo spoznali, kako v izračunamo verjetnost dogodka, še prej pa se z dogodki naučimo računati.

2 Algebra dogodkov *

Beseda **algebra** izhaja iz arabske besede al-jabr, ki je v zapisih arabskega matematika Al-Hvarizmija (ok. 780 - 850) pomenila nauk o enačbah. Do konca 19. stoletja se je algebra v glavnem res ukvarjala z reševanjem enačb. Dandanes pa beseda algebra pomeni računanje z abstraktnimi izrazi.



Slika 1: Vrste dogodkov

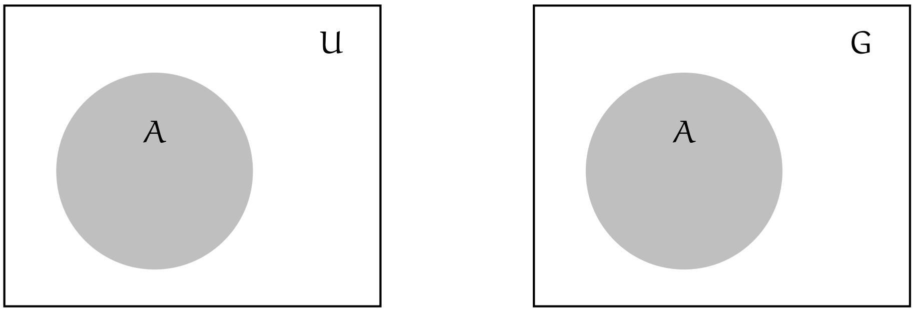
V našem primeru bodo abstraktne izrazi **dogodki**. Spomnimo se, da je dogodek rezultat nekega poskusa. Množica vseh dogodkov, s katerimi bomo računali, so vsi možni rezultati določenega poskusa. Pri tem bomo posebej odlikovali dva dogodka: nemogoč dogodek in gotov dogodek.

nemogoč
gotov
dogodek

Nemogoč dogodek (oznake: N, $\emptyset$, 0) je dogodek, ki se pri nobeni ponovitvi poskusa **ne zgodi**, **gotov dogodek** (oznaki: G, 1) pa je dogodek, ki sezgodi pri vsaki ponovitvi poskusa.

Ostale dogodke poskusa, ki se pri vsaki ponovitvi poskusa bodisi zgodijo bodisi se ne zgodijo, običajno označujemo z velimi tiskanimi črkami A, B, C ....

Računanje z dogodki je zelo podobno računanju z množicami (=algebra množic). Množice smo grafično predstavljali s krogi. Univerzalna množica je bila tista, ki je vsebovala kot podmnožice vse množice s katerimi se ukvarjamo, pri dogodkih pa vlogo univerzalne množice igra gotov dogodek, ki ga grafično prikazujemo s pravokotnikom, prav tako, kakor smo grafično prikazali univerzalno množico.



Slika 2: Grafični prikaz univerzalne množice in množice A v njej ter grafični prikaz dogodka A

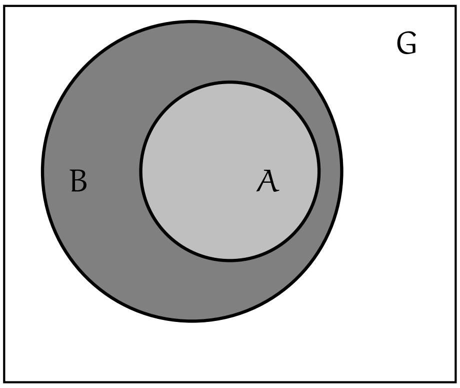
Za katerikoli dogodek poskusa je najpomembneje, da znamo presoditi, kdaj se dogodek zgodi in kdaj se ne zgodi.

Dogodke bomo tudi zapisovali podobno kot množice. Med zavita oklepaja { in } bomo vstavili opis dogodka, recimo če je pri metu igralne kocke padla šesetica bomo ta dogodek zapisali A ={padlo je 6 pik}.

V algebri množic imamo pojem **podmnožica** množice, v algebri dogodkov je podoben pojem **način** dogodka.

način dogodka

Dogodek A je **način** dogodka B, v oznakah $A \subset B$, če se vsakič, ko se zgodi A, zgodi tudi B. Pravimo tudi, da je dogodek A vsebovan v dogodku B.



Slika 3: Dogodek A je način dogodka B; oznaka $A \subset B$

Zgled 1: Preveri pravilnost naslednjih trditev:

1. **Poskus: merjenje temperature T, dogodek $A = \{15^\circ \leq T \leq 25^\circ\}$, dogodek $B = \{T$ je vsaj $15^\circ\}$, trditev $A \subset B$.**

2. **Poskus: met dveh evrskih kovancev, dogodek $A = \{$pade vsaj ena glava$\}$, dogodek $B = \{$padeta dve glavi$\}$, trditev $A \subset B$.**

3. **Poskus: izbiranje dveh učencev v razredu, dogodek $A = \{$izbrali smo dve dekleti$\}$, dogodek $B = \{$izbrali smo vsaj enega fanta$\}$, trditev $A \subset B$.**

4. **Poskus: streljali smo enajstmetrovko, dogodek $A = \{$nismo dosegli gola$\}$, dogodek $B = \{$zadeli smo vratnico$\}$, trditev $A \subset B$.**

5. **Poskus: izbira dveh kart iz kupa 32 kart, dogodek $A = \{$izbrali smo karinega asa in pikovo devet$\}$, dogodek $B = \{$izbrali smo vsaj enega asa$\}$, trditev $A \subset B$.**

V prvem primeru je trditev pravilna, saj, če se zgodi A je temperatura vsaj 15° in se je zato zgodil tudi B.

V drugem primeru trditev ni pravilna, saj, če pade ena glava in ena številka, se je dogodek A zgodil, dogodek B se pa ni zgodil. Je pa pravilna trditev $B \subset A$.

V tretjem primeru trditev ni pravilna, saj se dogodka izključujeta, kar pomeni, da se hkrati sploh ne moreta zgoditi.

V četrtem primeru je pravilna trditev $B \subset A$, v zadnjem primeru pa je zapisana trditev pravilna. ■

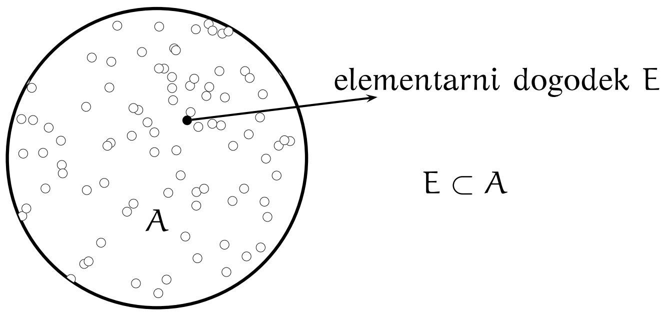
Privzeli bomo, da je nemogoč dogodek način vsakega dogodka. Opišimo še enakost dveh dogodkov:

enakost dogodkov

Dogodka A in B sta **enaka**, če sta drug drugemu način, torej $A \subset B$ in $B \subset A$. Drugače povedano: dogodka sta enaka, če se vsakič, ko se zgodi A, zgodi tudi B in obratno, vsakič, ko se zgodi B, se zgodi tudi A.

Zgled 2: **Vrzimo dve igralni kocki in naj bo $A = \{$vsota pik na kockah je deljiva s 6, produkt števila pik na kockah je popoln kvadrat $\}$ ter $A = \{$na obeh kockah je padlo bodisi po tri pike bodisi po šest pik$\}$. Preveri, če je $A = B$.**

Recimo, da se je A zgodil. Potem je vsota pik 6 ali 12. Vsota 6 nastane v primeru, ko na kockah pade $1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1$, vsota 12 le v primeru $6+6$. Ker mora biti produkt števila pik popoln kvadrat, sta edini možnosti, da je na kockah padlo obakrat tri ali obakrat 6, torej se je zgodil tudi dogodek B. Obratno, če se je zgodil B, se je zgodil tudi A, je očitno. Zato je $A = B$. ■



Slika 4: Dogodek A vsebuje elementarne dogodke, med njimi je tudi E

elementarni dogodek

Med mogočimi dogodki, torej tistimi, ki se lahko zgodijo, so posebno pomembni **elementarni** dogodki ali **izidi**. Grafično jih bomo označevali z malimi krogci $\circ$, označevali pa jih bomo običajno z E ali e.

Elementarni dogodek E nekega poskusa je tak mogoč dogodek, da noben drug mogoč dogodek ni njegov način, torej v E ni vsebovan noben mogoč dogodek. Vsi elementarni dogodki poskusa sestavljajo **prostor elementarnih dogodkov**.

Zgled 3: Opiši elementarne dogodke naslednjih poskusov in izračunaj njihovo število.

1. **Met ene igralne kocke, met dveh igralnih kock.**
2. **Met enega kovanca, met evrskega in dvoevrskega kovanca.**
3. **Izbira enega dijaka v razredu z 20 dijaki, izbira dveh dijakov istega razreda.**
4. **Izbira dveh kart iz kupa 32 kart.**
5. **Merjenje temperature.**
6. **Nik in Jan neodvisno drug od drugega prideta pred vhod v muzej med 12.00 in 13.00 uro.**

Pri metu ene kocke je elementarnih dogodkov 6: na zgornji ploskvi kocke je ena pika ⚀, sta dve piki ⚁, so tri pike ⚂, štiri pike ⚃, pet pik ⚄ in šest pik ⚅.

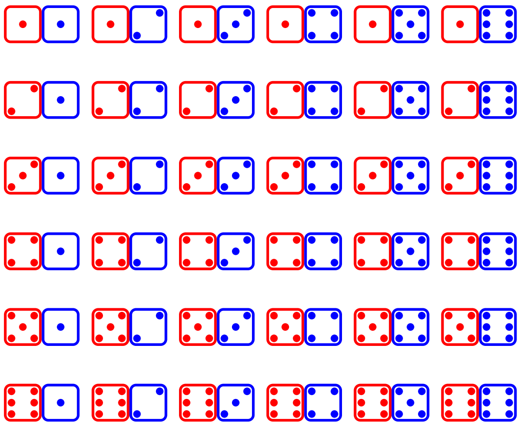
Pri metu dveh kock, ki sta seveda različni, si zamislimo, da sta kocki različnih barv, recimo rdeča in modra. Elementarni dogodek je urejen par števil: število na zgornji ploskvi rdeče kocke in število na modri kocki. Po pravilu produkta je vseh elementarnih dogodkov $6 \cdot 6 = 36$.

Če mečemo en kovanec imamo le dva možna elementarna dogodka: na zgornji strani padlega kovanca je številka (Š) ali, da je na zadnji strani glava, grb (G).

V primeru dveh kovancev, ki ju razlikujemo, pravilo produkta pravi, da imamo 4 možne elementarne dogodke: Š Š Š G G Š G G

Enega dijaka lahko izberemo na 20 načinov in prav toliko je elementarnih dogodkov pri izbranju enega dijaka.

Če v razredu dijake oštevilčimo, recimo po abecedi, so elementarni dogodki neurejeni pari (i, j). Neurejen par pomeni, da vrstni red izbiranja ni važen; tako je $(i, j) = (i, j)$. Elementarni dogodki so ravno kombinacije izbiranja dveh dijakov. Kot smo se učili, je takih kombinacij $\binom{20}{2} = 190$, torej je toliko elementarnih dogodkov v tem poskusu.



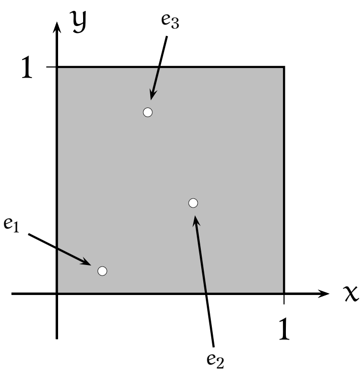
(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)
(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6)
(3, 1)(3, 2)(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6)
(4, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6)
(5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6)
(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6)

Slika 5: Dve možni grafični podobi prostora elementarnih dogodkov meta dveh kock

Tudi v tem poskusu so elementarni dogodki neurejeni pari, ki so sestavljeni iz dveh različnih kart, recimo ♣K♡A je izbira križevega kralja in srčnega asa. Vseh takih izbir, torej elementarnih dogodkov, je $\binom{32}{2} = 496$

Elementarni dogodek je izmerjena temperatura T, recimo $\{T = 23.8°\}$. Očitno je v tem primeru elementarnih dogodkov neskončno.

Elementarni dogodek zapišemo z urejenim parom (x, y), kjer x pomeni čas Nikovega prihoda po 12 uri, y pa čas Janovega prihoda po 12 uri. Očitno je elementarnih dogodkov neskončno, omejitev je le $0 \leq x, y \leq 1$, torej sta časa x in y omejena med 0 ure in 1 uro. Prostor prikažemo v koordinatnim sistemu s kvadratom $[0, 1] \times [0, 1]$, v njem pa so prikazani elementarni dogodki e_1, e_2 in e_3, recimo e_3 pomeni, da je Nik prispel ob $12:24$, Jan pa ob $12:48$. ■



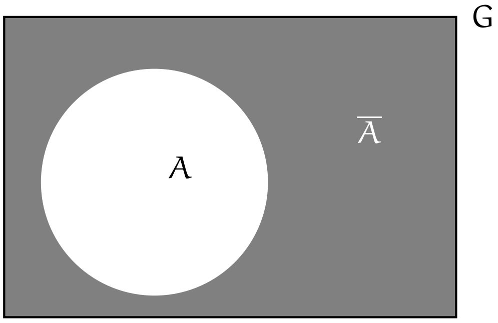
Dogodek, ki ga sestavlja več elementarnih dogodkov, bomo imenovali sestavljen dogodek, torej:

sestavljeni dogodek

Mogoči dogodek, ki ni elementaren, imenujemo sestavljeni dogodek.

Nasprotni dogodek $\overline{A}$ dogodka A je dogodek, ki se zgodi samo takrat, ko se dogodek A ne zgodi.

nasprotni dogodek



Slika 6: Dogodek A in nasprotni dogodek $\overline{A}$

Zgled 4: Opiši nasprotne dogodke naslednjih dogodkov:

A $=${**padla je vsaj ena glava pri metu treh kovancev**}.

B $=${**pri merjenju temperature le ta ni presegla 20°**}.

C $=${**pri izbiranju treh dijakov v razredu sta bila v izboru oba spola**}.

D $=${**v razredu imata vsaj dva dijaka rojstni dan na isti datum**}.

Preveri rešitve:

$\overline{A}$ $=${padle so tri številke}.

$\overline{B}$ $=${temperatura je presegla 20°}.

$\overline{C}$ $=${v izboru so bila tri dekleta bodisi trije fantje}.

$\overline{D}$ $=${noben par dijakov nima rojstni dan na isti datum}.

■

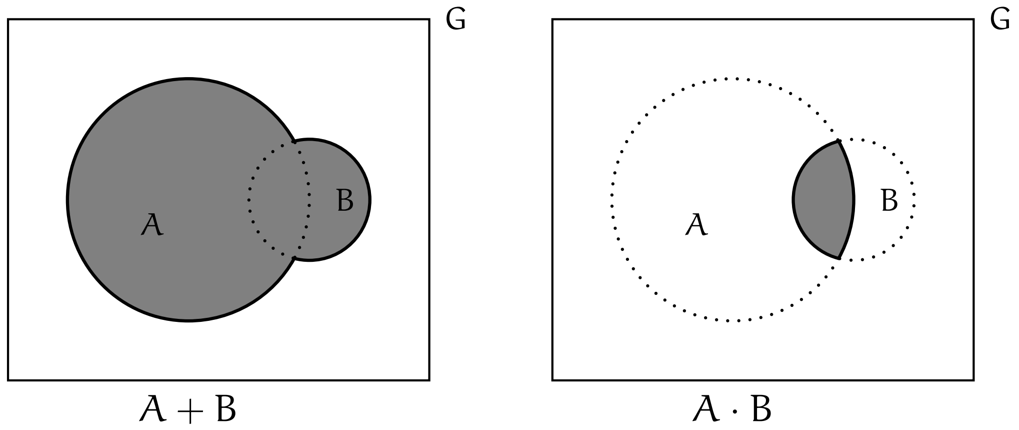
Naslednji računski operaciji z dogodki sta vsota in produkt dogodkov. Za vsoto in produkt bomo uporabljali klasična simbola $+, \cdot$ (znak za produkt bomo tudi izpuščali). Pri množicah sta podobni operaciji unija in presek dveh množic, zato bomo včasih za vsoto in produkt uporabljali tudi znana simbola za unijo $\cup$ in presek $\cap$.

Vsota $A + B$ (ali $A \cup B$) dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi natanko tedaj, ko se zgodi **vsaj eden** od dogodkov A ali B.

vsota dogodkov

Produkt $A \cdot B$ (ali AB, pa tudi $A \cap B$) dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi natanko tedaj, ko se zgodita **hkrati oba** dogodka A ali B.

produkt dogodkov



Slika 7: Vennova diagrama vsote in produkta dogodkov A in B

Zgled 5: **Hkrati vržemo dve igralni kocki. Naj bo A dogodek, da je vsota pik na kockah 8, B pa dogodek, da je produkt pik na kockah 12. Opiši dogodka $A + B$ in AB.**

Dogodek A sestavljajo elementarni dogodki $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$ in $(6, 2)$, dogodek B pa elementarni dogodki $(2, 6), (3, 4), (4, 3)$ in $(6, 2)$. Zato vsoto sestavljajo elementarni dogodki $(2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 3), (5, 3), (6, 2)$, produkt pa elementarna dogodka $(2, 6)$ in $(6, 2)$. ■

V zadnjem zgledu smo uporabili trditev, ki jo ni težko utemeljiti s primernim razmislekom:

Sestavljen dogodek A je **vsota** svojih **elementarnih** dogodkov, torej tistih elementarnih dogodkov, ki so njegov način.

Ker primerjamo algebri dogodkov in množic, dodajmo, da takšno vlogo, ki jo igrajo v algebri dogodkov elementarni dogodki, v algebri množic igrajo podmnožice z enim samim elementom $\{x\}$. Take podmnožice imenujemo singeltoni.

Zgled 6: **Pokaži, da za dogodke veljajo naslednje formule:**

- $A + N = A$, $A \cdot N = N$
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$ **(idempotentnost)**
- $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ **(komutativnost)**
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **(asocitivnost)**
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ **(distributivnost)**
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ **in** $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ **(De Morganova zakona)**

Zgled smo izbrali, da pokažemo način dokazovanja formul v algebri dogodkov, pa tudi v algebri množic je način dokazovanja podoben. Glavna ideja je v ugotovitvi, da sta leva in desna stran formule ena drugi način.

Pokažimo asociativnost produkta: če naj se zgodi dogodek $(A \cdot B) \cdot C$, se zgodita dogodka $A \cdot B$ in C. Torej se zgodijo vsi trije dogodki A, B in C hkrati, zato se zgodi tudi $B \cdot C$ in tako tudi $A \cdot (B \cdot C)$. Torej je dogodek $(A \cdot B) \cdot C$ način dogodka $A \cdot (B \cdot C)$. Podobno pokažemo tudi obratno relacijo, zato asociativnost produkta velja.

V običajni algebri števil velja le ena "distributivnost", tista $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. V algebri dogodkov velja še druga distributivnost, ki je pri številih ni: $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$. Dokažimo jo. Če naj se zgodi leva stran, se zgodita A ali $B \cdot C$. Če se je zgodil A, se oba dogodka $A + B$ in $A + C$ zgodita, zato se zgodi tudi produkt $(A + B)(A + C)$. Torej je $A + B \cdot C \subset (A + B) \cdot (A + C)$. Dokažimo še obratno relacijo $A + B \cdot C \supset (A + B) \cdot (A + C)$. Če sezgodi desna stran $(A + B) \cdot (A + C)$, se zgodita in $A + B$ in $A + C$. Če se je zgodil A, se je seveda zgodil tudi $A + B \cdot C$, če pa se A ni zgodil, sta se morala zgoditi B in C, zato se je zgodil tudi $B \cdot C$ in tako tudi $A + B \cdot C$, kar smo želeli pokazati.

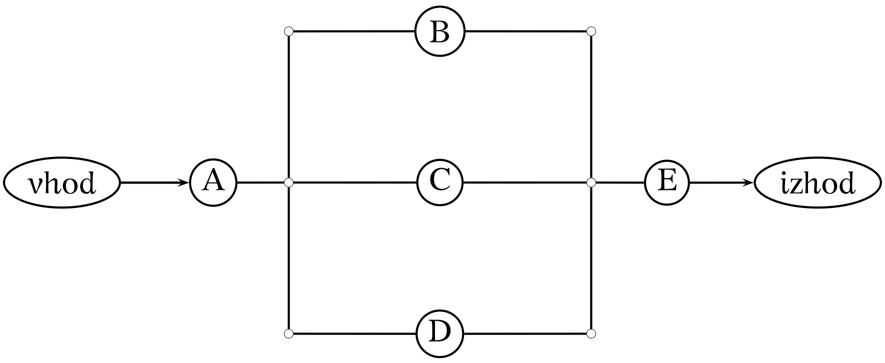
Dokažimo še prvo De Morganovo formulo $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Recimo, da se je zgodil dogodek na levi strani $\overline{A+B}$. Potem se ni zgodil dogodek $A+B$, zato se ni zgodil nobeden od dogodkov A in B. Torej sta se zgodila nasprotna dogodka $\overline{A}$ in $\overline{B}$ ter tako dogodek $\overline{A} \cdot \overline{B}$. Zato je $\overline{A+B} \subset \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Pokažimo še, da je desna stran način leve strani. Recimo, da se je dogodek $\overline{A} \cdot \overline{B}$ zgodil. Zato sta se dogodka $\overline{A}$ in $\overline{B}$ zgodila, dogodka A in B pa ne. Torej se dogodek $A+B$ ni zgodil, zato pa se je zgodil nasprotni dogodek $\overline{A+B}$. Tako smo ugotovili, da je $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A+B}$. Ker sta oba dogodka ($\overline{A+B}$ in $\overline{A} \cdot \overline{B}$) drug drugemu način, sta enaka.

Podobnom pokažemo tudi druge zapisane formule, dokaze pa prepustimo bralcu za domačo nalogo. ■

Zgled 7: Na sliki je prikazano električno vezje. S črkami A, B, C, D, E so prikazani dogodki, da električni tok steče skozi ustrezna mesta. Zapiši z dogodki A, B, C, D, E dogodek, da bo tok stekel po vezju od vhoda do izhoda.



Slika 8: Slika k zgledu

Če naj tok steče med vhodom in izhodom se morata zgoditi dogodka A in E ter vsaj eden od dogodkov B, C, D. Da se zgodi vsaj eden od dogodkov zapišemo z vsoto, da se zgodijo neki dogodki hkrati pa s produktom. Zato je zapis iskanega dogodka $A \cdot (B+C+D) \cdot E$ ■

Zgled 8: Naj bodo A_1, A_2 in A_3 poljubni dogodki nekega poskusa. Zapiši z njimi naslednje dogodke tega poskusa:

B $=\{$ **zgodil se je samo dogodek** A_1**, dogodka** A_2 **in** A_3 **pa ne** $\}$.

C $=\{$ **zgodili so se vsi trije dogodki** A_1, A_2 **in** A_3 $\}$.

D $=\{$ **zgodil se je vsaj eden od dogodkov** A_1, A_2, A_3 $\}$.

E $=\{$ **zgodil se je natanko eden od dogodkov** A_1, A_2, A_3 $\}$.

F $=\{$ **zgodil se je kvečjemu eden od dogodkov** A_1, A_2, A_3 $\}$.

V prvem primeru se zgodi A_1, ne zgodita se A_2 in A_3, torej se hkrati zgodijo $A_1, \overline{A_2}$ in $\overline{A_3}$, zato je $B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Podobno sklepanje dá $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Če naj se zgodi vsaj eden od dogodkov, se zgodi njihova vsota, torej je $D = A_1 + A_2 + A_3$.

Dogodek E je vsota dogodkov $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ in $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$. Dogodek F se zgodi v primerih, ko se ne zgodi nobeden od dogodkov A_1, A_2 in A_3, ali pa se zgodi natanko eden od dogodkov A_1, A_2 in A_3, kar smo označili z dogodkom E. Torej je $F = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + E$. ■

nezdružljiva dogodka

Dogodka, ki se ne moreta zgoditi hkrati, imenujemo **nezdružljiva** dogodka.

Očitno je produkt nezdružljivih dogodkov nemogoč dogodek, torej, če sta dogodka A in B nezdružljiva, je $AB = N$.

Ni se težko prepričati v pravilnost naslednjih formul za poljuben dogodek A (N je nemogoč, G pa gotov dogodek):

$$A + \overline{A} = G, \; A \cdot \overline{A} = N$$

Dogodka A in $\overline{A}$ sestavljata poseben sistem dogodkov, ki mu pravimo popoln sistem, bolj natančno:

popoln sistem

Množica dogodkov $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je **popoln sistem** dogodkov, če

1. so dogodki v množici paroma **nezdružljivi**,
2. vsi dogodki množice skupaj **sestavljajo gotov** dogodek ali drugače rečeno $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = G$.

Zgled 9: **Naj bosta A in B poljiubna mogoča dogodka nekega poskusa. Pokaži, da je sistem dogodkov A, $\overline{A}B$, $\overline{A+B}$ popoln sistem dogodkov.**

Zadnji dogodek $\overline{A+B}$ lahko z De Morganovim zakon lahko zapišemo v obliki $\overline{A}\,\overline{B}$. Dogodki sistema so paroma nezdružljivi, saj je $A \cdot (\overline{A}B) = (A\overline{A})B = NB = N$, $A \cdot \overline{A+B} = A \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) = (A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} = N \cdot \overline{B} = N$ in $(\overline{A}B) \cdot \overline{A+B} = \overline{A}B\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}\,\overline{A}\,(B\,\overline{B}) = \overline{A}\,N = N$.

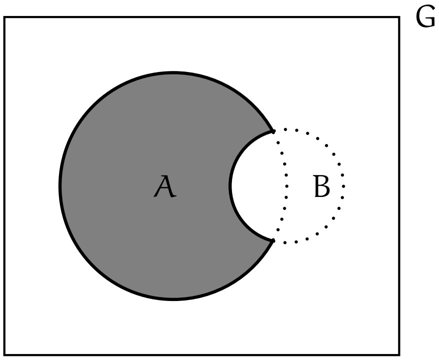
Opisani dogodki skupaj tvorijo gotov dogodek:

$$A + \overline{A}B + \overline{A+B} = A + (\overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + \overline{A} \cdot G = A + \overline{A} = G \qquad \blacksquare$$

Najpomembnejši popoln sistem sestavljajo vsi elementarni dogodki poskusa. Ker elementarni dogodki ne vsebujejo nobenega dogodka, so paroma nezdružljivi, pri vsaki izvedbi poskusa pa se vsaj eden od elementarnih dogodkov zgodi, zato je njihova vsota gotov dogodek G, torej, če ima poskus n elementarnih dogodkov $e_1, e_2, \ldots, e_n$, je

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_n = G$$

V algebri množic je bila razlika množic A in B taka množica $A \setminus B$ (tudi $A - B$), ki je vsebovala vse elemente, ki so bili v A, niso pa bili v B. Nekaj podobnega je tudi razlika dogodkov:



Slika 9: Vennov diagram razlike $A \setminus B$ dogodkov A in B

razlika dogodkov

Razlika $A \setminus B$ dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, ko se A zgodi, B pa ne.

Naloge

1. Določi prostor elementarnih dogodkov pri metanju:
   (a) enega kovanca
   (b) dveh kovancev

2. Hkrati vržemo dve igralni kocki.
   (a) Določi prostor elementarnih dogodkov. Koliko jih je ?
   (b) Z elementarnimi dogodki zapiši dogodka:
   A $=\{$ na obeh kockah je enako število pik$\}$.
   B $=\{$ vsota pik na kockah je 7$\}$.

3. V škatli se nahaja 5 kroglic, in sicer sta 2 beli, 2 rdeči in 1 rumena. Hkrati izvlečemo tri kroglice. Določi:
   (a) število vseh elementarnih dogodkov
   (b) število tistih dogodkov, kjer so vse kroglice različnih barv
   (c) število tistih dogodkov, kjer sta dve kroglici rdeči

4. Hkrati vržemo dve igralni kocki. Naj bo A dogodek, da je vsota pik na kockah 8, B pa dogodek, da je produkt pik na kockah 12. Poišči $A+B$ in AB.

5. Dokaži: $A+B=B+A$, $AB=BA$, $A+(B+C)=(A+B)+C$, $A(BC)=(AB)C$ in $A(B+C)=AB+AC$

6. Poenostavi izraz: $(B+C)(B+\overline{C})(\overline{B}+C)$

7. Dani so dogodki A , B in C. Zapiši z danimi dogodki naslednje dogodke:
   (a) zgodi se A, B in C pa se ne zgodita
   (b) zgodijo se vsi trije
   (c) nobeden se ne zgodi
   (d) zgodi se vsaj eden
   (e) zgodita se vsaj dva
   (f) zgodi se natanko eden
   (g) ne zgodita se več kot dva

3 Statistična (empirična) definicija verjetnosti

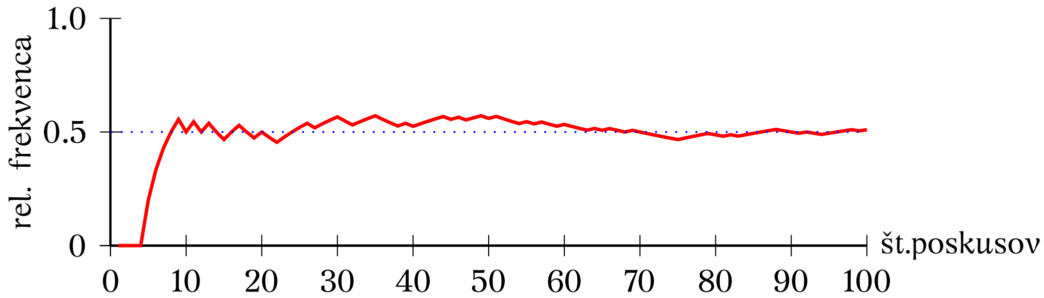
Vzemimo kovanec za 2€ in ga 100 krat, vsakič približno enako, z metra in pol spustimo na tla. Pri vsaki ponovitvi poskusa opazujemo dogodek $A = \{$na tleh se je na vrhnji strani pojavila številka$\}$ in v primerno tabelo vpišemo naslednje količine:

- številko poskusa,
- izid poskusa označimo z 1, če se je dogodek A zgodil, z 0 če se ni zgodil,
- **frekvenco** f dogodka A (**frekvenca** je število, ki nam pove, kolikokrat se je dogodek zgodil v določenem številu poskusov, recimo, če se je A v 10 poskusih zgodil 4-krat je frekvenca 4)
- **relativno frekvenco** r dogodka A (relativna frekvenca je razmerje med frekvenco f in ustreznim številom poskusov n, torej je $r = \dfrac{f}{n}$.

št. poskusa	dogodek A	frekvenca f	rel. frekvenca r
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	1	1	0.2
6	1	2	$0.\overline{3}$
...	...	...	...

Tabela 1: Vpisani ustrezni podatki za prvih šest poskusov, ki nam jih je simuliral računalnik

Relativna frekvenca (r) se spreminja s številom poskusom n. Odvisnost prikažemo grafično in opazujemo, kaj se dogaja z relativno frekvenco, ko se število poskusov veča.



Slika 10: Spreminjanje relativne frekvence pri 100 poskusih

Graf odvisnosti sestavljajo posamezne točke (št. poskusa, r), ki pa jih zaradi boljše preglednosti zaporedoma povežemo z daljicami. Ordinate točk na grafu so omejene med 0 in 1, saj so relativne frekvence nenegativne, pa tudi frekvenca dogodka ne more preseči števila poskusov. Na začetku graf relativne spreminja vrednost (opazno niha), z naraščajočim številom poskusov pa se vedno bolj umirja (stabilizira) okrog števila $0,5$. Kaj pomeni umirja? Ko število poskusov povečujemo, se relativne frekvence čedalje manj ločijo med seboj. Število $0,5$, okrog katerega se umirijo relativne frekvence našega dogodka, imenujemo **verjetnost** dogodka A. Tudi za poljuben dogodek poljubnega drugega poskusa uporabimo enako definicijo verjetnosti dogodka:

statistična definicija verjetnosti

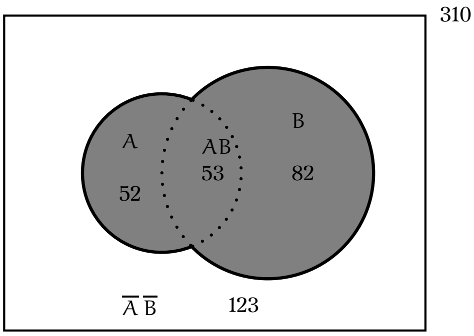
Verjetnost dogodka je število okrog katerega se umiri (stabilizira) relativna frekvenca dogodka, ko povečujemo število poskusov.

Verjetnost dogodka A označimo s $P(A)$ ali pa, če je jasno o katerem dogodku govorimo, kar s p. Če poznamo pojem limite zaporedja, lahko statistično definicijo verjetnosti lahko zapišemo v obliki:

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{n}}$$

Zgled 10: **V nekem mestu so zadnjih deset let meseca januarja beležili vremenske podatke. Tako so ugotovili, da je bilo 105 dni s padavinami, 135 dni je bilo hladno, 53 dni pa je bilo s padavinami, pa še hladno. Označimo z A dogodek, da je bil izbran dan v januarju s padavinami, z B pa da je bil izbran dan hladen. Oceni verjetnosti naslednjih dogodkov:** A, B, AB, $A+B$, $\overline{A}B$, $A\setminus B$, $\overline{A}\,\overline{B}$.

Januar ima 31 dni, zato smo "poskus" napravili 310 krat. Poleg dni s padavinami in hladnimi dnevi, so bili januarja lahko še topli dnevi brez padavin, zato si je podatke najbolje predstaviti z Vennovim diagramom tako, kot je prikazano na desni. Uporabimo pravilo vključitev-izključitev in iz diagrama razberemo, da je bilo $105-53=52$ dni deževnih ali takih s snegom, niso pa bili ti dnevi hladni, $135-53=82$ je bilo hladnih dni brez padavin, $310-(105+135)+53=123$ (ali $310-(52+53+82)=123$) pa je bilo nehladnih in brez padavin.



Približke za iskane verjetnosti nam dajo relativne frekvence ustreznih dogodkov. Zato je:

$$P(A) \doteq \frac{105}{310} \approx 0.339, P(B) \doteq \frac{135}{310} \approx 0.435, P(AB) \doteq \frac{53}{310} \approx 0.171, P(A+B) \doteq \frac{187}{310} \approx 0.603$$

$$P(\overline{A}B) \doteq \frac{82}{310} \approx 0.265,\ P(A \setminus B) \doteq \frac{52}{310} \approx 0.168,\ P(\overline{A}\,\overline{B}) \doteq \frac{123}{310} \approx 0.368 \qquad \blacksquare$$

Pogosto se zgodi, da moramo izračunati verjetnost dogodka, ki je sestavljen iz drugih dogodkov, verjetnosti teh dogodkov pa poznamo. Zato zapišimo nekaj koristnih pravil za računanje z verjetnostmi. Pri tem bodo A, B, X pomenili dogodke istega poskusa, z N in G pa označimo nemogoč in gotov dogodek.

pravila

1. $\boxed{0 \leq P(X) \leq 1}$

2. $\boxed{P(N) = 0,\ P(G) = 1}$

Lastnosti bomo tudi v naslednjih primerih utemeljili tako, da bomo ugotavljali obnašanje relativne frekvence $\frac{f}{n}$ dogodka, ki je v velikem številu (n) ponovitev poskusa dober približek za verjetnost dogodka.

Frekvenca dogodka (f), število poskusov (n) sta naravni števili, zato je $\frac{f}{n} \geq 0$. Ker frekvenca opazovanega dogodka ne presega števila poskusov, je tudi jasno, da je $P(X) \leq 1$. Bralec pa naj utemelji drugo lastnost.

3. Če sta A in B nezdružljiva dogodka ($AB = N$), je

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}$$

Utemeljitev je enostavna. Ker sta A in B nezdružljiva dogodka, se vsota $A + B$ zgodi tolikokrat, kot je vsota frekvenc dogodkov A in B.

Zadnje pravilo s preprosto indukcijo posplošimo na poljubno končno število paroma nezdružljivih dogodkov:

4. Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma nezdružljivi dogodki, je

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}$$

Poseben primer paroma nezdružljivih dogodkov so popoln sistem dogodkov. Ker je vsota vseh dogodkov popolnega sistema gotov dogodek, nam zadnje pravilo postreže z naslednjim pravilom:

5. Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sestavljajo popoln sistem dogodkov, je

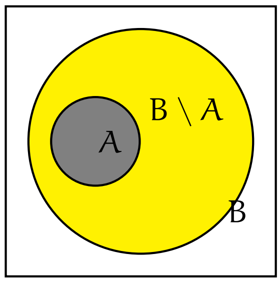
$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1}$$

Dogodek in njegov nasprotni dogodek sta nezdružljiva, njuna vsota pa je gotov dogodek, zato je

6. Za verjetnost dogodka A in nasprotnega dogodka $\overline{A}$ velja

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

Za naslednje pravilo si oglejmo Vennov diagram na desni sliki. Na njem sta prikazana dogodka A in B, pri tem pa je dogodek A način dogodka B ($A \subset B$). Dogodka A in razlika $B \setminus A$ sta nezdružljiva, zato je $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Odtod pa z lahkoto preberemo pravilo:



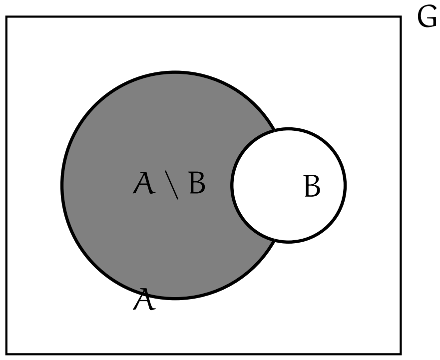
7. $\boxed{A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$

Naslednje pravilo se imenuje monotonost verjetnosti in je neposredna posledica pravkar zapisanega pravila:

8. $\boxed{A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$

Na Vennovem diagramu na desni sliki ugledamo, da je $A + B = A \setminus (AB) + B$. Ker sta dogodka $A \setminus (AB)$ in B nezdružljiva in je $AB \subset A$, velja:

$$P(A+B) = P(A \setminus (AB) + B) = P(A \setminus (AB)) + P(B) = \underbrace{P(A) - P(AB)}_{\text{pravilo 5}} + P(B)$$



Majhna sprememba zadnjega rezultata nam da pravilo podobno pravilu, ki smo ga imenovali vključitev-izključitev:

9. $\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$

Zgled 11: Naj bo $P(A) = \dfrac{1}{3}$ in $P(B) = \dfrac{1}{2}$. Izračunaj verjetnost dogodka $B\,\overline{A}$, če je:

1. $A\,B = N$ **2.** $A \subset B$ **3.** $P(A\,B) = \frac{1}{8}$

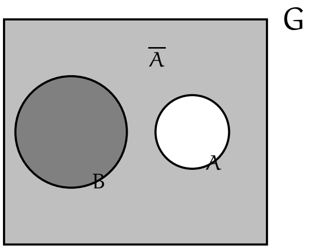
V prvem primeru uporabimo dejstvo, da v primeru $AB = N$ velja: $B\,\overline{A} = B$, zato je $P(B\,\overline{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$.

V drugem primeru upoštevamo, da je $A \subset B$ in zato uporabimo pravilo 5. Dobimo: $P(B\,\overline{A}) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

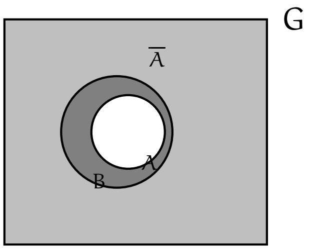
V zadnjem primeru upoštevajmo, da je $B\,\overline{A} = B \setminus A = B \setminus (AB)$. Ker je $AB \subset B$, spet uporabimo pravilo 5 in dobimo:

$$P(B\,\overline{A}) = P(B \setminus (AB)) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

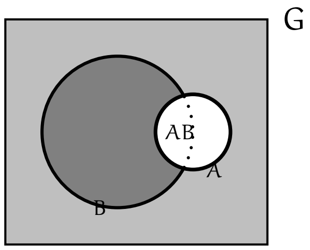
Račune z dogodki, ki smo jih uporabili v posameznem primeru, ponazorimo z Vennovimi diagrami:



$B\,\overline{A} = B$



$B\,\overline{A} = B \setminus A$



$B\,\overline{A} = B \setminus (AB)$

■

Zgled 12: Spodnja tabela prikazuje verjetnosti, da ima slučajno izbrana oseba v Združenih državah (ZDA) ustrezno krvno skupino:

O	A	B	AB
0.43	0.41	0.12	x

1. **Izračunaj število x.**
2. **Jan ima krvno skupino B. Kolikšna je verjetnost, da bi slučajno izbrani prebivalec Združenih držav lahko podaril Janu svojo kri? (Krvna skupina B lahko prejme le kri svoje skupine (B) ali pa kri skupine O)**

Če označimo z O, A, B in AB dogodke, da ima slučajno izbran prebivalec ustrezno krvno skupino, zapisani dogodki sestavljajo popoln sistem dogodkov (so paroma nezdružljivi, njihova vsota pa je gotov dogodek). Zato je $P(O)+P(A)+P(B)+P(AB)=1$ in tako $x = 1-(0.43+0.41+0.12) = 0.04$

Dogodek, da izberemo Janu ustreznega darovalca, je vsota dogodkov $B+O$. Ker sta B in O nezdružljiva dogodka, je $P(B+O) = P(B)+P(O) = 0.12+0.43 = 0.55$ ■

4 Klasična definicija verjetnosti

Preselimo se malo v zgodovino, in sicer v Francijo, v Pariz okoli leta 1650. Pariz je bil tiste čase zelo živahno mesto, v katerem so svoje mesto našle tudi igre na srečo, med njimi tudi igre s kocko.

V tistem času je v Parizu "kockal" tudi flamski plemič de Meret. V velikem številu iger je opazil, da se šestica pri metu ene kocke pojavi približno na vsakih šest metov, kar danes pomeni, da šestica pade z verjetnostjo $\frac{1}{6}$, pri metu dveh kock pa se pojavita dve šestici z verjetnostjo $\frac{1}{36}$. Za zgodovino verjetnostnega računa sta pomembni dve njegovi stavi:

1. V prvi je stavil, da bo pri metu ene igralne kocke v štirih zaporednih poskusih vsaj enkrat zadel šestico,

2. v drugi igri pa je stavil, da bo pri 24 zaporednih metih dveh igralnih kock vsaj enkrat zadel dvojno šestico.

Pri stavah je svoje možnosti utemeljil takole:

1. V prvi je sklepal, da se ena šestica pojavi na vsakih šest metov, zato se bo ena šestica pri štirih metih pojavila z verjetnostjo $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, torej v dveh poskusih od treh stavo dobi,

2. v drugi igri pa je sklepal, da je pri enem metu dveh kock verjetnost za dve šestici $\frac{1}{36}$, pri 24 metih pa bo potem verjetnost za dve šestici $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$, torej se tudi ta stava izplača.

Toda pri drugi stavi je imel izgubo. Zato je za pojasnilo prosil svojega prijatelja Mersena, ta pa naprej Blaisa Pascala in Pierra de Fermata, znana matematika. Njuni razmišljanji in ugotovitve so privedle do rojstva nove matematične discipline, verjetnostnega računa.

Preden nadaljujemo dodajmo, da sta oba de Meretova izračuna napačna. Kako sta sklepala Pascal in Fermat? Vpeljala sta osnovne možnosti poskusa, izide, kar dandanes imenujemo prostor elementarnih dogodkov. Privzela sta, da so pri poštenih kockah vsi elementarni dogodki enako verjetni. In prav to dejstvo privzamemo za definicijo v klasični teoriji verjetnosti:

klasična definicija verjetnosti

Vsi elementarni dogodki danega poskusa so enako verjetni.

Nadaljujmo s še malo zgodovine. Leta 1713 je bilo posmrtno izdano delo švicarskega matematika Jakoba Bernoullija z naslovom Ars Conjectandi (O umetnosti domnevanja), v katerem je dokazal, da sta empirična in klasična definicija verjetnosti enakovredni. Sto let kasneje, leta 1812 pa je izšlo klasično delo teorije verjetnosti, ki ga je spisal francoski matematik Pierre Simon Laplace in mu dodelil naslov Theorie Analytique des Probabilities (Analitična teorija verjetnosti). V njej se je lotil osnovnih zakonitosti verjetnost z diferencialnim računom.

Več kot sto let so verjetnost poučevali po Laplaceovi metodi, šele 1933 leta je ruski matematik Andrej Kolmogorov v svojem delu Temelji teorije verjetnosti (izdana je bila v nemščini) postavil aksiomatsko teorijo verjetnosti, kjer slučajni dogodki tvorijo nek abstraktni prostor množic z določenimi lastnostmi, na tem prostoru pa je definirana verjetnostna funkcija, ki vsakemu dogodku iz prostora priredi natanko določeno realno število iz intervala $[0,1]$.
Vrnimo se spet k klasični definiciji verjetnosti. Ker je enakovredna statistični definiciji, veljajo v njej enaka pravila za računanje z verjetnostmi. V nadaljevanju se bomo ukvarjali le s poskusi, kjer je elementarnih končno mnogo, recimo, da so vsi elementarni dogodki: e_1, e_2, ..., e_n, izbrani dogodek A pa naj bo sestavljen iz m elementarnih dogodkov: e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_m}, torej je $A = e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_m}$. Ker so vsi elementarni dogodki po klasični definiciji enako verjetni, označimo verjetnost enega s p, torej $p = P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n)$. Elementarni dogodki sestavljajo popoln sistem, zato je:

$$P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1 \Rightarrow n \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Verjetnost izbranega dogodka A je potem:

$$P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \ldots + P(e_{i_m}) = m \cdot p = \frac{m}{n}$$

Tako smo izpeljali osnovno formulo klasične definicije verjetnosti dogodka:

izračun verjetnosti

Verjetnost dogodka je razmerje med številom za dogodek ugodnih elementarnih dogodkov in številom vseh elementarnih dogodkov, torej:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{št. za A ugodnih elementarnih dogodkov}}{\text{št. vseh elementarnih dogodkov poskusa}}}$$

Pri računanju verjetnosti dogodkov s klasično definicijo bomo obilno koristili znanja, ki smo jih pridobili pri kombinatoriki. Običajno najprej s kombinatoričnimi orodji izračunamo število **vseh** elementarnih dogodkov (pravimo tudi, število **vseh možnosti**), ki spremljajo poskus ($= n$), potem pa še število elementarnih dogodkov, ki so **ugodni** (pravimo tudi, število **ugodnih možnosti**) zato, da se dogodek, katerega verjetnost računamo, zgodi ($= m$).

Zgled 13: **Naj bo poskus metanje ene igralne kocke in izid število pik, ki se pojavijo na zgornji ploskvi. Izračunaj verjetnosti naslednjih dogodkov:**

A $=\{$ **na kocki pade sodo število pik**$\}$.

B $=\{$ **padlo je več kot 2 piki** $\}$.

C $=\{$ **padli sta vsaj dve piki** $\}$.

D $=\{$ **v štirih zaporednih metih kocke pade vsaj ena šestica** $\}$.

Poskus spremlja 6 elementarnih dogodkov, torej je $n = 6$. Za dogodek A so ugodni trije (pade 2, 4 ali 6), zato je $m = m(A) = 3$ (z $m(A)$ smo poudarili, da je to število ugodnih možnosti za dogodek A) in tako $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$. Izračunano verjetnost zapišemo bodisi z okrajšanim ulomkom, bodisi z na zahtevano število mest zaokroženim decimalnim število, bodisi v obliki procenta.

Za dogodek B so ugodne štiri možnosti (pade 3, 4, 5 ali 6 pik), zato je $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

V primeru dogodka C je $m = 5$ (pade 2, 3, 4, 5, 6 pik), zato je $P(C) = \frac{5}{6} \doteq 0.83$

Pri štirih metih kocke prostor elementarnih dogodkov izračunamo z osnovnim izrekom kombinatorike. Privzamemo, da izidi naslednjega meta niso odvisni od prednodnih izidov. Potem je vseh elementarnih dogodkov $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$, torej je $n = 1296$. Pri računu za število ugodnih elementarnih dogodkov (m) moramo upoštevati možnosti, da padejo ena, dve, tri ali štiri šestice. Zato raje izračunamo verjetnost nasprotnega dogodka $\overline{D}$ in nato uporabimo pravilo za računanje verjetnosti nasprotnega dogodka: $P(D) = 1 - P(\overline{D})$. Nasprotni dogodek D pomeni, da ne pade niti ena šestica v štirih metih, torej imamo v vsakem metu 5 ugodnih možnosti. Zato je $m = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Tako je $P(\overline{D}) = \frac{m}{n} = \frac{625}{1296}$ in zato $P(D) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \doteq 0.518 \doteq 52\%$.

Pomni: Negacija ali nasprotje besedne zveze "vsaj en (vsaj eden)" je beseda "noben (nobeden)". Zato pri računanju dogodkov, ki imajo v svojem opisu "vsaj en" ali "vsaj eden", raje najprej izračunamo verjetnost nasprotnega dogodka in potem uporabimo pravilo $P(X) = 1 - P(\overline{X})$, kjer smo z X in $\overline{X}$ označili dogodek in njemu nasprotni dogodek.

Podoben način lahko uporabimo tudi pri dogodkih, ki vsebujejo v opisu besedno zvezo "vsaj dva" ali "vsaj dvakrat". Njeno nasprotje je "unija" besedic "noben (nobeden)" ali "en (eden)".

Računanje verjetnosti dogodka D je dejanjsko odgovor na prvo de Meretovo vprašanje.

Če sprejmemo dogovor, da je stava dobra, če več kot 50% stav dobimo, je de Meretova prva stava dobra, saj je jih od 100 dobimo približno 52. ■

Zgled 14: Naj bo poskus met dveh igralnih kock (če nam je laže recimo, da je ena rdeča, druga modra) in izid število pik, ki se pojavi na zgornjih ploskvah obeh kock. Izračunaj verjetnosti naslednjih dogodkov:

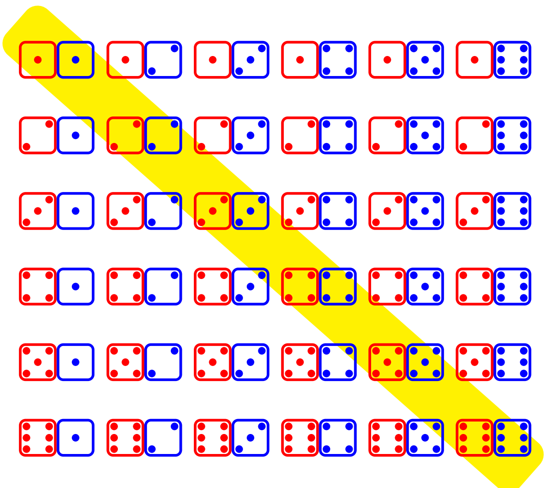
A $=\{$ **na obeh kockah je enako število pik**$\}$.

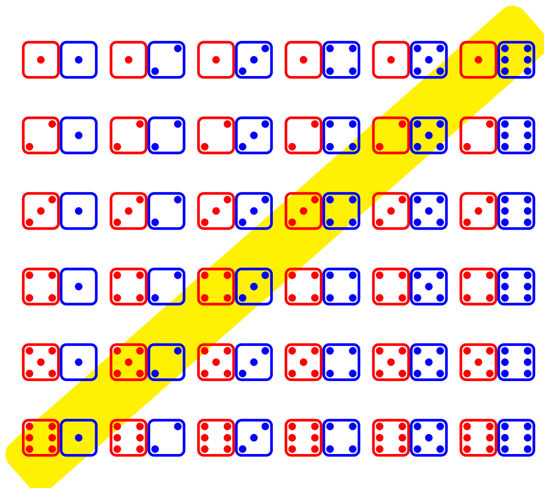
B $=\{$ **vsota pik na kockah je 7**$\}$.

C $=\{$ **vsota pik na kockah je vsaj 8**$\}$.

D $=\{$ **v 24 metih dveh kock pade vsaj enakrat na obeh kockah šestica**$\}$.

Na naslednji sliki je prikazan prostor elementarnih dogodkov pri metu dveh kock in označeni elementarni dogodki, ki so ugodni za dogodek A (leva slika) in dogodek B (desna slika)

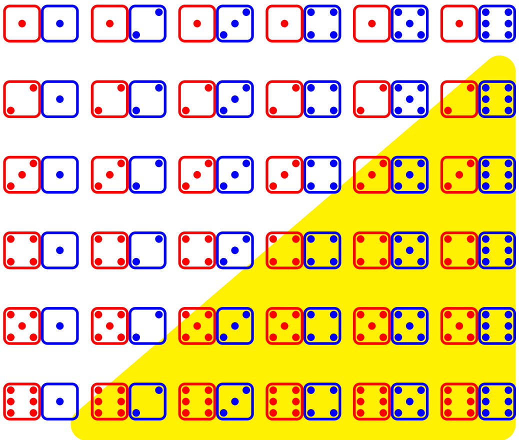




Slika 11: V prostoru el. dogodkov meta dveh kock označeni ugodni dogodki za dogodka A in B

Število vseh možnosti (n) pri metu dveh kock je $6 \cdot 6 = 36$, za A in prav tako za B ugodnih, pa je 6 možnosti, torej je $m = 6$. Zato je $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ in $P(B) = \frac{1}{6}$.

Tudi za dogodek C si skiciramo prostor elementarnih dogodkov in opazimo, da za C ugodni elementarni dogodki sestavljajo spodnji desni trikotnik v kvadratni tabeli vseh elementarnih dogodkov. Zato je $n = 36$ in $n = 15$ ter $P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \doteq 0.417$.

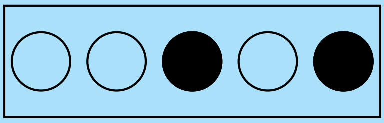


Slika 12: V prostoru el. dogodkov meta dveh kock označeni ugodni dogodki za dogodka C

V primeru računanja verjetnosti dogodka D izračunamo raje verjetnost nasprotnega dogodka: $\overline{D} = \{$ v 24 metih dveh kock niti enkrat ne pade na obeh kockah šestica$\}$. Število vseh in ugodnih možnosti izračunamo z osnovnim izrekom kombintorike. Pri vsakem metu obeh kock imamo $6 \cdot 6 = 36$ možnih izbir, v 24 ponovitvah imamo torej $n = 36^{24} \doteq 2.25 \cdot 10^{37}$ možnosti. Da v istem metu na obeh kockah padeta šestici je elementarni dogodek, zato je za nasprotni dogodek v posameznem poskusu možnih 35 elementarnih dogodkov, v 24 ponovitvah je zato $m = 35^{24} \doteq 1,14 \cdot 10^{37}$. Zato je $P(\overline{D}) \doteq 0,509$ in tako $P(D) = 1 - P(\overline{D}) \doteq 0.491$.

Izračunana verjetnost dogodka D je pravzaprav rešitev druge de Meretovega vprašanja. Njegova stava ima verjetnost okoli 49%, zato ni dobra. De Meretov račun v drugem njegovem vprašanju ni bil pravilen. ■

Zgled 15: Na biatlonskem tekmovanju streljajo v tarčo, ki ima pet belih krogov. Če tekmovalec zadene krog v tarči, se barva kroga spremeni v črno. Nekaj tekmovalcev je zadelo v tarči dva kroga od petih, in sicer vsak različno kombinacijo. Primer take tarče je prikazan na spodnji sliki:



Med vsemi opisanimi tarčami, torej takimi, kjer sta bila zadeta dva kroga, izberemo eno. Izračunaj verjetnost dogodka, da smo izbrali tarčo na sliki.

Število vseh možnih tarč z dvema zadetima krogoma je $\binom{5}{2} = 10$, za naš dogodek ugodna pa je ena sama tarča, tista na sliki. Zato je iskana verjetnost $\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$.

Zapisano nalogo so reševali na pisnem delu poklicne mature iz matematike. Veliko učenencev je nalogo napačno reševalo takole: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $m = \binom{5}{2} = 10$ in $p = \frac{10}{32} = \frac{5}{32}$. Kje je napaka? Predvsem v branju besedila naloge. Izbiramo namreč **le** med tarčami, ki so bile dvakrat zadete, ne med vsemi možnimi tarčami. Kaj si naj torej zapomnimo iz zgleda? Predvsem to, da je treba nalogo dobro prebrati, če je potrebno tudi večkrat.

Zgled 16: **Iz črk besede LOGARITEM naključno izberemo tri različne črke. Izračunaj verjetnost dogodka A, da so vse tri izbrane črke soglasniki, in verjetnost dogodka B, da je vsaj ena izbrana črka soglasnik.**

Število gradnikov za izbiranje je 9, izbiramo tri. Samoglasniki (A, E, I, O) so štirje, soglasnikov je 5. Izbiramo lahko na dva načina:

1. Črke izbiramo eno za drugo in jih postavimo v vrsto (variacije),
2. Črke izbiramo tako, da je vseeno katero smo izbrali prvo, katero drugo in katero tretjo (kombinacije).

Če poskus opravimo na prvi način, je vseh možnih izbir (elementarnih dogodkov) $n = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, za dogodek A ugodnih izbir pa je $m = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Zato je $P(A) = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{1} \cdot \cancel{3}^{1}}{\cancel{9}_{3} \cdot \cancel{8}_{2} \cdot 7} = \frac{5}{42}$.

Izračunajmo verjetnost dogodka A še z drugim načinom. V tem primeru je $n = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ in $m = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$. Razmerje $\frac{m}{n}$, ki je iskana verjetnost, pa je enako izračunu na prvi način: $\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{84}_{42}} = \frac{5}{42}$.

Kot je v navadi pri besedni zvezi "vsaj en" namesto verjetnosti dogodka B, izračunamo najprej verjetnost nasprotnega dogodka $\overline{B} = \{$ med izbranimi tremi črkami ni soglasnika $\}$. Vseh možnih izbir je enako kot pri dogodku A, torej je $n = 504$ v primeru izbiranja na prvi način in $n = 60$ v drugem načinu izbiranja. Ker med izbranimi črkami ni soglasnika, je ugodnih izbir za dogodek $\overline{B}$ v prvem načinu izbiranja $m(\overline{B}) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (sami samoglasniki), v drugem načinu pa je $m(\overline{B}) = \binom{4}{3} = 4$. V obeh primerih pa je $P(\overline{B}) = \frac{24}{504} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$. Zato je $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{20}{21}$. ■

Pomni: Število ugodnih in vseh elementarnih dogodkov lahko računamo z različnimi kombinatoričnimi orodji, toda pri tem moramo biti dosledni, da število vseh izbir in ugodnih izbir izračunamo na enak način.

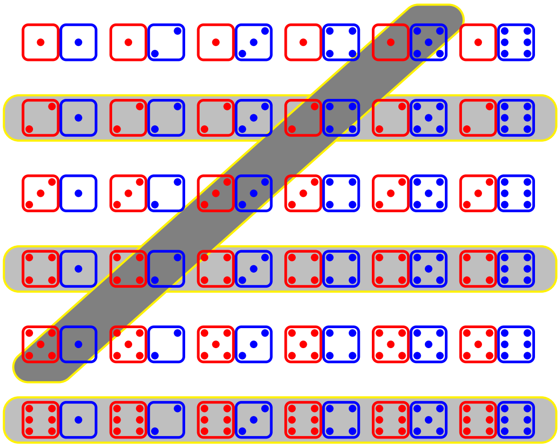
5 Pogojna verjetnost*

Začnimo z zgledom:

Zgled 17: **Igralno kocko vržemo dvakrat. Izračunaj verjetnost dogodka A, da je vsota pik na kockah enaka 6, če**

1. **ni dodatnih pogojev.**
2. **v prvem metu kocke je na kocki padlo sodo število pik.**

Vseh elementarnih dogodkov je 36, ugodnih je pet: $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ in $(5,1)$. Na spodnji sliki so označeni s temnejšo barvo. Zato je verjetnost dogodka A enaka $P(A) = \dfrac{5}{36}$.



Če je padlo v prvem metu sodo število pik, se prostor elementarnih dogodkov skrči na 18 dogodkov, ki so na gornji sliki obarvani svetlejše. V skrčenem prostoru sta za dogodek A ugodna 2 elementarna dogodka: $(2,4)$ in $(4,2)$. Zato je v tem primeru verjetnost dogodka A enaka $P(A) = \dfrac{2}{18} = \dfrac{1}{9}$.

Verjetnost dogodka se je v zgledu spremenila, če smo postavili dodaten pogoj, v našem primeru dogodek B, da je v prvem metu kocke padlo sodo pik. Tudi v splošnem primeru se lahko zgodi, da nek dogodek vpliva na verjetnost drugega dogodka. Recimo, da računamo verjetnost dogodka A, vemo pa, da se je zgodil dogodek B. Nastali dogodek označimo $A|B$, dogodek B imenujemo **pogoj**, verjetnost dogodka $P(A|B)$ pa **pogojna** verjetnost. V zadnjem zgledu je $P(A) = \frac{5}{36}$, pri pogoju B pa je $P(A|B) = \frac{1}{9}$.

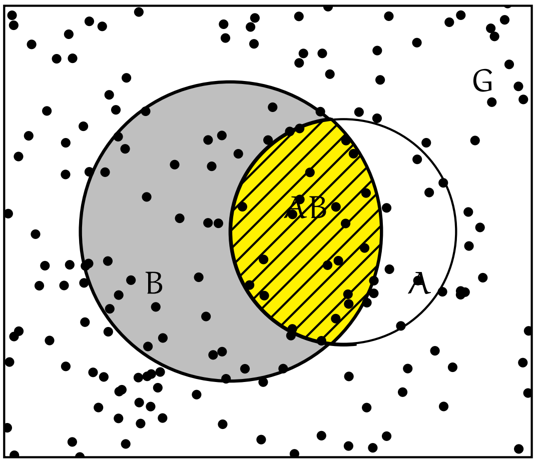
Zgled 18: **V škatli se nahaja 5 belih in 4 črne krogle. Iz škatle slučajno izvlečemo (pravimo tudi "na slepo") dve krogli tako, da prvo izvlečeno kroglo vrnemo v škatlo potem, ko smo zapisali njeno barvo. Izračunaj verjetnost dogodka A, da je bila druga izvlečena krogla bele barve, če**

1. **ni dodatnih pogojev.**
2. **je bila prva izvlečena krogla bela (dogodek B).**

V prvem primeru je o vseh možnosti enako $n = 9 \cdot 9 = 81$, ugodnih pa je $m = 9 \cdot 5 = 45$ (prvo izvlečemo katerokoli med 9 kroglami, jo vrnemo, druga izvlečena je bela). Zato je $P(A) = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$.

V drugem primeru je $n = 5 \cdot 9 = 45$ (prva izvlečena je bila bela, vrnejena, druga izvlečena je bila katerakoli). Ugodnih možnosti v drugem primeru je bilo $n = 5 \cdot 5 = 25$ (prva in druga beli). Zato je $P(A|B) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

V zgledih smo opazili, da pogoj včasih vpliva na verjetnost dogodka, včasih ne. Kako pa izračunamo pogojno verjetnost? Oglejmo si naslednjo sliko:



Verjetnost dogodka A je razmerje med za dogodek A ugodnimi elementarnimi dogodki ($= m(A)$) in vsemi elementarnimi dogodki poskusa ($= n$). Če vemo, da se je dogodek B tega poskusa zgodil, vlogo vseh elementarnih dogodkov prevzemejo elementarni dogodki, ki so ugodni za dogodek B, torej $m(B)$, za dogodek A pa so v tem primeru ugodni le tisti elementarni dogodki, ki so hkrati ugodni tudi za dogodek B, torej $m(AB)$. Zato je

$$P(A|B) = \frac{m(AB)}{m(B)} = \frac{\frac{m(AB)}{n}}{\frac{m(B)}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

V zadnji izpeljavi smo ustrezni ulomek razširili s faktorjem $\frac{1}{n}$, kjer je n število vseh elementarnih dogodkov poskusa. Tako smo izpeljali osnovno formulo za izračun pogojne verjetnosti:

pogojna verjetnost

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

Pogostoje uporabna tudi tale oblika formule za pogojno verjetnost (verjetnost produkta):

$$\boxed{P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

Da bi se izognili računskim problemom, za pogoj B zahtevamo, da njegova verjetnost ni enaka 0, torej $P(B) \neq 0$.

Zgled 19: Naj bo $P(A|B) = 0.8$, $P(B|A) = 0.6$ in $P(B) = \frac{3}{7}$. Izračunaj $P(A)$, $P(\overline{B}|A)$ in $P(A|\overline{B})$.

Ker je $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, je $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{35}$. Ker je $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, je $P(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B|A)} = \dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{6}{10}} = \dfrac{4}{7}$.

Spomnimo se, da pri pogoju $X \subset Y$, velja formula $P(Y \setminus X) = P(Y) - P(X)$. Ker je $AB \subset A$, je $P(\overline{B}A) = P(A \setminus B) = P(A \setminus AB) = P(A) - P(AB) = \dfrac{4}{7} - \dfrac{12}{35} = \dfrac{8}{35}$ in je zato

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B}A)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Še zadnji račun $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{\frac{8}{35}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{2}{5}$. ■

Zgled 20: **Na vzorcu 1000 ljudi so proučevali pojav barvne slepote (barvno slep človek ne loči ene ali več barv) in podatke razvrstili v naslednjo tabelo:**

	Moški	Ženske	Skupaj
Barve ne loči	40	2	42
Barve loči	470	488	958
Skupaj	510	490	1000

Izračunaj verjetnost dogodka, da je slučajno izbrana oseba barvno slepa, če

1. **ni dodatnih pogojev.**
2. **izbrana oseba je ženskega spola.**

Označimo z A= { izbrana oseba je barvno slepa } in B = { izbrana je ženska }. Potem je AB= { izbrana oseba je barvno slepa in ženska } in $P(A) = \frac{42}{1000} = 0.042$, $P(B) = \frac{490}{1000} = 0.49$ in $P(AB) = \frac{2}{1000} = 0.002$. Torej je "brezpogojna verjetnost" $P(A) = 0.0042$, pogojna verjetnost pa:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{1000}}{\frac{490}{1000}} = \frac{2}{490} \doteq 0.0041 \qquad \blacksquare$$

V zadnjem zgledu smo opazili, da je pogoj vplival na verjetnost dogodka A, kajti $P(A) \neq P(A|B)$. V takem primeru pravimo, da sta dogodka A in B odvisna, v nasprotnem primeru, ko je $P(A) = P(A|B)$ pa pravimo, da sta dogodka neodvisna. Torej:

odvisnost neodvisnost dogodkov

Pravimo, da sta mogoča dogodka A in B:

- **neodvisna**, če je $P(A|B) = P(A)$,
- **odvisna**, če je $P(A|B) \neq P(A)$.

Če sta dogodka A in B neodvisna je torej $P(A|B) = P(A)$, zato formula $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$ za verjetnost produkta dogodkov postane formula $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Ker je nastala formula zelo uporabna, jo uokvirimo:

$$\boxed{\text{Če sta dogodka neodvisna, velja } P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

Velja tudi obratno: Če velja $P(AB) = P(A)P(B)$, sta dogodka neodvisna, kar uvidimo, če primerjamo začetek in konec naslednje implikacije ($\Rightarrow$):

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \underbrace{\Longrightarrow}_{P(AB)=P(A)P(B)} P(A|B) = \frac{P(A)\,\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

Dva dogodka A, B smo proglasili za neodvisna, če je $P(AB) = P(A)P(B)$. Neodvisnost posplošimo tudi na več dogodkov, recimo za tri dogodke A, B in C pravimo, da so neodvisni, če velja $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. Naslednji primer pokaže, da medsebojna neodvisnost poljubnih dveh dogodkov še ne pomeni, da so dogodki medseboj neodvisni.

Zgled 21: Igralni tetraeder je pravilna tristrana piramida, ki ima eno ploskev obarvano rdeče, drugo modro, tretjo zeleno, na četrti pa so enako porazdeljene vse tri omenjene barve. Tetraeder vržemo in zavrtimo in po opravljenem gibanju pogledamo barvo na spodnji ploskvi. Označimo dogodke:

R $=\{$ **na spodnji ploskvi je tudi rdeča barva** $\}$.

M $=\{$ **na spodnji ploskvi je tudi modra barva** $\}$.

Z $=\{$ **na spodnji ploskvi je tudi zelena barva** $\}$.

Ugotovi, ali so dogodki R, M **in** Z

1. **paroma neodvisni?**
2. **popolnoma neodvisni?**

Očitno je $P(R) = P(M) = P(Z) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(RM) = P(RZ) = P(MZ) = \frac{1}{4}$ in $P(RMZ) = \frac{1}{4}$. Ker je $P(RM) = \frac{1}{4}$ in $P(R)P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, sta dogodka R in M neodvisna. Podobno ugotovimo tudi za para R, Z in M, Z.

Ker je $P(R)P(M)P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ in $P(RMZ) = \frac{1}{4}$, so dogodki R, M in Z medseboj odvisni in to kljub temu, da so paroma pa neodvisni. ■

Če naj uporabimo formulo za verjetnost produkta neodvisnih dogodkov, moramo najprej premisliti o neodvisnosti. Pri tem v veliki meri uporabljamo "zdravo pamet". Recimo:

- Poskus: met dveh kock; izid na prvi kocki je **neodvisen** od izida na drugi kocki.
- Poskus: met treh kovancev; izidi na posameznih kovancih so **neodvisni** od izida na drugih.
- Poskus: vlečenje ene kroglice iz posode, kateri so kroglice različnih barv, kroglico **vrnemo** v posodo. Izid dogodka v petem poskusu je **neodvisen** od izida v prvem poskusu.
- Poskus: vlečenje ene kroglice iz posode, kateri so kroglice različnih barv, kroglico **ne vrnemo** v posodo. Izid dogodka v petem poskusu je **odvisen** od izidov v prejšnjih poskusih.
- Poskus: metanje prostih metov pri košarki; izid v 10. metu je **neodvisen** od izida v kateremkoli prejšnjem metu.

Zgled 22: **V škatli je 7 rdečih in 14 modrih kroglic. Štirikrat zapored izvlečemo po eno kroglico. Izračunaj verjetnost dogodka, da bodo vse štiri izbrane krogle rdeče barve, če**

1. **kroglice vračamo v škatlo.**
2. **kroglic ne vračamo v škatlo.**

V primeru, ko kroglice vračamo v škatlo, so izidi v posameznem poskusu neodvisni, zato je

$$p = \frac{7}{21} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{7}{21} = \frac{1}{81}$$

V primeru vračanja krogel pa izidi v prejšnjih poskusih vplivajo na izid v trenutnem poskusu; verjetnost dogodka je v tem primeru:

$$p = \frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{1}{171} \qquad ■$$