2018-19

INTEGRAL

(Interno gradivo)

Sestavil Ivo.K.

2018-19

Kazalo

1 Primitivna funkcija 2

2 Tabela integralov in osnovna pravila 6

3 Metoda zamenjave - substitucija 12

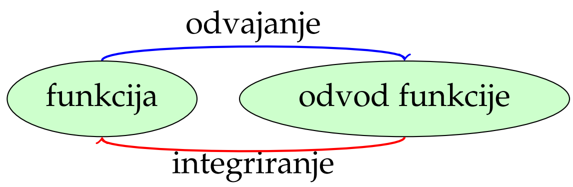
4 Metoda per-partes 15

5 Integral racionalne funkcije 18

NEDOLOČENI INTEGRAL

Vsaki računski operaciji v matematiki poiščemo ustrezno obratno, inverzno operacijo. Tako je odštevanje obratna operacija seštevanja, deljenje obratna operacija množenja, korenjenje obratna operacija potenciranja in tako naprej. V prejšnjem poglavju smo se naučili poiskati odvod dane funkcije, torej smo se naučili operacije odvajanja. V naslednjem poglavju se bomo naučili obratne operacije odvajanja, ki jo bomo imenovali integriranje. Osnovna naloga naslednjega poglavja bo:

Dani funkciji $y = f(x)$ poiščimo tako funkcijo, da bo **njen odvod enak dani funkciji**; drugače zapisano, iščemo funkcijo $y = F(x)$, da bo $F'(x) = f(x)$.



Taka naloga je v znanostih, katerih glavno orodje je matematika, kar pogosta. Recimo, v fiziki je hitrost sprememba poti po času (tj. hitrost je odvod poti po času) in pogosto se pojavi problem, kako iz dane časovne odvisnosti hitrosti poiskati časovno odvisnost poti.

1 Primitivna funkcija

Naj bo dana funkcija f, definirana na intervalu (a, b). Vsako funkcijo F, definirano na intervalu (a, b), za katero velja $F^{'}(x) = f(x)$ (ali zapisano z diferencialom: $dF(x) = f(x)dx$), imenujemo **primitivna** funkcija funkcije f. Drugače povedano: Ko iščemo primitivno funkcijo dane funkcije, moramo poiskati funkcijo, katere odvod je enak dani funkciji.

Zgled 1: Dopolni naslednjo tabelo:

funkcija	primitivna funkcija
1	?
x	?
$3x^2$	?
x^{10}	?
$\sin x$	?
$\cos 2x$	?
e^x	?

Odvod katere funkcije je enak 1? V tabeli odvodov najdemo, da je to funkcija x. Prav tako je odvod funkcije $x + 3$ enak številu 1. Tudi $(x + C)' = 1$, če za C izberemo poljubno realno število.

Tudi v primeru drugih funkcij iz tabele poiščemo primitivno funkcijo v tabeli odvodov. Z malo napora dobimo:

funkcija	primitivna funkcija
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$3x^2$	x^3
x^{10}	$\frac{x^{10}}{10}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos 2x$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
e^x	e^x

■

V zgornjem zgledu smo opazili, da dani funkciji ne ustreza ena sama primitivna funkcija. Če smo recimo dani funkciji f našli eno primitivno funkcijo $F(x)$, potem je njena primitivna funkcija tudi vsaka funkcija $G(x) = F(x) + C$, kjer je C poljubna realna konstanta. Res: $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$. Na tak način lahko bogatimo množico vseh primitivnih funkcij dane funkcije: eno uganemo, nove pa dobimo tako, da tej prištejemo poljubno realno konstanto. Pokažimo, z dvema trditvama, da na tak način dobimo vse primitivne funkcije dane funkcije f. Prvo trditev bomo navedli brez dokaza:

Če je odvod funkcije f na intervalu (a, b) enak 0, je na tem intervalu funkcija f konstantna funkcija, tj. $f(x) = C$, $C = \text{const.}$, $x \in (a, b)$.

Druga trditev je

Če ima funkcija f, definirana na intervalu (a, b), primitivno funkcijo F, je družina funkcij $\{F(x) + C\ ;\ C \in \mathbb{R}\}$ množica vseh primitivnih funkcij funkcije f.

Drugo trditev utemeljimo takole:

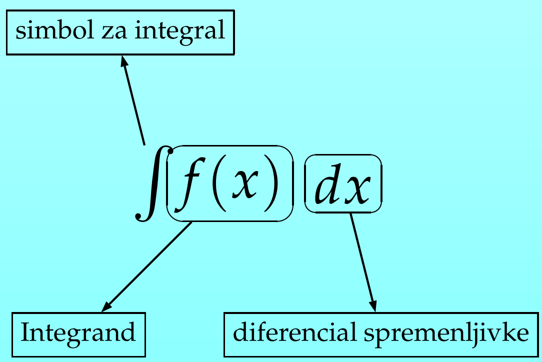
Če je $G(x)$ kaka druga primitivna funkcija funkcije f, je odvod funkcije $R(x) = F(x) - G(x)$ enak 0, saj je $R'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Zaradi prve trditve je tedaj $R(x) = C$, kjer je C neka realna konstanta. Zato je $G(x) = F(x) + C$.

Povzemimo:

- Primitivna funkcija dane funkcije f je vsaka taka funkcija $F(x)$, da je $F'(x) = f(x)$.
- Vse primitivne funkcije dane funkcije f dobimo tako, da eno uganemo, vse ostale pa dobimo, če tej prištejemo neko realno konstanto.

Vzemimo funkcijo $y = f(x)$ in združimo vse njene primitivne funkcije. Potem je:

Nedoločeni integral funkcije f je družina vseh njenih primitivnih funkcij. Nedoločeni integral funkcije f označimo z oznako $\int f(x)\, dx$.



Pojasnimo nekaj oznak v zadnjem zapisu:

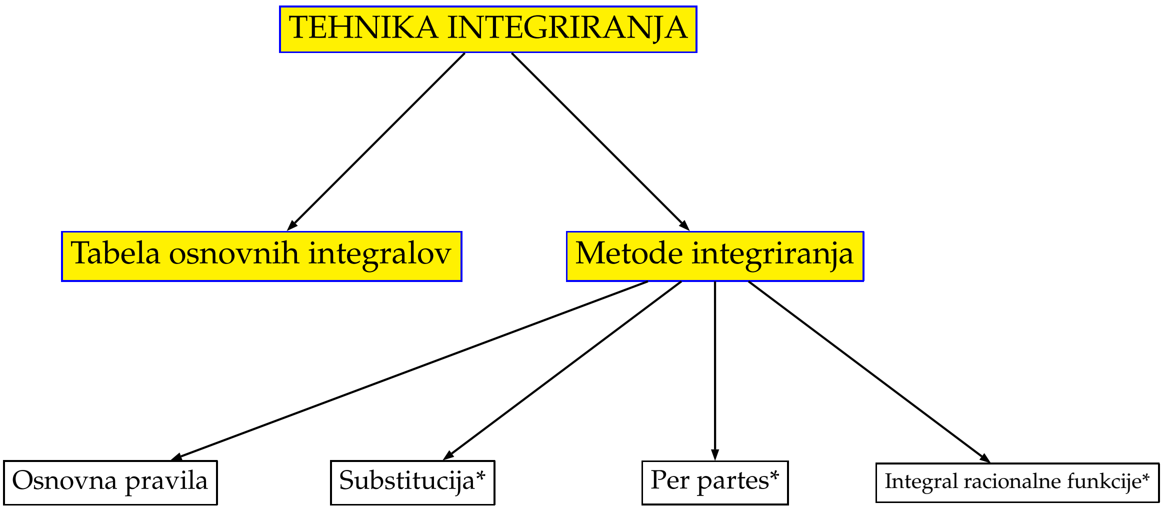
- Če je F ena od primitivnih funkcij funkcije f, bi strogo vzeto morali pisati $\int f(x)\ dx = \{F(x) + C\ ; C \in \mathbb{R}\}$. Običajno pa to zapišemo kar: $\int f(x)\ dx = F(x) + C$.
- Nedoločeni integral $\int f(x)\ dx$ bi lahko krajše zapisali kar z $\int f$, vendar raje pišemo prvi zapis z diferencialom dx, da vemo, na katero spremenljivko naj bo funkcija odvajana. Drugače bi lahko bil npr. nedoločeni integral funkcije $f = 2x + 3a^2$ enak $x^2 + 3a^2 + C$, če je odvajanje mišljeno po spremenljivki x, če pa je odvajanje mišljeno po spremenljivki a je integral enak $2x + a^3 + C$; torej je $\int(2x + 3a^2)\,dx = x^2 + 3a^2x + C$ in $\int(2x + 3a^2)\,da = 2ax + a^3 + C$.
- Funkcijo f, katere primitivno funkcijo iščemo bomo imenovali integrand ali podintegralska funkcija, postopku iskanja bomo rekli integriranje, konstanti C pa integracijska konstanta.
- Znak $\int$ je vpeljal sotvorec diferencialnega računa (nauk o odvodu in integralu) W.G. Leibniz, verjetno pomeni raztegnjeno črko S, črka S pa naj bi označevala vsoto (summe).

V dosedaj zapisanem vidimo, da ima dana funkcija neskončno primitivnih funkcij, če ima eno. Kdaj pa funkcija sploh ima primitivno funkcijo ali drugače Kdaj ima funkcija nedoločeni integral? Vsaj za zvezne funkcije ne bo problemov, saj velja:

Če je funkcija f zvezna (njen graf ni "pretrgan"), obstaja njen nedoločeni integral $\int f(x)\ dx$.

Tehnike integriranja

Obratne (inverzne) matematične operacije so običajno zahtevnejše od ustrezne operacije. Tudi pri integriranju je tako. Za (skoraj) vsako nam znano funkcijo znamo poiskati odvod bodisi s tabelo ali pa z uporabo kakšnega od pravil odvajanja. Tudi tehnika integriranja bo sestavljena iz tabele in bolj ali manj zahtevnejših metod integriranja.



2 Tabela integralov in osnovna pravila

Tabela osnovnih integralov je le malce spremenjena tabela odvodov. Recimo, odvod funkcije $\sin x$ je funkcija $\cos x$, zato je $\int \cos\, dx = \sin x + c$, odvod funkcije $\tan x$ je $\frac{1}{\cos^2 x}$, zato je $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$. Ustavimo se pri $\int x^a\, dx$. Vemo, da je odvod potenčne funkcije potenčne funkcija, ki ima za eno manši eksponent ($(x^a)' = ax^{a-1}$). Zato mora imeti integral za eno večji eksponent ($= a+1$), če naj ima odvod eksponent a. Ker pri odvajanju še množimo z eksponentom ($= a+1$), dobimo $a+1$-krat prevelik rezultat, zato je $\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$. Toda v primeru $a = -1$ zadnji ulomek ne obstaja, zato moramo primer potence x^{-1} obravnavati ločeno.

funkcija	integral	funkcija	integral
1	$x+C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
x	$\frac{x^2}{2}+C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + C$

Pojasnilo dolgujemo za integral $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. Definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln|x|$ so vsa realna števila brez števila 0. Za pozitivne x je $f(x) = \ln x$ in kot že vemo $f'(x) = \frac{1}{x}$, če pa je $x < 0$, je $f(x) = \ln(-x)$. V tem primeru odvajamo funkcijo $f(x)$ z verižnim pravilom za posredno odvajanje. Za posredno funkcijo u izberimo $-x$, torej $u = -x$. Potem je $f(x) = \ln u$, $u' = -1$ in $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Tako smo ugotovili da je za pozitvne in negativne vrednosti x odvod funkcije $\ln|x|$ enak $\frac{1}{x}$, zato je res $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

Zgled 2: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int x^8\,dx$ **(b)** $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ **(c)** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

Vse tri funkcije lahko zapišemo s potenco in potem uporabimo tabelski integral $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$. V prvem primeru je $\int x^8\,dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} + C = \frac{x^9}{9} + C$, v drugem primeru imamo $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{x^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$, v zadnjem primeru pa je $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$.

Končne rezultate smo uredili v obliki začetnih podintegralskih funkcij, torej v obliki ulomkov in korenov, v samem računanju pa smo uporabili potenčni zapis izrazov. ■

Osnovna **pravila** so posledica definicije nedoločenega integrala in osnovnih pravil za odvajanje.
Ker sta odvajanje in integriranje obratni operaciji, veljata naslednji pravili:

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad \text{in} \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C}$$

Naslednje pravilo imenujemo **aditivnost** in je posledica pravila za odvod vsote ali razlike funkcij: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$:

aditivnost

$$\boxed{\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx}$$

Ker za poljubno število a velja: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$, velja za integral pravilo **homogenosti**:

homogenost

$$\boxed{\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx}$$

Uporabimo pravili na nekaj primerih.

Zgled 3: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\displaystyle\int \left(3x^2 - 6x + 1 - \frac{3}{x^2}\right)\ dx$

(c) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) \cdot \sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^2}{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int (2e^x - 3\sin x)\ dx$

Osnovna ideja računanja enostavnih integralov je prevedba podintegralske funkcije na take funkcije, ki nastopajo v tabeli osnovnih integralov (tabelski integrali). Preoblikovanja opravimo z osnovnimi pravili.

Začnimo s prvim primerom. Opazimo, da so členi podintegralske funkcije potence osnove x, tudi $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$:

$$\int \left(3x^2 - 6x + 1 - \frac{3}{x^2}\right)\ dx \underbrace{=}_{\text{aditivnost}} \int 3x^2\,dx - \int 6x\,dx + \int 1\,dx - \int 3x^{-2}\,dx =$$

$$\underbrace{=}_{\text{homogenost}} 3\int x^2\,dx - 6\int x\,dx + \int 1\,dx - 3\int x^{-2}\,dx \underbrace{=}_{\text{tabela}} 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + x - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \underline{x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{x} + C}$$

V končnem rezultatu smo tri konstante, ki nastopijo pri vsakem od izračunanih integralov, zamenjali z eno samo konstanto[1], kar bomo počenjali tudi v ostalih primerih.

V primeru (b) podintegralsko funkcijo $\frac{(1-x^2)^2}{x^2}$ razčlenimo v obliko:

$$\frac{(1-x^2)^2}{x^2} = \frac{1-2x^2+x^4}{x^2} = \frac{1}{x^2} - 2 + x^2 = x^{-2} - 2 + x^2$$

in jo po členih integriramo. Dobimo:

$$\int \frac{(1-x^2)^2}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx - 2\int dx + \int x^2\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} - 2x + \frac{x^3}{3} + C = \underline{-\frac{1}{x} - 2x + \frac{x^3}{3} + C}$$

V tretjem primeru podintegralsko funkcijo $\left(\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) \cdot \sqrt{x}$ zapišemo s potencami in jo razčlenimo:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} - 2x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{6}} - 2x^{\frac{3}{2}}$$

Razčlenjeno funkcijo integriramo:

$$\int \left(\sqrt[3]{x^2} - 2x\right) \cdot \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{7}{6}}\,dx - 2\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} - 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \underline{\frac{6x^2\sqrt[6]{x}}{13} - \frac{4x^2\sqrt{x}}{5} + C}$$

V primeru (d) uporabimo aditivnost in homgenost:

$$\int (2e^x - 3\sin x)\,dx = 2\int e^x\,dx - 3\int \sin x\,dx = 2e^x - 3(-\cos x) + C = \underline{2e^x + 3\cos x + C}$$

■

Zgled 4: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int e^x \sin y\,dx$ **(b)** $\int e^x \sin y\,dy$

Če v podintegralski funkciji nastopata dve ali več črk, v našem primeru x in y, moramo preveriti na katera med njimi je spremenljivka. To ugledamo v diferencialu, torej je v prvem integralu spremenljivka x, v drugem pa y. Črko, ki ni spremenljivka, razumemo kot konstanto; v prvem primeru je konstanta $\sin y$, v drugem e^x. Upoštevamo homogenost

[1] razmislek pove, da končna vsota poljubnih realnih števil opiše ravno vsa realna števila, zato je opisana zamenjava smiselna

in pgledamo tabelo integralov, da dobimo: $\int e^x \sin y\, dx = \sin y \int e^x\, dx = \underline{e^x \sin y + C}$ in $\int e^x \sin y\, dy = e^x \int \sin y\, dx = \underline{-e^x \cos y + C}$. ■

Izračunajmo odvod sestavljene funkcije $g(x) = \ln f(x)$. Ker je g sestavljena funkcija, odvajamo z verižnim pravilom:

$$g'(x) = (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ker integral povrne (rekonstruira) odvod, velja naslednje koristno pravilo:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C}$$

Zgled 5: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\, dx$ **(b)** $\int \frac{x}{x^2+3}\, dx$ **(c)** $\int \tan x\, dx$

V prvem primeru opazimo, da je odvod funkcije v imenovalcu ($= x^2 + x + 3$) enak funkciji v števcu ($= 2x + 1$), zato lahko uporabimo zapisano pravilo. Dobimo: $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\, dx = \ln|x^2+x+3| + C = \underline{\ln(x^2+x+3) + C}$. Bralec naj premisli, zakaj lahko opustimo absolutno vrednost v izračunanem izrazu.

V drugem primeru je odvod funkcije v imenovalcu enak $2x$, v števcu pa imamo le x. Zadrego rešimo z uporabo homogenosti:

$$\int \frac{x}{x^2+3}\, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \underline{\frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C}$$

V tretjem primeru zapišemo funkcijo $\tan x$ s funkcijama $\sin x$ in $\cos x$, nato pa sledimo vzorcu rešitve drugega primera:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -1 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \underline{-\ln|\cos x| + C}$$

■

Zgled 6: Zapiši enačbo funkcije $f(x)$, če je njen odvod enak funkciji $2x^3 - 3\sin x + 1$ in njen graf vsebuje točko $A(0, -1)$.

Funkcijo rekonstruiramo iz odvoda z integralom. Zato je

$$f(x) = \int (2x^3 - 3\sin x + 1)\,dx = 2\frac{x^4}{4} + 3\cos x - x + C = \frac{x^4}{2} + 3\cos x - x + C$$

Iz dobljene družine moramo izločiti tisto, katere graf vsebuje točko $A(0, -1)$. Zato je $-1 = \frac{0^4}{2} + 3\cos 0 - 0 + C$ in tako $C = -4$. Torej je $\underline{f(x) = \frac{x^4}{2} + 3\cos x - x - 4}$. ■

3 Metoda zamenjave - substitucija

Včasih je odvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ koristno zapisati z Leibnizovimi diferenciali:

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ ali } df = f'(x) \cdot dx}$$

Pri tem je dx **diferencial neodvisne spremenljivke**, df pa **diferencial funkcije**. Zadnja enačba pove, da je diferencial funkcije enak produktu odvoda funkcije in diferenciala neodvisne spremenljvke te funkcije. Enačba velja tudi v primeru drugih oznak spremenljivk. Če je, recimo $a = h(b)$ za funkcijo h, je $da = dh = h'(b)db$. V primeru enačbe $t = x^2 - 1$, je potem $dt = (x^2 - 1)'dx = 2xdx$.

Vzemimo, da integral $\int f(x)\, dx$ ne moremo ugnati z nobeno od dosedaj znanih metod. V takem primeru lahko poskusimo z uvedbo **nove spremenljivke**. Spremenljivko x izrazimo z novo spremenljivko, recimo t. Staro in novo spremnljivko na povezuje funkcija g, torej $x = g(t)$ potem je:

$$dx = dg = g'(t)dt \text{ in } \int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Na prvi pogled nova podintegralska funkcija $f(g(t))g'(t)$ izgleda bolj zapletena kot začetna funkcija $f(x)$, toda lahko se zgodi, da postane enostavnejša. Če nastali integral izračunamo, je le ta primitivna funkcija spremenljivke t, ki pa jo z inverzno funkcijo funkcije g zamenjamo s prvotno spremenljivko x. Povzemimo:

uvedba nove spremenljivk

Če želimo izračunati integral $\int f(x)\, dx$ z uvedbo (substitucijo, zamenjavo) nove spremenljivke, to storimo z naslednjimi koraki:

- Staro spremenljivko x izrazimo z novo spremenljivko t s primerno funkcijo: $x = g(t)$.
- Stari diferencial dx izrazimo z novim diferencialom tako, kot je to počel Leibniz: $dx = g'(t)dt$.
- Iskani integral zapišemo z novimi oznakami: $\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$
- Z novo spremenljivko t izraženi integral izračunamo in v izračunanem integralu novo spremenljivko nadomestimo s staro spremenljivko.

Opisano preizkusimo na nekaj primerih. Začnimo s "potenčnimi" funkcijami:

Zgled 7: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int (4x-2)^3\,dx$ **(b)** $\int 2x(x^2-1)^3\,dx$ **(c)** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-3x)^3}}$

V **prvem** primeru vpeljemo novo spremenljivko $t = 4x - 2$. Izrazimo staro spremenljivko z novo spremenljivko $x = \frac{t+2}{4}$. Potem je $dx = \left(\frac{t+2}{4}\right)' dt \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$.
Zato je

$$\int (4x-2)^3\,dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^3\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{16} + C = \underline{\frac{(4x-2)^4}{16} + C}$$

Diferencial dx stare spremenljivke bi lahko izračunali tudi takole:

$$t = 4x - 2 \Rightarrow dt = d(4x-2) \Rightarrow t'dt = (4x-2)'dx \Rightarrow 1\cdot dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

V **drugem** primeru zamenjamo izraz znotraj oklepaja z novo neznanko: $t = x^2 - 1$. Povežimo diferenciale:

$$t = x^2 - 1 \Rightarrow dt = d(x^2-1) \Rightarrow dt = (x^2-1)'dx \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

Potem je

$$\int 2x(x^2-1)^3\,dx = \int \cancel{2x}\cdot t^3 \cdot \frac{dt}{\cancel{2x}} = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \underline{\frac{(x^2-1)^4}{4} + C}$$

Komentarje k rešitvi **tretjega** primera naj postavi bralec:

$$t = 2 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-3x)^3}} = \int \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)dt}{\sqrt[4]{t^3}} = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = -\frac{4\sqrt[4]{2-3x}}{3} + C$$

■

Nadaljujmo z nekaterimi integrali transcendentnih funkcij (sin, cos, ln, exp):

Zgled 8: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int \sin(2x - \frac{\pi}{3})\,dx$

(c) $\int e^{3-2x}\,dx$

(b) $\int \sin x \cos^3 x\,dx$

(d) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

V **prvem** primeru vpeljemo novo spremenljivko $t = 2x - \frac{\pi}{3}$. Potem je $dt = 2dx$ ($\frac{\pi}{3}$) je konstanta, torej pri odvajanju izgine) in $dx = \frac{dt}{2}$. Zato je

$$\int \sin(2x - \frac{\pi}{3})\,dx = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = \underline{-\frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + C}$$

V **drugem** primeru uporabimo dejstvo, da je $(\cos x)' = -\sin x$ ali z diferenciali $d(\cos x) = -\sin x dx$. Izberimo za novo spremenljivko $t = \cos x$. Tedaj je $dt = -\sin x dx$ in $dx = -\frac{dt}{\sin x}$. Potem je:

$$\int \sin x \cos^3 x\,dx = \int \cancel{\sin x} \cdot t^3 \cdot \frac{-dt}{\cancel{\sin x}} = -\int t^3\,dt = -\frac{t^4}{4} + C = \underline{-\frac{\cos^4 x}{4} + C}$$

V **tretjem** primeru (c) vpeljemo novo neznanko, pa naj bo sedaj $y = 3 - 2x$. Tedaj je $dy = -2dx$ in $dx = -\frac{dy}{2}$. Potem je:

$$\int e^{3-2x}\,dx = \int e^y \cdot \left(-\frac{dy}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy = -\frac{1}{2}e^y + C = \underline{-\frac{1}{2}e^{3-2x} + C}$$

V zadnjem, četrtem primeru uporabimo dejstvo, da je $d \ln x = \frac{dx}{x}$. Zato vpeljemo novo neznanko, naj bo sedaj $z = \ln x$. Potem je $dz = \frac{dx}{x}$ in $dx = x \cdot dz$. Nove izraze vstavimo v integral in dobimo:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\cancel{x} \cdot dz}{\cancel{x} \cdot z} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \underline{\ln|\ln x| + C}$$

■

4 Metoda per-partes

Nekatere transcendentne funkcije ($\ln x, \arcsin x, \arctan x$) imajo odvode, ki so algebrske funkcije ($1/x, 1/\sqrt{1-x^2}, 1/(1+x^2)$), nekatere transcendentne funkcije ($\sin x, \cos x, e^x$) pa imajo odvode enake ali celo iste vrste ($\cos x, -\sin x, e^x$). Opisana dejstva izkoristimo pri integraciji **po delih**, latinsko **per partes**.

Vzemimo funkciji $u(x)$ in $v(x)$ ter zapišimo enačbo za odvod produkta funkcij $u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$ v diferencialni obliki:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow \frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \mid \cdot dx \Rightarrow d(uv) = (du) \cdot v + u \cdot dv$$

Zadnjo enačbo integriramo in upoštevamo, da je $\int da = a + C$. Dobimo:

$$\int d(uv) = \int (du) \cdot v + \int u \cdot dv \Rightarrow uv = \int vdu + \int udv$$

Zadnjo enačbo spremenimo v naslednjo obliko:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

formula per partes

Formulo integracije po delih uporabljamo, ko neznamo izračunati integrala $\int udv$, znamo pa izračunati integral $\int dv$. Uporabe se naučimo na nekaj primerih.

Zgled 9: Izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int x \cdot e^x \, dx$

(b) $\int x \cdot \sin x \, dx$

(c) $\int x \cdot \ln x \, dx$

(d) $\int \arctan x \, dx$

Integracijo izvedemo v več korakih:

V prvem koraku določimo kateri del podintegralske funkcije bo pomenil funkcijo u in kateri del bo pomenil diferencial dv.

(a) $u = x,\ dv = e^x\,dx$

(b) $u = x,\ dv = \sin x\,dx$

(c) $u = \ln x,\ dv = x\,dx$

(d) $u = \arctan x,\ dv = dx$

V drugem koraku izračunamo du in v; Diferencial du dobimo z odvajanjem funkcije u, funkcijo v dobimo z integriranjem diferenciala dv, torej $v = \int dv$. Pri integriranju izberemo integracjsko konstanto $C = 0$.

(a) $du = dx,\ v = \int e^x\,dx = e^x$

(b) $du = dx,\ v = \int sin\,dx = -\cos x$

(c) $du = \dfrac{1}{x}\,dx,\ v = \displaystyle\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}$

(d) $du = \dfrac{1}{x^2+1}\,dx,\ v = \displaystyle\int dx = x$

V tretjem koraku uporabimo formulo per partes.

(a) $$\int x \cdot e^x\,dx = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \underbrace{x \cdot e^x}_{u\cdot v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = \underline{xe^x - e^x + C}$$

(b) $$\int x \cdot \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = \underline{-x\cos x + \sin x + C}$$

(c) $$\int x \cdot \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \underline{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

(d) $$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \underline{x\arctan x - \ln|x^2+1| + C}$$

■

Formula integracije per partes je koristna v primerih, ko v integralu nastopajo transcendentne funkcije. Kaj postaviti v formuli za u in kaj za dv? Običajno za u postavimo transcendentno funkcijo, katere odvod je algebrska funkcija ($\ln, \arctan, \arcsin$), če pa je odvod transcendentne funkcije funkcija iste vrste ($e^x, \sin x, \cos x$), jo postavimo skupaj z diferencialom dx za diferencial dv. Oglejmo si primer, ko sta obe funkciji transcendentni, njun odvod pa tudi transcendenten.

Zgled 10: Izračunaj integrala $\int e^x \sin x\,dx$ in $\int e^x \cos x\,dx$

Označimo SIN $= \int e^x \sin x \, dx$ in COS $= \int e^x \cos x \, dx$. V obeh integralih uporabimo formulo per partes, pri SIN vzemimo $u = e^x$ in $dv = \sin x dx$, pri COS pa tudi vzemimo $u = e^x$, za dv pa izberimo $\cos x dx$. Potem je pri obeh integralih $du = e^x dx$ in $v = -\cos x$ pri SIN ter $v = \sin x$ pri COS. Tako imamo:

$$\text{SIN} = \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - (-\int e^x \cos x \, dx) = -e^x \cos x + \text{COS} \Rightarrow \text{SIN} - \text{COS} = -e^x \cos x$$

$$\text{COS} = \int e^x \cos x \, dx =^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx) = e^x \sin x - \text{SIN} \Rightarrow \text{SIN} + \text{COS} = e^x \sin x$$

Integrala SIN in COS izračunamo iz nastalega sistema enačb: $\left.\begin{array}{rcrcr} \text{SIN} & - & \text{COS} & = & -e^x \cos x \\ \text{SIN} & + & \text{COS} & = & e^x \sin x \end{array}\right|$.
Enačbi prvič seštejemo, drugič od spodnje odštejem zgornjo. Dobimo: 2SIN $= e^x(\sin x - \cos x)$ in 2COS $= e^x(\sin x + \cos x)$. Zato je:

$$\int e^x \sin x \, dx = \underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C} \qquad \int e^x \cos x \, dx = \underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C}$$

■

5 Integral racionalne funkcije

V računanju integralov se pogosto pojavi problem integracije racionalne funkcije $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kjer sta P in Q polinoma z realnimi koeficienti. Če uporabimo osnovni izreku o deljenju polinomov lahko racionalno funkcijo enolično zapišemo v obliki $f(x) = k(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, kjer sta $k(x)$ (količnik) in $R(x)$(ostanek) polinoma. Pri tem je stopnja polinoma $R(x)$ manjša od stopnje polinoma $Q(x)$. Tako prevedemo integriranje racionalne funkcije na integracijo polinoma in racionalne funkcije, pri kateri je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca. V naslednjih vrsticah bomo privzeli, da je stopnja $P(x)$ manjša od stopnje polinoma $Q(x)$.

Polinom Q v imenovalcu funkcije $f(x)$ ima realne koeficiente, zato ga lahko razstavimo na produkt več faktorjev, in sicer:

- linearne faktorje, ki imajo obliko $(x-a)^\alpha$, kjer je α stopnja ničle a,
- kvadratne faktorje z negativno diskriminanto (zato v $\mathbb{R}$ nerazstavljivi, v $\mathbb{C}$ pa rastavljivi s konjugirano kompleksnima ničlama), ki imajo obliko $(x^2+px+q)^\beta$ $(D = p^2-4q<0)$ in je β stopnja konjugiranih ničel polinoma x^2+px+q

Če se sprehodimo po tabeli odvodov opazimo, da je odvod racionalna funkcija, če smo odvajali bodisi algebrsko funkcijo, bodisi logaritem polinoma, bodisi arkustangens polinoma. Potem je tudi integral $\int \frac{P}{Q}\,dx$ sestavljen iz **vsote** treh delov:

(A) **Algebrski del**: Ta del ima obliko

$$\frac{T(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\cdots(x^2+px+q)^{\beta-1}\cdots}$$

Pri tem je $T(x)$ polinom z neznanimi koeficienti, imenujemo jih $A_1, A_2, \ldots$, ki ima za eno manjšo stopnjo od stopnje imenovalca $(x-a)^{\alpha-1}\cdots(x^2+px+q)^{\beta-1}\cdots$

(B) **Logaritemski del**: Ta del ima obliko

$$B\ln|x-a| + \cdots + C\ln(x^2+px+q) + \cdots$$

Pri tem delu nastopajo neznani koeficienti $B_1, B_2, \ldots$ in $C_1, C_2, \ldots$.

(C) **Arkus tangens del**: V tem delu nastopajo le kvadratni faktorji in ima obliko:

$$D\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-D}}$$

V tem delu nastopajo novi neznani koeficienti $D_1, D_2, \ldots$.

Neznane koeficiente polinoma T, koeficiente logaritemskega in arkus tangens dela poiščemo tako:

(a) dele (A), (B) in (C) odvajamo in vsoto odvodov izenačimo z začeto funkcijo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (odvod primitivne funkcije, kar je pri nas (A) + (B) + (C), je enak podintegralski funkciji)

(b) nastalo enačbo uredimo tako, da odpravimo ulomke in na urejeni uporabimo definicijo enakosti dveh polinomov, torej primerjamo enakoležne koeficiente.

(c) Rešimo nastali sistem enačb za neznane koeficiente.

Zgled 11: Izračunaj $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x}{x^4 - x^2 - 2x + 2}\, dx$

Račun naredimo po korakih:

1. deljenje : $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = 1 + \dfrac{-4x^3 + 3x^2 - 7x - 2}{x^4 - x^2 - 2x + 2}$

2. razstavljanje imenovalca : $x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 2)$

3. nastavek integracije racionalnega dela $\frac{-4x^3+3x^2-7x-2}{x^4-x^2-2x+2}$:

$$\int \frac{-4x^3 + 3x^2 - 7x - 2}{x^4 - x^2 - 2x + 2}\, dx = \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\text{alg. del}} + \underbrace{B \ln|x-1| + C \ln(x^2 + 2x + 2)}_{\text{logaritemski del}} + \underbrace{D \arctan \frac{2x+2}{\sqrt{4}}}_{\text{arkus tg. del}}$$

4. odvajamo zadnjo enačbo in dobimo :

$$\frac{-4x^3 + 3x^2 - 7x - 2}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = -\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + + \frac{C(2x+2)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{D}{x^2 + 2x + 2}$$

5. urejanje dobljene enačbe (odpravljanje ulomkov, združevanje) :

$$-4x^3 + 3x^2 - 7x - 2 = x^3 \cdot (B + 2C) + x^2 \cdot (-A + B - 2C + D) + x \cdot (-A - 2C - 2D) + (-2A - 2B + 2C + D)$$

6. urejanje in reševanje sistema :

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & B & + & 2C & & & = -4 \\
-A & + & B & - & 2C & + & D & = 3 \\
-2A & + & & - & 2C & - & 2D & = -7 \\
-2A & - & 2B & + & 2C & + & D & = -2\,,
\end{array}$$

ki ima rešitev $A = 2,\ B = -1,\ C = -\frac{3}{2}$ in $D = 3$

Tako smo izračunali (seveda ne smemo pozabiti integracijske konstante C):

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 9x}{x^4 - x^2 - 2x + 2}\, dx = x + \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + 3\arctan(x+2) + C$$

Pravilnost lahko kontroliramo z odvajanjem. ∎