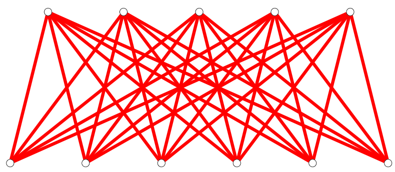
DN #1 , L2Č, januar 2020

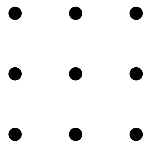
1. Koliko premic določajo tri nekolinearne točke A, B, C? Nariši sliko.

Spomni se: Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica. **Kolinearne** so take točke, ki ležijo na isti premici.

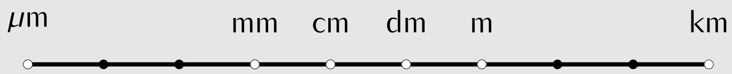
2. Koliko daljic je narisanih na desni sliki, če je vsaka med petimi točkami v zgornji vrstici povezana z vsako med šestimi točkami v spodnji vrstici?



3. Katere tri točke moramo odstraniti na desni sliki, da potem med preostalimi nobene tri ne bodo kolinearne? Odgovor utemelji.



Spomni se: Dolžino daljice sestavljata število in enota. Običajno za osnovno enoto izberemo **meter (m)**. Manjše enote tvorimo s predponami **deci-(d)**, **centi-(c)**, **mili-(m)**, **mikro-(μ)**, ki so zapored desetinko, stotinko, tisočinko in milijoninko osnovne enote. Predpona za večjo enoto je **kilo-(k)**, ki pomeni 1000 osnovnih enot.



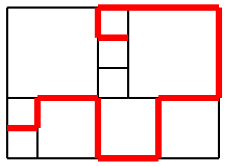
Koristno je vedeti, da pri isti dolžini pred **manjšo enoto** leži **večje število** in pred **večjo enoto manjše število**. Vzemimo primer pretvarjanja $0,0000123\,\text{km}$ v cm. Po pretvarjanju bo pred cm ležalo večje število. To število dobimo tako, da število $0,0000123$ pred kilometri pomnožimo tolikokrat z 10, kolikor točk moramo prehoditi na premici iz točke km do točke cm. V našem primeru prehodimo pet točk, torej pomnožimo z 10000. Zato je $0,0000123\,\text{km} = 0,0000123 \cdot 10000\,\text{cm} = 1,23\,\text{cm} \doteq 1\,\text{cm}$.

4. Zaokroži v zapisani enoti:

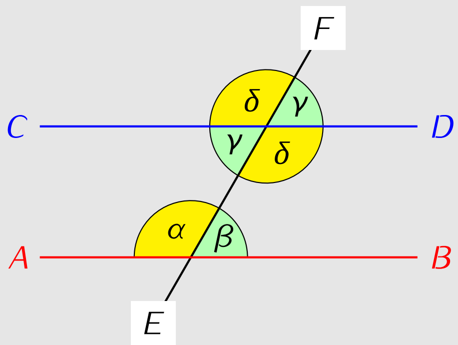
(a) $0,0013 \text{ km} = \boxed{?} \text{ cm}$ (b) $1234,56 \text{ mm} = \boxed{?} \text{ m}$ (c) $234560 \ \mu\text{m} = \boxed{?} \text{ dm}$

(d) $72300 \text{ cm} = \boxed{?} \text{ km}$ (e) $0,008234 \text{ m} = \boxed{?} \ \mu\text{m}$ (f) $5,3 \cdot 10^{-3} \text{ km} = \boxed{?} \text{ cm}$

5. Iz treh vrst kvadratov smo sestavili lik na desni sliki in vzdolž stranic kvadratov narisali lomnjeno črto. Stranica najmanjšega kvadrata meri 20 cm. Koliko cm meri lomnjena črta?



Spomni se:



Koti z **vzporednimi** kraki so bodisi enaki (na sliki: $\alpha = \delta$ in $\beta = \gamma$), bodisi suplementarni, torej je vsota dveh takih kotov enaka $180°$ (na sliki: $\alpha + \gamma = 180°$, $\beta + \delta = 180°$)

6. V paralelogramu ABCD z narisanima diagonalama, ki se sekata v točki O, pokaži primere kotov:

(a) z vzporednimi kraki, ki sta enaka.

(b) z vzporednimi kraki, ki nista enaka.

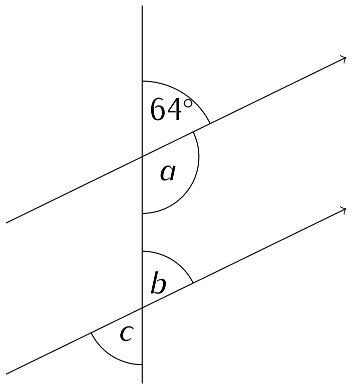
(c) ki sta enaka suplementarna.

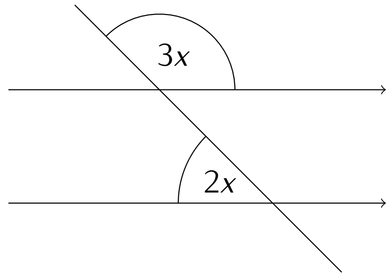
(d) ki sta sovršna.

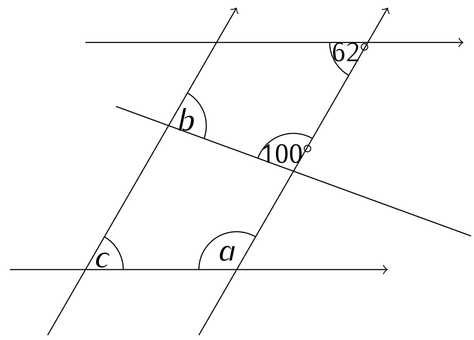
7. Koliko merita kota z vzporednimi kraki, če je eden za $40°$ večji od drugega?

8. Koliko merita kota z vzporednima krakoma, če je njuna razlika $30°$?

9. Na spodnjih slikah so premice, ki imajo puščico, vzporedne. Izračunaj neznane kote.

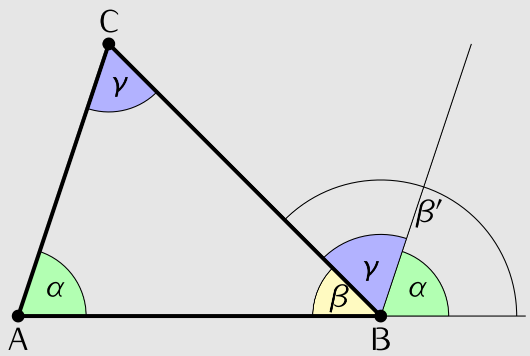






10. Kot α meri $26°31'$. Koliko meri suplementarni kot dvakratnika kota α? [$126°58'$]

Spomni se:



Vsota **notranjih** kotov trikotnika je enaka 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi$$

Zunanji kot trikotnika je enak vsoti njemu **nesosednjih** (nepriležnih) notranjih kotov trikotnika; na sliki je:

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

11. V enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ meri notranji pri vrhu 36°. Koliko merita kota ob osnovnici?

12. Dopolni naslednjo tabelo notranjih in zunanjih kotov trikotnika:

α	β	γ	α'	β'	γ'
$36°15'$		$32°33'$			
	$72°24'$			$129°15'13''$	
			$46°15'$		$136°15'$

13. Notranji koti trikotnika so v razmerju 2 : 3 : 4. Izračunaj notranje kote in razliko med največjim notranjim in najmanjšim notranjim kotom. V kakšnem razmerju so zunanji koti?

14. V paralelogramu ABCD meri notrnaji kot pri oglišču A $36°48'$. Koliko merijo ostali notranji koti?

15. Opiši, kako bi narisal deltoid ABCD s podatki $|AB| = |BC| = 6$, $|AD| = |CD| = 10$ in $\alpha = \sphericalangle BAD = 120°$.

Spomni se: Število diagonal n-kotnika izračunamo z enačbo $\boxed{D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}}$.
Zunanji koti poljubnega konveksnega večkotnika merijo skupaj $360°$, če je večkotnik pravilen, recimo n kotnik, je zunanji kot enak $\boxed{\beta = \frac{360°}{n}}$.
Notranji koti n-kotnika merijo skupaj $\boxed{n \cdot 180° - 360°}$. Pravilni večkotnik ima vse notranje kote enake.

16. Dopolni naslednjo tabelo o pravilnih večkotnikih

št. stranic	št. diagonal	notranji kot	zunanji kot
5			
	20		
		$160°$	
			$30°$

Spomni se:

Vzemimo daljici AB in CD in z $|AB| = a$ in $|CD| = b$ označimo njuni dolžini. Količnik $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{a}{b}$ imenujemo **razmerje daljic** AB in CD. Razmerje lahko zapišemo tudi v eni od oblik:

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = AB : CD = \frac{a}{b} = a : b}$$

Sorazmerje (dvorazmerje) dveh parov daljic, recimo para a, b in para c, d, je enakost $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ali, zapisano v drugi obliki, enakost $a : b = c : d$. Člena a in d sorazmerja imenujemo tudi zunanja člena, člena b in d pa sta v tem primeru notranja člena.

notranja člena

$$a \quad : \quad b \quad = \quad c \quad : \quad d$$

zunanja člena

Sorazmerje zapišemo lahko tudi z enačbo $a \cdot d = b \cdot c$, ki jo dobimo bodisi tako, da opravimo ulomke v prvi obliki, bodisi zmožimo zunanja člena a in d ter notranja člena b in c v dvorazmerju, na koncu pa zmnožka izenačimo.

Zgled 1: a) Na zemljevidu Slovenije v merilu 1 : 750 000 je razdalja med dvema krajema 6 cm. Koliko v naravi meri zračna razdalja med tema krajema?

b) Na zemljevidu je razdalja med dvema krajema 2,5 cm, v naravi pa sta ista kraja oddaljena (v zračni liniji) 25 km. V kakšnem merilu je izdelan zemljevid?

Merilo zemljevida pove, koliko enot dolžine meri 1 enota dolžine v naravi, recimo, če je merilo zemljevida 1 : 10 000, je 1 cm na zemljevidu enak dolžini 1 cm ·10 000 = 10 000 cm = 100 m v naravi. Našo nalogo uženemo s sorazmerjem

$$\boxed{\text{dolžina na zemljevidu}} : \boxed{\text{dolžina v naravi}} = 1 : 750\,000 \Rightarrow 6\,\text{cm} : x = 1 : 750\,000$$

Iz sorazmerja izračunamo $x \cdot 1 = 6\,cm \cdot 750\,000 = 4\,500\,000\,cm = 45\,km$.

V primeru b) zapišemo sorazmerje $\Rightarrow 2,5\,\mathrm{cm} : 25\,\mathrm{km} = 1 : x$. Poenotimo enoti in izračunamo:

$$2,5\,cm \cdot x = 1 \cdot 2\,500\,000\,cm \Rightarrow x = \frac{2\,500\,000\,cm}{2,5\,cm} = 1\,000\,000$$

Zemljevid je torej narisan v razmerju $1 : 1\,000\,000$. ■

V vsakdanjem življenju govorimo, da sta dve stvari podobni, če imata isto obliko, le velikost je običajno različna. Pri likih obliko določajo koti. Najenostavnejši lik s koti je trikotnik, zato najprej definirajmo, kdaj sta si podobna (imata enako obliko) dva trikotnika.

Spomni se:
Trikotnika sta si **podobna**, če imata **enake notranje kote. Seveda pa zadostuje že, če imata enaka dva notranja kota, saj sta v takem primeru tudi tretja notranja kota enaka.**

Na sliki imamo podobna trikotnika $\triangle ABC$ in trikotnika $\triangle DEF$. Podobnost zapišemo s simbolom $\sim$, torej za trikotnika na sliki zapišemo $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle DEF}$. Pri zapisu pazimo, da oglišča zapišemo v takem vrstnem redu, da pri enakoležno zapisanih ogliščih ležita enaka kota, torej:

$$\boxed{\triangle \underbrace{A}_{\alpha}\underbrace{B}_{\beta}\underbrace{C}_{\gamma} \sim \triangle \underbrace{D}_{\alpha}\underbrace{E}_{\beta}\underbrace{F}_{\gamma}}$$

Enakoležni stranici podobnih trikotnikov sta tisti, ki ležita nasproti enakih kotov; tako so na sliki enakoležni naslednji pari stranic:

- $AB = c_1$ in $DE = c_2$ (nasproti kota γ),
- $AC = b_1$ in $DF = b_2$ (nasproti kota β) in
- $BC = a_1$ in $EF = a_2$ (nasproti kota α).

Najpomebnejša trditev za podobne trikotnike je tale trditev o enakoležnih stranicah:
V podobnih trikotnikih je razmerje enakoležnih stranic enako, torej je:

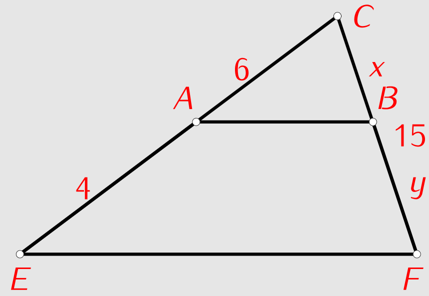
$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k}$$

Število k igra vlogo povečanja ali zmanjšanja slike (zoom).

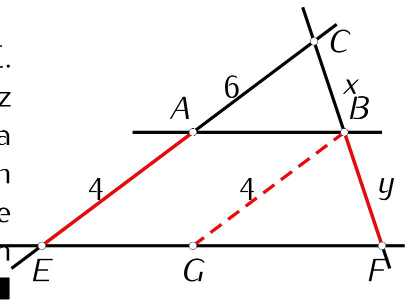
Zgled 2: **Najkrajša stranica trikotnika meri 15 cm, stranice temu trikotniku podobnega trikotnika pa merijo 6 cm, 5 cm in 7 cm. Koliko merita neznani stranici trikotnika.**

V trikotniku je najmanjša stranica enakoležna najmanjši stranici v podobnem trikotniku, kajti obe ležita nasproti najmanjšemu kotu trikotnika. Razmerje obravnavanih stranic je koeficient podobnosti $k = \frac{15}{5} = 3$. Zato za srednjo stranico, označimo jo z b, velja enačbe $\frac{b}{6} = 3$, torej je $b = 18$ cm in podobno za najdaljšo stranico velja račun $7 \cdot 3 = 21$ cm. ■

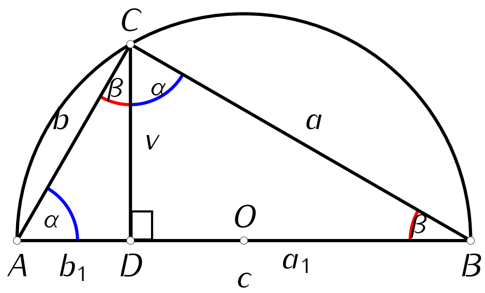
Zgled 3: **Na desni sliki so vse dolžine zapisane v isti enoti. Koliko teh enot merita dolžini x in y daljic BC in FB, če je $|CA| = 6$, $|AE| = 4$, $|CF| = 15$ in sta daljici AB ter EF vzporedni.**



Skozi točko B narišimo vzporednico k premici CE. Presečišče vzporednice in daljice EF označimo z G. Potem sta trikotnika CAB in BGF podobna in je $|BG| = |AE| = 4$. Zato je $x : y = 6 : 4$ in tako $x = 6k$, $y = 4k$. Ker pa je $x + y = 15$, je $6k + 4k = 15$ in tako $k = 1,5$.Zato je $x = 9$ in $y = 6$. ■



Spomni se: Na naslednji sliki je v polkrogu s premerom AB in središčem O narisan pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ s pravim kotom v C. Spomnimo se, da kjerkoli že narišemo na polkrogu točko C, bo kot $\sphericalangle ACB$ pravi kot; temu dejstvu pravimo Talesov izrek o kotu v polkrogu. Spomnimo se še, da najdaljši stranici pravokotnega trikotnika (nasproti pravemu kotu) pravimo **hipotenuza**, ostali dve stranici pa imenujemo **kateti**.



V $\triangle ABC$ načrtamo višino CD na hipotenuzo AB, ki naj ima dolžino c. Dolžine katet označimo kot na sliki z a in b, dolžini daljic AD in BD pa označimo z b_1 in a_1. Daljici AD in BD sta tudi projekciji katet AC in BC na hipotenuzo. Hipotenuza c in dolžini projekcij z a_1 in b_1 so povezani s koristno enačbo:

$$\boxed{a_1 + b_1 = c}$$

Trije pravokotni trikotniki na sliki, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$, imajo enake notranje kote. Zato so podobni in so ustrezne enakoležne stranice v enakem razmerju.

Vzemimo najprej sistem razmerij v trikotnikih $\triangle ABC$ in $\triangle ACD$:

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{v} = \frac{b}{b_1}$$

Enačba $\frac{c}{b} = \frac{b}{b_1}$ nam po preoblikovanju postreže s tole enačbo: $b^2 = b_1 \cdot c$. Na podoben način iz podobnih trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle CBD$ dobimo enačbo: $a^2 = a_1 \cdot c$. Obe enačbi skupaj imenujemo **Evklidov izrek** v pravokotnem trikotniku:

$$\boxed{a^2 = a_1 \cdot c \quad b^2 = b_1 \cdot c}$$

Podobnost "malega" in "srednjega" trikotnika $\triangle ACD$ in $\triangle CBD$ nam sestavi sistem razmerij:

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{v} = \frac{v}{a_1}$$

Zadnjo enačbo sistema preoblikujemo v enačbo $v^2 = a_1 \cdot b_1$, ki jo imenujemo **višinski izrek** v pravokotnem trikotniku:

$$\boxed{v^2 = a_1 \cdot b_1 \quad \text{ali} \quad v = \sqrt{a_1 \cdot b_1}}$$

Seštejmo obe enačbi $a^2 = a_1 \cdot c$, $b^2 = b_1 \cdot c$ Evklidovega izreka. Dobimo:

$$a^2 + b^2 = a_1 \cdot c + b_1 \cdot c = (a_1 + b_1) \cdot c = c \cdot c = c^2$$

17. V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza $\sqrt{20} \doteq 4,472\,\text{cm}$, daljša kateta pa je dvakrat tolikšna kot krajša. Koliko merita kateti?

18. V enakokrakem trikotniku meri krak 13 cm in višina 12 cm. Koliko meri osnovnica?

19. V rombu merita diagonali 16 cm in 12 cm. Koliko meri stranica romba?

20. V krožnici s polmerom 2 dm meri tetiva 3,2 dm. Koliko je ta tetiva oddaljena od središča?

21. Poišči neznano količino na naslednjih slikah