ZAPOREDJA

(Interno gradivo)

Sestavil Ivo.K.

2016–17

Kazalo

1 **Definicija in splošne lastnosti** 2
1.1 Graf zaporedja 4
1.2 Monotona zaporedja 5
1.3 Omejena zaporedja 7
1.4 Povzetki in naloge 8

2 **Aritmetično zaporedje** 11
2.1 Povzetki in naloge 17

3 **Geometrijsko zaporedje** 20
3.1 Povzetki in naloge 26

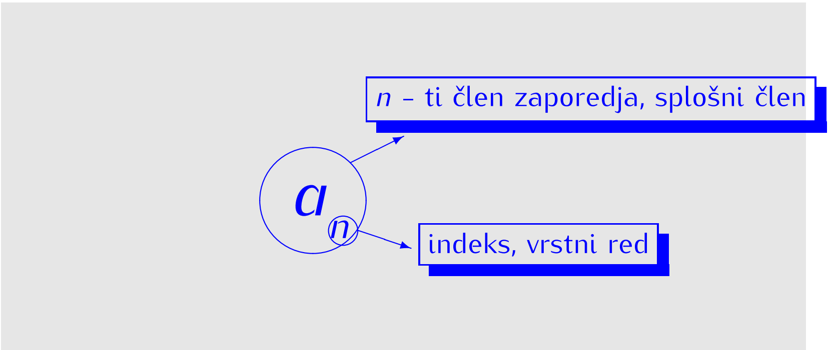
4 **Geometrijska vrsta** 28
4.1 Povzetki in naloge 35

5 **Elementarni obrestni račun** 38
5.1 Navadno obrestovanje 40
5.2 Obrestno obrestovanje 40

1 Definicija in splošne lastnosti

Zaporedje je **funkcija** (preslikava) iz množice **naravnih** števil ($\mathbb{N}$) v množico **realnih** števil ($\mathbb{R}$). To pomeni, da vsakemu naravnemu številu n zaporedje priredi natanko določeno realno število, ki ga označimo z a_n in ga imenujemo n - ti ali splošni člen zaporedja, številu n pa indeks člena, torej:

definicija zaporedja



Če zaporedje primerjamo z običajno realno funkcijo $y = f(x)$, igra pri zaporedjih vlogo neodvisne spremenljivke x spremenljivka n, vlogo odvisne spremenljivke$y$ pa igra količina a_n. Zato lahko zapišemo tudi $a_n = f(n)$, kjer s f označimo predpis, ki pove kako količini n priredimo količino a_n.

Člene zaporedja razvrstimo v vrsto po indeksih od prvega naprej in jih po vrsti imenujemo: **prvi** člen, **drugi** člen, **tretji** člen, $\ldots$, n**-ti** člen, $(n+1)$**-ti** člen in tako naprej, dokler je členov kaj:

končno neskončno zaporedje

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$$

Členov ne zmanjka, če je zaporedje **neskončno**, če pa je zaporedje **končno**, je členov končno mnogo.

Predpis, s katerim opišemo zaporedje, lahko zapišemo **neposredno** s formulo v kateri nastopa le indeks n ali pa **posredno** (**rekurzivno**) s formulo v kateri nastopajo prejšnimi členi. zaporedja.

Zgled 1.1: Naslednja zaporedja so podana neposredno s formulo:

(a) $a_n = 3n - 2$ **(b)** $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ **(c)** $a_n = (-2)^{n-1}$ **(č)** $a_n = \dfrac{10^{n+3}}{n!}$

Za vsako zaporedje zapiši prvih pet členov, pri prvem zaporedju ugotovi kateri člen je enak 1021**, v drugem zaporedju pa določi indeks člena, ki je enak** $0,655$.

Prvi del naloge rešimo tako, da v ustrezno formulo zapored vstavljamo $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Tako dobimo v primeru prvega zaporedja, da je prvih pet členov $1, 4, 7, 10, 13$, v drugem primeru $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{9}{17}$, tretjem $1, -2, 4, -8, 16$ in v zadnjem primeru $10000, 50000, 166666\frac{2}{3}, 416666\frac{2}{3}, 8333$

Drugi del naloge rešimo tako, da vstavimo v formulo za a_n ustrezno število za a_n in iz dobljene enačbe izračunamo indeks n. V prvem primeru dobimo $n = 341$, v drugem pa $n = 66$. Podrobnosti prepustimo bralcu. ■

Zgled 1.2: Zapiši prvih pet členov zaporedij, ki so podana rekurzivno:

(a) $a_n = n \cdot a_{n-1},\ a_1 = 1$

(b) $a_n = a_{n-1} + n - 1,\ a_1 = 0$

(c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_1 = a_2 = 1$

Za vsako zaporedje zapiši prvih pet členov, pri prvem in drugem pa izpelji formulo za splošni n – ti člen zaporedja.

V prvem primeru je prvih pet zaporednih členov: $a_1 = 0$, $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$, $a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$. Računi nas spomnijo na fakultete prvih petih naravnih števil, zato predpostavimo, da tudi v splošnem velja $a_n = n!$.

Sklepanju iz posameznih primerov na splošen primer v matematiki pravimo sklepanje z indukcijo. Toda pri takem sklepanju moramo biti previdni. Recimo, v zaporedju $a_n = n^2 + n + 41$ so prvi peti členi $43, 47, 53, 61, 71$ sama praštevila, zato bi "nepopolno" sklepali, da je a_n praštevilo za vsak n. Zakaj "nepopolno"? Ker je $a_{40} = 40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40+1) + 41 = 41 \cdot (40+1) = 41^2$ in zato a_{41} ni praštevilo. V matematiki sklepamo s posebno vrsto indukcije, z **matematično indukcijo**. Pri tem načinu sklepanja preverimo dve trditvi, pravimo, da izvedemo koraka indukcije:

- V prvem koraku preverimo, če lastnost, ki jo dokazujemo velja v prvih nekaj začetnih primerih (običajno zadošča že prvi primer).
- V drugem koraku predpostavimo, da lastnost velja za vse primere do, recimo n – tega primera, vključno s tem primerom. Iz te predpostavke dokazujemo, da lastnost velja tudi za naslednji, $(n+1)$–ti primer.

Če nam uspe potrditi oba koraka sklepanja z matematično indukcijo, velja lastnost za vsako naravno število, torej v vsakem primeru. Utemeljitev je preprosta: ker lastnost velja v prvem primeru (prvi korak indukcije), velja tudi v naslednjem, torej drugem primeru (drugi korak indukcije). V nadaljevanju stalno uporabljamo drugi korak indukcije: ker lastnost velja v drugem primeru, velja tudi v naslednjem primeru, to je v tretjem primeru, zato v četrtem primeru in tako naprej za vsako naravno število.

V zaporedju a) primera sklepamo, da je lastnost prvega zaporedja, da je njegova formula $a_n = n!$. Za nekaj prvih primerov formula res velja. Predpostavimo, da velja za vsak indeks do n, vključno z njim, torej $a_n = n!$. Potem je $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ (formula rekurzije) in zato $a_{n+1} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$. Torej formula velja tudi za indeks $n+1$. Tako je izpolnjen tudi drugi korak indukcije, zato formula velja za vsako naravno število n.

V drugem primeru (b) je prvih pet členov: $a_1 = 0$, $a_2 = a_1 + 2 - 1 = 0 + 2 - 1 = 1$, $a_3 = a_2 + 3 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$, $a_4 = a_3 + 4 - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, $a_5 = a_4 + 5 - 1 = 6 + 5 - 1 = 10$. Z malo domišljije ugotovimo, da prvih pet primerov užene formula $a_n = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Očitno je formula pravilna za nekaj začetnih indeksov. Predpostavimo, da formula $a_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ velja za vsak indeks do n, vključno z njim. Potem je $a_{n+1} = a_n + (n+1) - 1$ in s predpostavko o a_n:

$$a_{n+1} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Formula ima isto obliko tudi za indeks $n+1$. Tako je izpolnjen tudi drugi korak indukcije, zato formula velja za vsako naravno število n.

Zaporedje v primeru (c) imenujemo Fibonaccijevo zaporedje v čast italijanskega matematika Leonarda Fibonaccija iz Pise, ki je živel približno od 1175 do 1250 našega štetja. V svoji sloviti knjigi Liber Abaci je med drugim zapisal naslednjo nalogo o parih zajcev:

Zajčji par skoti nov zajčji par na koncu vsakega meseca, prvič po dveh mesecih. Koliko zajčjih parov je na začetku n - tega meseca ($n = 1, 2, 3, \ldots$)?

Rešitev te naloge je ravno Fibonaccijevo zaporedje $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, torej v n - tem mesecu toliko, kot v prejšnjih dveh mesecih skupaj. Utemeljitev prepuščamo bralcu. ■

V bodoče bodo vsa zaporedja, s katerimi se bomo ukvarjali, podana neposredno s formulo.

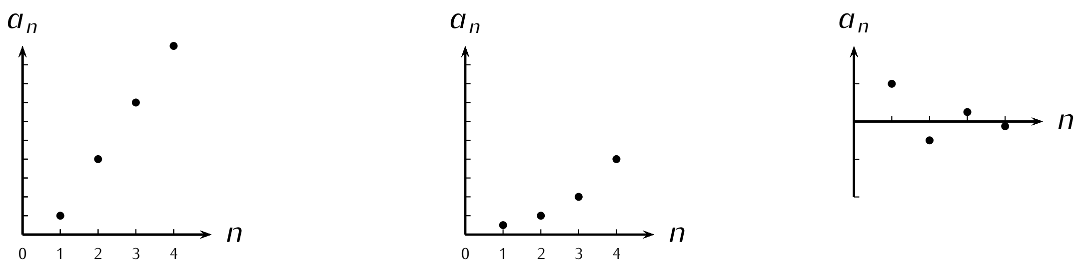
1.1 Graf zaporedja

Spomnmo se, da je graf realne funkcije $y = f(x)$ množica točk $\{T(x, y); y = f(x)\}$, kjer množica abscis x prehodi definicijsko obmnočje funkcije $y = f(x)$. Podobno definiramo graf zaporedja: **Graf zaporedja** je množica točk $\{T(n, a_n); n \in \mathbb{N}\}$. **definicija**

Razlika med grafom funkcije je predvsem v definicijskem območju. Definicijsko območje zaporedja so naravna števila, zato množica točk $\{T(n, a_n);\ n \in \mathbb{N}\}$, ki sestavljajo graf zaporedja ni povezana, pravimo, da je **diskretna**.

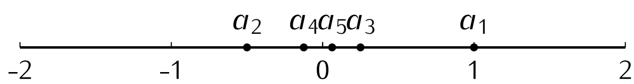
Zgled 1.3: Skiciraj grafe zaporedij $a_n = 3n - 2,\ b_n = 2^{n-2}$ in $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Izračunamo nekaj začetnih členov vsakega zaporedja, recimo a_1, a_2, a_3, a_4 in ustrezne točke $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, $(4, a_4)$ narišemo v koordinatnem sistemu. Dodajmo, da je pri zaporedjih negativen del abscisne osi nepotreben, zato ga izpustimo.



Slika 1: Grafi zaporedij $a_n = 3n - 2,\ b_n = 2^{n-2}$ in $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Včasih graf zaporedje narišemo kar na številski premici, recimo prvih pet členov zaporedja $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ narišemo takole:



Slika 2: Prikaz zaporedja na številski premici

1.2 Monotona zaporedja

Pravimo, da je zaporedje **naraščajoče**, če je vsak naslednji člen večji od svojega predhodnega člena, torej:

naraščajoče zaporedje

$$\boxed{a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots}$$

Pri znakih neenakosti dopuščamo, da je namesto kakega znaka $<$ znak $\leq$. V tem primeru sta taka sosednja člena enaka. Enako možnost dopuščamo tudi v primeru padajočega zaporedja, kjer bomo uporabili znak $>$, pravimo namreč, da je zaporedje **padajoče**, če je vsak naslednji člen manjši od svojega predhodnega člena, torej:

padajoče zaporedje

$$\boxed{a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots}$$

Če je zaporedje bodisi naraščajoče bodisi padajoče, ga imenujemo **monotono** zaporedje.

monotono zaporedje

Kako ugotoviti ali je dano zaporedje monotono? Izračunamo nekaj prvih členov in glede na njihovo velikost sklepamo na monotonost. Toda tak način sklepanja je lahko napačen, recimo:

Zgled 1.4: Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = \dfrac{10^{n+3}}{n!}$ monotono? Odgovor utemelji.

Prvi peti členi zaporedja so števila: 10000, 50000, $166666\frac{2}{3}$, $416666\frac{2}{3}$, $833333\frac{1}{3}$. Torej bi lahko z indukcijo sklepali, da je zaporedje naraščajoče. Toda sklep je napačen, saj je recimo $a_{20} = \frac{10^{23}}{20!} = 41103\frac{2616930637}{14849255421}$, kar pomeni, da je $a_{20} < a_5$. Torej zaporedje ni naraščajo, še več, celo padajoče je od 10. člena naprej, kot bomo ugotovili malo kasneje. ■

Tako smo ugotovili, da sklepanje na monotonost z nekaj začetnimi členi ni pravilno. Zato bomo ustvarili orodja, bolje orodji, za ugotavljanje monotonosti:

orodji za monotonost

1. Izračunamo razliko d_n poljubnih sosednjih členov zaporedja: $\boxed{d_n = a_{n+1} - a_n}$. Če je $d_n > 0$ za vsak n, je zaporedje naraščajoče, če je $d_n < 0$, je padajoče. V primeru $d_n = 0$ za vsak n je zaporedje konstantno.
2. Izračunamo količnik (kvocient) k_n (uporabljamo tudi oznako q_n) poljubnih sosednjih členov zaporedja: $\boxed{k_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$. Če je $k_n > 1$ za vsak n, je zaporedje naraščajoče, če je $0 < k_n < 1$, je padajoče. V primeru $k_n < 0$ za vsak n je zaporedje alternirajoče (zaporedna člena sta različnega predznaka).

Zgled 1.5: Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ monotono. Odgovor utemelji.

Izračunajmo razliko d_n zaporednih členov:

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{7}{(3n+2)(3n+5)}$$

Zadnji izraz ($\frac{7}{(3n+2)(3n+5)}$) je pozitiven za vsako naravno število, zato je zaporedje naraščajoče. ■

Zgled 1.6: Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = \frac{2^n}{n!}$ monotono. Odgovor utemelji.

V tem primeru raje uporabimo drugo orodje:

$$k_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

Preprosta neenačba $k_n < 1$ ima za rešitev vsa naravna števila razen 1, zato sklepamo, da je zaporedje padajoče. ■

Metodo, ki smo jo uporabili v zadnjem primeru, lahko uporabimo tudi v primeru zaporedja $a_n = \frac{10^{n+3}}{n!}$. Z računom ugotovimo, da je v tem primeru $k_n = \frac{10^{n+4} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^{n+3}} = \frac{10}{n+1}$. Zato je zaporedje naraščajoče, ko je $n \leq 9$ in padajoče za $n > 10$.

1.3 Omejena zaporedja

Pravimo, da je zaporedje a_n **navzgor omejeno**, če obstaja tako realno število M, da za vsak člen zaporedja velja: $\boxed{a_n < M}$. **navzgor omejeno**

Podobno opišemo omejenost navzdol; pravimo, da je zaporedje a_n **navzdol omejeno**, če obstaja tako realno število m, da za vsak člen zaporedja velja: $\boxed{a_n > m}$. **navzdol omejeno**

Če je zaporedje a_n hkrati omejeno navzgor in navzdol pravimo, da je **omejeno**. Število M imenujemo zgornja meja, število m spodnja meja. Preprost razmislek pove, da če je M zgornja meja, so zgornje meje tudi vsa od M večja števila, zato ima smisel pojem **najmanjša zgornja meja** ali tudi **natančna zgornja meja**, ki jo učeno imenujemo **supremum** zaporedja in jo označimo z $\sup a_n$. Podobno imenujemo **infimum** natančno spodnjo mejo in jo označimo z $\inf a_n$. Dodajmo še, da so monotona zaporedja na eno stran omejena. **zgornja spodnja meja**

Zgled 1.7: **Poišči natančno zgornjo in spodnjo mejo zaporedja $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.**

Že prej smo ugotovili, da je zaporedje naraščajoče, zato je $\inf a_n = a_1 = \frac{1}{5}$.

Kako poiskati kako zgornjo mejo. Uporabili bomo kar metodo poskušanja. Če izračunamo nekaj začetnih členov, posumimo, da so "vsi členi manjši od 1. Sum moramo še potrditi. To bomo storili tako, da bomo poiskali množico rešitev neenačbe $a_n < 1$. Če ima ta neenačba za rešitev vsa naravna števila, je število 1 zgornja meja, drugače ni. Rešimo neenačbo $a_n < 1$:

$$\frac{2n-1}{3n+2} < 1 \Rightarrow 2n-1 < 3n+2 \Rightarrow -n < 3 \Rightarrow n > -3$$

Ker za vsa naravna števila n velja $n > -3$, je število 1 res zgornja meja.

Pokažimo, da število $M = 0,6 = \frac{3}{5}$ ni zgornja meja.

$$\frac{2n-1}{3n+2} < \frac{3}{5} \Rightarrow 10n-5 < 9n+6 \Rightarrow n < 11$$

Neenačba $a_n < 0,6$ velja le za prvih deset naravnih števil, zato $0,6$ ni zgornja meja.

Dosedanji razmisleki nam povedo, da je natančna zgornja meja zaporedja $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ med $0,6$ in 1. Pa recimo, da je M natančna zgornja meja. Potem mora imeti neenačba $\frac{2n-1}{3n+2} < M$ za rešitev vsa naravna števila, torej ima množica rešitev obliko $n > c$, kjer je c realno število, ki ne preseže števila 1.

$$\frac{2n-1}{3n+2} < M \Rightarrow 2n-1 < 3Mn+2M \Rightarrow (2-3M)n < 2M+1$$

Če naj bo $n > c$, mora biti število $2-3M$ negativno (v tem primeru se obrne znak neenakosti) ali pa 0. To pa se zgodi, če je $M \geq \frac{2}{3}$. Torej je $\sup a_n = \frac{2}{3}$. ■

1.4 Povzetki in naloge

Pripomočki:

- Zaporedje $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ je **preslikava** ali **funkcija** iz množice **naravnih** števil v množico **realnih** števil.

  Drugače povedano: če množico realnih števil zapišemo po nekem pravilu v vrsto od leve proti desni, dobimo zaporedje števil. Prvemu zapisanemu številu pravimo prvi člen in ga označimo (običajno) z a_1, drugo v vrsto zapisano število imenujemo drugi člen (a_2), $n-$ to v vrsto zapisano število imenujemo $n-$ti člen in ga označimo a_n. Število n imenujemo **indeks** zapisanega člena.

- Graf zaporedja je množica točk (n, a_n).
- Pravilo, s katerim zapišemo zaporedje, je lahko **neposredno** (**eksplicitno**) s formulo $a_n = f(n)$, lahko pa je pravilo podano **posredno** (**rekurzivno**) s formulo, v kateri je člen a_n funkcija nekaterih prejšnjih členov.
- Zaporedje je **naraščajoče**, če je vsak naslednji člen zaporedja **večji** od svojega predhodnika; zapisano z neenačbami: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$

  Zaporedje je **padajoče**, če je vsak naslednji člen zaporedja **manjši** od svojega predhodnika; zapisano z neenačbami: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

  Naraščajočim ali padajočim zaporedjem z eno besedo pravimo **monotona** zaporedja.
- Zaporedje je **navzgor omejeno**, če je obstaja tako število M, da je $a_n \leq M$ za vsak člen a_n. Število M imenujemo **zgornja** meja, **najmanjši** možni zgornji meji pa pravimo **natančna zgornja** meja ali **supremum** zaporedja.

  Zaporedje je **navzdol omejeno**, če je obstaja tako število m, da je $a_n \geq M$ za vsak člen a_n. Število m imenujemo **spodnja** meja, **največji** možni spodnji meji pa pravimo **natančna spodnja** meja ali **infimum** zaporedja.

  Zaporedje je **omejeno**, če je **hkrati** omejeno navzgor in navzdol.

Naloge:

1. V naslednjih zaporedjih izračunaj prvih pet členov in ugotovi monotonost ter omejenost.
   (a) $a_n = 3n - 2$. [nar., $m = 1$, $M = \infty$]
   (b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$. [nar., $m = 0$, $M = 1$]
   (c) $a_n = n^2 - 10n + 21$. [nar. za $n \geq 6$, $m = -4$, $M = \infty$]
   (d) $a_n = n^3 - 12n^2 + 20n + 18$. [nar. za $n \geq 7$, $m = -24$, $M = \infty$]
   (e) $a_n = \dfrac{24 + n^2}{5n}$. [nar. za $n \geq 4$, $m = 2,8$, $M = \infty$]
   (f) $a_n = \dfrac{10^{2n}}{(n-1)!}$. [pad. za $n \geq 99$, $m = 0$, $M = \dfrac{10^{200}}{99!}$]
2. Zaporedje (a_n) je dano s splošnim členom $a_n = \log_2(n + 2)$.
   (a) Izračunaj prvi in trideseti člen. [$\doteq 1,585$; 5]
   (b) Kateri člen zaporedja je enak 8? [254]
   (c) Pokaži, da je zaporedje naraščajoče. [Uporabi tole trditev o logaritemski funkciji: $x > 1$ & $a > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.]

3. Naj bo $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{4}$.

   (a) Izračunaj prvih pet členov tega zaporedja. $[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

   (b) Izračunaj vsoto prvih osmih členov tega zaporedja. [0]

   (c) Kolikšna je vsota prvih 2010 členov tega zaporedja? $[\frac{\sqrt{2}}{2}]$

4. Zaporedje (a_n) je dano s predpisom: $a_n = \dfrac{n^2+2n-3}{n+2}$. Kateri člen tega zaporedja je enak $97,97$? [98]

5. Naj bo (a_n) zaporedje dano s predpisom $a_n = \dfrac{32-5n}{3}$.

   (a) Izračunaj prvih pet členov. $[9, 7\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}, 4, 2\frac{1}{3}]$

   (b) Koliko členov tega zaporedja je večjih od -101? [66]

   (c) Izračunaj vsoto $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{50}$. $[-3690]$

6. Zaporedje je dano s predpisom: $a_n = n^2-5n-50$. Izračunaj, od vključno katerega člena naprej so členi zaporedja večji od 100. [16]

2 Aritmetično zaporedje

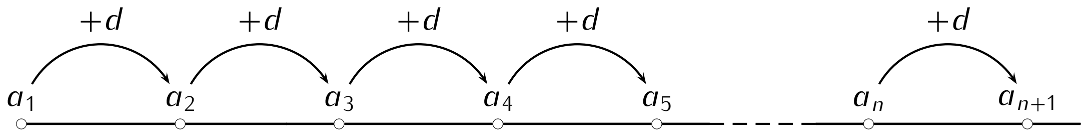
Kakšno skupno lastnost imata zaporedji $-5, -2, 1, 4, \ldots$ in $20, 16, 12, 8, \ldots$? Ali drugače, s katerim števili bi nadaljevali zaporedji? Najpreprostejša lastnost, ki jo hitro opazimo je, da se v prvem primeru členi zaporedja povečujejo za 3, v drugem primeru pa zmanjšujejo za 4. Zaporedjem s tako lastnostjo, da se vsak naslednji člen poveča ali zmanjša za **enako** število, imenujemo **aritmetično** zaporedje (oznaka **AZ**).

Pri aritmetičnem zaporedju se torej dva sosednja člena razlikujeta za enako število. To število imenujemo **razlika** ali **diferenca** zaporedja. Razliko običajno označimo z d.

definicija

$$\boxed{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1}}$$

V primeru, ko je $d > 0$ je aritmetično zaporedje (AZ) naraščajoče, v primeru $d < 0$ pa padajoče. Primer, ko je $d = 0$ je nezanimiv, saj so v tem primeru vsi členi zaporedja enaki. AZ lahko naslikamo na številski premici s točkami, ki so ekvidistantne ali enako oddaljene:



Slika 3: Predstavitev členov AZ na številski premici

Seveda je razdalja med dvema zaporednima točkama enaka absolutni vrednosti razlike zaporedja.

Zgled 2.1: Prvi trije členi AZ so $2k + 3, 5k - 2$ in $10k - 15$.

a) Izračunaj k.

b) Zapiši prvih pet členov zaporedja in razliko zaporedja.

V matematiki neznane količine izračunamo iz enačb in sistemov enačb ali neenačb. V našem primeru imamo eno neznano količino, zato bo zadoščala ena enačba. Ta je skrita v povedi, da so $2k+3, 5k-2$ in $10k-15$ prvi trije členi AZ. Zato je razlika med drugim in prvim členom enaka razliki med tretjim in drugim členom, torej:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow (5k-2) - (2k+3) = (10k-15) - (5k-2) \Rightarrow -2k = -8 \Rightarrow k = 4$$

Količino k lahko izračunamo tudi na bolj kompliciran način, s sistemom treh enačb. Tričlensko AZ lahko zapišemo tudi v obliki $a-d, a, a+d$ ali v obliki $a, a+d, a+2d$. Uporabimo prvi zapis. Potem dobimo sistem treh enačb z neznankami a, d in k: $a-d=2k+3$, $a=5k-2$, $a+d=10k-15$. Dobljeni sistem 3×3 uredimo in ga rešimo z načinom nasprotnih koeficientov:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & - & d & - & 2k & = & 3 \\ a & & & - & 5k & = & -2 \\ a & + & d & - & 10k & = & -15 \end{array}$$

Seštejemo prvo in tretjo enačbo, drugo ohranimo. Dobimo sistem 2×2: $\begin{array}{rcrcr} 2a & - & 12k & = & -12 \\ a & - & 5k & = & -2 \end{array}$, ki ga rešimo tako, da z 2 pomnoženo drugo enačbo odštejemo od prve enačbe. Tako dobimo enačbo $-2k=-8$ in tako $k=4$. Dobljeno vrednost vstavimo, recimo v drugo enačbo sistema 2×2, da dobimo $a=18$. Izračunani vrednosti za a in k uvrstimo še v prvo enačbo sistema 3×3 in izračunamo, da je $d=7$. Torej so prvi trije členi zaporedja $a-d=11, a=18, a+d=25$.

Z izračunanim k zapišemo prve tri člene: $11, 18, 25$, izračunamo razliko $d=a_2-a_1=18-11=7$ in zapišemo še $a_4=a_3+d=32$ in $a_5=a_4+d=39$. ■

Vzemimo tri zaporedne člene AZ, recimo, da je srednji člen a_n. Potem je $a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n$, drugače zapisano:

$$\boxed{2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}}$$

ali

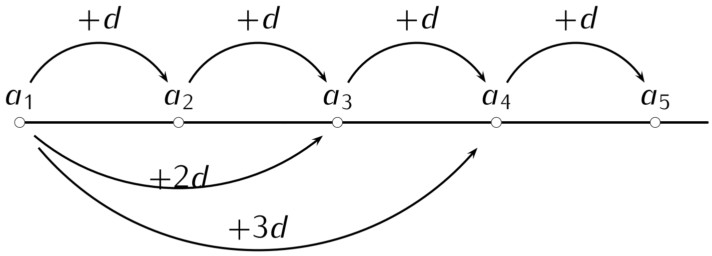
$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

aritmetična sredina

Polovico vsote dveh števil a in b, torej $\frac{a+b}{2}$, imenujemo aritmetična sredina števil a in b. Zato zadnja enačba pove, da je poljubni, neprvi, člen aritmetičnega zaporedja **aritmetična sredina** levega in desnega soseda.

Zgled 2.2: **Števila $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$, $\log_2(3-3^x)$ so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Izračunaj x.**

Uporabimo lastnost, da je srednji člen AZ aritmetična sredina sosedov, torej $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ ali izpeljanko $2\cdot a_2=a_1+a_3$. Dobimo malo težjo logaritemsko eksponentno enačbo enačbo $2\cdot\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)=\log_2(3^x-1)+\log_2(3-3^x)$. Enačbo zapišemo z isto



Slika 4: K izpeljavi formule za splošni člen AZ

logaritemsko osnovo 2 ($\log_4 u = \frac{\log_2 u}{\log_2 4} = \frac{\log_2 u}{2}$) in hkrati vpeljemo novo neznanko $3^x = a$ ($9^x = \left(3^2\right)^x = (3^x)^2 = a^2$). Dobimo enačbo $2 \cdot \frac{\log_2(9+a^2-7a)}{2} = \log_2(a-1) + \log_2(3-a)$. Enačbo uredimo s pomočjo logaritemskih pravil do enačbe $\log_2(9+a^2-7a) = \log_2(a-1)(3-3a)$, ki jo z antilogaritmiranjem in urejanjem pripeljemo do kvadratne enačbe $2a^2 - 11a + 12 = 0$. Ta enačba ima rešitvi $a_1 = 4$ in $a_2 = \frac{3}{2}$. Ustrezna je le druga rešitev, saj sta v primeru $a = 4$ logaritmanda $9 + a^2 - 7a$ in $3 - a$ negativna. Zato je $a = \frac{3}{2}$ in odtod $a = 3^x = \frac{3}{2}$ ter tako $x = \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2$. ■

S prvim členom a_1 in razliko d lahko izrazimo poljuben člen aritmetičnega zaporedja. Uporabimo indukcijo: drugi člen se od prvega razlikuje za d, zato je $a_2 = a_1 + d$. Ker se tudi tretji člen razlikuje od drugega za d, je $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$. Podobno ugotovimo, da je $a_4 = a_1 + 3d$.

Iz naštetih posameznih primerov sklepamo, da za splošni člen a_n velja enačba $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Če hočemo korektno izpeljati indukcijski dokaz, moramo pokazati, da formula velja tudi za naslednika, torej, da člen a_{n+1} izračunamo z istim predpisom kot člen a_n. Ker je $a_{n+1} = a_n + d$, je potem $a_{n+1} = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$. Torej za a_{n+1} velja enak predpis kot velja za a_n. Oba indukcijska koraka sta izpolnjena, zato res velja formula za splošni člen AZ.

splošni člen AZ

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Zgled 2.3: **Med števili -2 i 46 moramo vriniti 15 števil, tako da bodo vsa števila, vključno z -2 in 46, tvorila aritmetično zaporedje. Zapiši vrinjena števila.**

Poiskati moramo, skupaj z 2 in 46, sedamnajst člensko AZ, kjer sta -2 prvi člen in 46 zadnji člen, torej $a_1 = -2$, $a_{17} = 46$. Uporabimo enačbo za splošni člen in izračunamo razliko zaporedja:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_{17} = a_1 + 16d \Rightarrow 46 = -2 + 16d \Rightarrow d = 3$$

Vrinjena števila so zato: $-2+3 = 1$, 4, 7, 10 , 13 , 16 , 19 , 22 , 25 , 28 , 31 , 34 , 37 , 40 , 43.
■

Zgled 2.4: V aritmetičnem zaporedju veljata enačbi $a_2 + a_5 - a_3 = 20$ in $a_1 + a_6 = 34$. Izračunaj deseti člen zaporedja.

Deseti člen izračunamo s formulo za splošni člen $a_{10} = a_1 + 9d$. Izračunati prvi člen a_1 in razliko d, zato enačbi v nalogi izrazimo le z a_1 in d:

$$a_2 + a_5 - a_3 = 20 \Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 20 \Rightarrow a_1 + 3d = 20$$

$$a_1 + a_6 = 34 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 5d) = 34 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 34$$

Rešitev dobljenega sistema sta števili $a_1 = 2$ in $d = 6$. Zato je $a_{10} = 56$. ■

Vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja imenujemo tudi **aritmetična** vrsta in jo označimo z S_n, torej: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Kako najenostavneje izračunati vsoto aritmetične vrste? Ena od možnosti je vzorec, ki je skrit v naslednji zgodbi:

Eden največjih matematikov vseh časov je bil Karl Friedrich Gauss, ki je živel od leta 1777 do leta 1855. V osnovni šoli je bil nekoč poreden, zato mu je njegov učitelj, pisal se je Büttner, dal nalogo, da sešteje vsa naravna števila od 1 do 100. Mladi Gauss je na začudenje učitelja in njegovega pomočnika pravilni odgovor povedal v nekaj sekundah. Ugotovil je, da vsota parov števil na nasprotnih koncih vsote prinese enake vmesne vsote: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, ... Ker je takih parov $\frac{100}{2} = 50$, je iskana vsota $50 \cdot 101 = 5050$.

Enak vzorec seštevanja lahko uporabimo pri poljubni vsoti členov aritmetičnega zaporedja, torej pri aritmetični vrsti. Oglejmo si za primer naslednjo aritmetično vrsto: $-2 + 1 + 4 + 7 + \ldots + 142 + 145 + 148$. Vsota prvega in zadnjega člena je enaka 146, prav tolika je vsota drugega in predzadnjega člena in tako naprej. Izračunati moramo le število parov. To lahko storimo s formulo za splošni člen $a_n = a_1 + (n-1)d$, saj je $a_1 = -2$, $a_n = 148$, $d = 3$. Nastala enačba $148 = -2 + 3(n-1)$ ima rešitev $n = 51$. Ker je členov zaporedja 51, lahko v pare združimo 50 členov sam pa ostane srednji, 26. člen, ki je enak $a_{26} = -2 + 25 \cdot 3 = 73$. Potem je vsota vrste: $\dfrac{50}{2} \cdot 146 + 73 = \dfrac{50}{2} \cdot 146 + \dfrac{1}{2} \cdot 146 = \dfrac{51}{2} \cdot 146 = 3723$. Opazimo, da tudi v primeru lihega števila členov (n) lahko uporabimo za izračun števila parov formulo $\frac{n}{2}$ in potem za vsoto vrste formulo "število parov "$\times$ "vsota para".

Utemeljimo še, da imajo v aritmetični vrsti pari prvi - zadnji, drugi - predzadnji, tretji - pred predzadnji in tako dalje res enake vsote. Vzemimo, da je zaporedje naraščajoče. Potem je drugi člen od prvega večji za razliko d, ravno za toliko pa je predzadnji člen manjši od zadnjega. Torej je $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$. Podobno pokažemo enakost vsot tudi za ostale pare. Iz povedanega lahko že izluščimo formulo za aritmetično vrsto:

vsota aritmetične vrste

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

ali pa njeno izpeljanko

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)}$$

ki jo dobimo, če namesto a_n zapišemo $a_1 + (n-1) \cdot d$.

Izpeljimo še indukcijski dokaz zapisane formule. Za $n = 1$ je leva stran formule enaka $S_1 = a_1$, desna stran formule pa je tudi enaka a_1, saj je $\frac{1}{2}(2a_1 + (1-1)d) = a_1$. Torej za $n = 1$ formula velja. Predpostavimo, da formula velja za naravno število n, torej velja $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Pokazati moramo, da formula velja tudi za naslednika, torej za $n+1$. Ker je vsoto zaporedja dobimo tako, da seštevamo zaporedne člene zaporedja, naslednjo vsoto $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}$ dobimo tako, da prejšnji vsoti S_n prištejemo naslednji člen a_{n+1} zaporedja, torej je:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) + (a_1 + nd) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d + a_1 + nd =$$

$$= (n+1)a_1 + \frac{n^2 - n + 2n}{2}d = (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d = \frac{n+1}{2}(2a_1 + nd)$$

Torej ima formula za $n+1$ enako obliko kot za n. Tako je izpolnjen tudi drugi indukcijski pogoj, zato formula velja za vsa naravna števila.

Zgled 2.5: Reši enačbo $-4 + 1 + 6 + \ldots + x = 6171$, če so členi vsote na desni strani zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.

Neznanka x je zadnji (n-ti) člen aritmetičnega zaporedja s prvim členom -4, razliko 1 in vsoto 6171. Če naj izračunamo x, moramo najprej izračunati število členov zaporedja (n) in potem uporabiti formulo za splošni (n-ti) člen AZ: $x = a_n = a_1+(n-1)d$. Ko se sprehodimo po formulah za AZ ($a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ in $S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$), opazimo, da le v zadnji nastopa ena neznanka n, zato jo uporabimo za izračun neznanke n:

$$\frac{n}{2}(2 \cdot (-4) + (n-1) \cdot 5) = 6171 \Rightarrow n(-8 + 5n - 5) = 2 \cdot 6171 \Rightarrow 5n^2 - 13n - 12342 = 0$$

Diskriminanta nastale kvadratne enačbe je enaka $D = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12342) = 497^2$, zato je $n = \dfrac{13 + 497}{10} = 51$. Ker je druga rešitev enačbe negativna, je neustreza in jo zavržemo. Z izračunanim n izračunamo še $x = a_n = a_{51} = -4 + 50 \cdot 5 = 246$. ■

Zgled 2.6: Zapiši prvi člen a_1, razliko d in splošni člen a_n aritmetičnega zaporedja, ki ima vsoto prvih n členov enako $S_n = 2n^2 + 3n$.

Vsoto S_n izračunamo tako, da seštejemo prvih n členov zaporedja. Torej je $S_1 = a_1$ in $S_2 = a_1 + a_2$. Ker imamo formulo za S_n, lahko izračunamo S_1 in S_2 ter potem rešimo nastali sistem enačb za a_1 in a_2:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5,\ a_1 + a_2 = S_2 = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 14 \Rightarrow a_1 = 5 \text{ in } a_2 = 9$$

Z izračunanim prvim in drugim členom, izračunamo razliko $d = a_2 - a_1 = 4$ in zapišemo splošni člen $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 4n - 4 = 4n + 1 \Rightarrow a_n = 4n + 1$.

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da primerjamo splošno formulo za AV $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ in zapisano formulo $S_n = 2n^2 + 3n$, ki jo malo preoblikujemo:

$$S_n = 2n^2 + 3n = \frac{n}{2}(4n+6) = \frac{n}{2}(4(n-1)+10) = \frac{n}{2}(10 + 4(n-1)) = \frac{n}{2}\left(2 \cdot \underbrace{5}_{=a_1} + (n-1) \cdot \underbrace{4}_{=d}\right)$$ ■

Zgled 2.7: V prvi vrsti dvorane je 15 sedežev, v vsaki naslednji vrsti so trije sedeži več. V dvorani je 870 sedežev. Koliko vrst ima ta dvorana in koliko sedežev je v njeni zadnji vrsti?

Število sedežev v posamezni vrsti predstavlja AZ, če gledamo vrste od prve proti zadnji. Označimo z a_n število sedežev v n-ti vrsti, z d razliko zaporedja in z S_n število vseh sedežev. Potem je $a_1 = 15$, $d = 3$ in $S_n = 870$. Izračunati moramo število vrst ($= n$) in število sedežev v zadnji vrsti ($= a_n$). Za izračun neznanke n bomo uporabili formulo $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$:

$$\frac{n}{2}\left(\underbrace{2 \cdot 15 + (n-1) \cdot 3}_{3n+27}\right) = 870 \Rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0 \Rightarrow n = 20$$

Druga rešitev nastale kvadratne enačbe ($n = -29$) je za našo nalogo nesmiselna. Zato je število vrst 20, v zadnji vrsti pa je $15 + 19 \cdot 3 = 72$ sedežev. ■

2.1 Povzetki in naloge

Pripomočki:

- Zaporedje $\{a_n\}$ je aritmetično (AZ), če je **razlika** poljubnih dveh zaporednih členov **stalna (konstantna)**:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

  Število d imenujemo **razlika** ali **diferenca** zaporedja.

- V primeru tričlenega AZ a, b, c je srednji člen aritmetična sredina sosednjih členov, torej je $b = \frac{a+c}{2}$ ali $2b = a + c$.

- Osnovne količine AZ so: **prvi člen** (a_1), **razlika** ali **diferenca** (d), **število členov** (n), **zadnji** (**splošni**) člen (a_n), **vsota členov** zaporedja ($S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$)Osnovne količine so povezane z dvema

  enačbama:

  1. Enačba za splošni člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$
  2. Enačbi za vsoto prvih n členov $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ali $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

- Graf AZ zaporedja sestavljajo točke (n, a_n), ki ležijo na **premici**.

Naloge:

1. Dopolni naslednjo tabelo, kjer je a_1 prvi člen, d razlika, a_n zadnji člen, n število členov in S_n vsota členov aritmetičnega zaporedja:

naloga	a_1	d	a_n	n	S_n
a)	12	$7\frac{1}{2}$	$139,5$	-	-
b)	11	-	44	22	-
c)	47	-	-97	-	-625
d)	-	-	498	30	7980
e)	9	4	-	-	21109

$[18, 1363\frac{1}{2};\ \frac{11}{7}, 605;\ -6,25;\ 34,16;\ 409,101]$

2. V naslednjih nalogah so zapisani izrazi zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Izračunaj neznana realna števila x in y:

   (a) $x^2 - 3,\ x - 1,\ 1 - 2x$ $[0,\ 4]$

   (b) $\dfrac{1}{15 - x},\ \dfrac{x - 10}{2},\ \dfrac{5}{2}$ $[13,\ 14,5]$

   (c) $17 + x,\ 1 - 2x,\ \dfrac{x}{2} + 7$ $[-4]$

   (d) $\log_2(x + 2),\ \log_2(2x + 12),\ \log_2(15x^2 + 4)$ $[2]$

   (e) $x + y - 3,\ 2x + y - 12,\ 53 - 3x + 2y,\ x - y - 16$ $[13,\ -9]$

   (f) $2x + 2y,\ 5x + y - 1,\ 4x + 5y - 7,\ 7y - x - 1$ $[\frac{5}{3},\ \frac{7}{3}]$

3. V aritmetičnem zaporedju je tretji člen enak 15, šesti pa polovico četrtega. Zapiši splošni člen. $[a_n = 24 - 3n]$

4. Med števili 3 in 48 vrini osem števil tako, da dobiš aritmetično zaporedje. Zapiši vrinjena števila. $[8, \ldots, 43]$

5. Izračunaj vsoto vseh štirimestnih števil, ki

   (a) so deljiva z 21. [2 360 358]

   (b) pri deljenju z 21 dajo ostanek 5. [2 352 502]

   (c) so deljiva z 12 in 15. [823 500]

   (d) so deljiva z 12 ali 15. [6 601 500]

6. Za kopanje vodnjaka moramo plačati za prvi meter 5 €, za vsak naslednji meter pa 2 € več kot za prejšni meter.Koliko moramo plačati za izkop 10 m globokega vodnjaka? [140 €]

7. Notranji koti nekega večkotnika so zaporedni členi AZ z razliko 10° in najmanjšim kotom 100°. Koliko stranic ima ta večkotnik? (Pomoč: vsota notranjih kotov $n-$kotnika je $180° \cdot (n - 2)$) [8, 9]

8. Stranice trikotnika tvorijo AZ z razliko 1. Izračunaj stranice, če je njegova ploščina $84\,\mathrm{cm}^2$. (Pomoč: Uporabi Heronovo formulo za ploščino trikotnika: $p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, kjer je s polovičen obseg trikotnika. [13, 14, 15]

9. Stranice pravokotnika in diagonala tvorijo AZ. Izračunaj na minuto natančno kot med daljšo stranico in diagonalo. $[36°52']$

10. Manjša osnovnica, krak in daljša osnovnica enakokrakega trapeza so zaporedni členi AZ. Obseg trapeza meri 40 cm, diagonala pa $2\sqrt{41}$ cm. Izračunaj ploščino trapeza. $[80\,\mathrm{cm}^2]$

11. Dolžine polmera osnovne ploskve, višine in stranice pokončnega stožca so zaporedni členi AZ. Izračunaj površino stožca, če meri prostornina 96π cm^3. [96π cm^2]

3 Geometrijsko zaporedje

Značilnost aritmetičnega zaporedja je, da je razlika poljubnih zaporednih členov stalna, značilnost **geometrijskega zaporedja (GZ)** pa je, da je količnik poljubnih zaporednih členov stalen, torej:
Zaporedje je geometrijsko, če je **količnik (kvocient)** zaporednih členov enako število za poljubna zaporedna člena. Količnik običajno označimo s k, uporablja pa se tudi oznaka q.

definicija

$$\boxed{k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Zgled 3.1: Prvi trije členi GZ so zapored x^2, $x+4$ in $2x-4$. Izračunaj x in količnik zaporedja.

Količnik zaporednih členov je pri GZ enak, zato lahko iz enačbe $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ izračunamo neznanko x, torej:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{x+4}{x^2} = \frac{2x-4}{x+4} \Rightarrow (x+4)^2 = x^2(2x-4) \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x^3 - 4x^2$$

Nastalo kubično enačbo uredimo do oblike $2x^3 - 5x^2 - 8x - 16 = 0$ in jo rešimo, recimo z uporabo Hornerjevega algoritma ugotovimo, da je ena rešitev $x = 4$:

	2	−5	−8	−16
4		8	12	16
	2	3	4	‖0

Da je $x = 4$ edina realna rešitev ugotovimo z diskriminanto $D = 9 - 32 = -23$ nastale enačbe $2x^2 + 3x + 4 = 0$. Zato je naše zaporedje: $4^2 = 16$, $4 + 4 = 8$, $2 \cdot 4 - 4 = 4$, ki ima količnik $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. ■

Vzemimo, da števila a, b in c (v tem vrstnem redu) sestavljajo GZ. Potem je $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Zadnjo enačbo osvobodimo ulomkov in dobimo: $b^2 = a \cdot c$ ali $b = \sqrt{a \cdot c}$. Če med števili a, b, c velja enačba $b^2 = a \cdot c$, imenujemo število b geometrijska sredina števil a in c, torej:

geometrijska sredina

$$\boxed{b^2 = a \cdot c \quad \text{ali} \quad b = \sqrt{a \cdot c}}$$

Geometrijsko zaporedje ima lastnost, da je poljubni, neprvi, člen zaporedja enak geometrijski sredini svojih sosedov, torej je

$$\boxed{a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Zgled 3.2: V okvire postavi taka števila, da bodo z ostalimi števili sestavljala geometrijsko zaporedje:

a) $2,\ 4,\ \square,\ \square, \dots$

b) $2,\ \square,\ 12,\ \square, \dots$

c) $-24,\ 12,\ \square,\ \square, \dots$

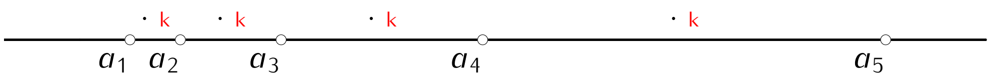
d) $2,\ \square,\ \square,\ -54, \dots$

V prvem primeru iz drugega in prvega člena izračunamo količnik $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$. Ker je razmerje med tretjim in drugim členom tudi enako količniku k, je $\frac{a_3}{a_2} = k \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8$. Podobno kot smo izračunali tretji člen, izračunamo tudi četrti člen, torej predhodnega, tretjega, pomnožimo s količnikom: $a_4 = a_3 \cdot k = 16$.

V drugem primeru poznamo prvi in tretji člen, drugi člen pa je njuna geometrijska sredina, torej je $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 = 24$, zato je a_2 enak bodisi $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, bodisi $-\sqrt{24} = -2\sqrt{6}$. Z izračunanim drugim členom lahko izračunamo količnik, ki je bodisi $\frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$, bodisi $\frac{-2\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}$. Potem je četrti člen enak bodisi $12 \cdot \sqrt{6}$, bodisi $-12 \cdot \sqrt{6}$.

Iskana števila v drugem primeru lahko poiščemo tudi z naslednjim razmislekom. Tretji člen dobimo tako, da drugega pomnožimo s količnikom ($a_3 = a_2 \cdot k$), drugega pa podobno dobimo iz prvega, torej $a_2 = a_1 \cdot k$. Obe enačbi združimo in ugotovimo, da je $a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k \cdot k = a_1 \cdot k^2$. Ker prvi in treji člen poznamo, je $k^2 = \frac{12}{2} = 6$ in je zato $k_1 = \sqrt{6}$ ter $k_2 = -\sqrt{6}$. Upoštevamo, da je $a_2 = a_1 \cdot k$ in $a_4 = a_3 \cdot k$ in dobimo, da sta števili v okviru bodisi $2\sqrt{6}$ in $12\sqrt{6}$, bodisi $-2\sqrt{6}$ in $-12\sqrt{6}$.

Zadnja dva primera prepuščamo v reševanje bralcu. V prvem primeru sta iskani števili -6 in 3, v drugem pa -6 in 18. ■



Slika 5: Prikaz začetnih členov GZ na številski premici

V zadnjem zgledu je nakazan napotek, kako iz danega prvega člena a_1 in danega količnika k izračunamo splošni (poljubni) člen GZ. Videli smo, da drugi člen dobimo iz prvega tako, da ga pomnožimo s količnikom, torej $a_2 = a_1 \cdot k$, tretje člen dobimo tako, da drugega pomnožimo s količnikom ($a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k \cdot k = a_1 \cdot k^2$), četrtega pridelamo z množenjem količnika s tretjim členom ($a_4 = a_3 \cdot k = a.k^2 \cdot k = a_1 \cdot k^3$) in tako dalje. Preprost razmislek nam odkrije formulo:

splošni člen GZ

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot k^{n-1}}$$

Če hočemo korektno utemeljiti zapisano formulo, moramo uporabiti matematično indukcijo. Ker formula velja za $n = 1$ ($a_1 = a_1 \cdot k^0 = a_1 \cdot k^{1-1}$), moramo pokazati še, da iz predpostavke veljavnosti formule $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ pokažemo, da formula velja tudi za naslednika, torej, da člen a_{n+1} izračunamo z istim predpisom kot člen a_n. Ker je $a_{n+1} = a_n \cdot k$, je potem $a_{n+1} = a_n \cdot k = (a_1 \cdot k^{n-1}) \cdot k = a_1 \cdot kn = a_1 \cdot k^{(n+1)-1}$. Torej za a_{n+1} velja enak predpis kot velja za a_n. Oba indukcijska koraka sta izpolnjena, zato res velja formula za splošni člen GZ.

Ni se težko prepričati, da je v primeru, ko je $k > 1$ zaporedje **naraščajoče**, če je $0 < k < 1$ **padajoče**, primer $k = 1$ ni zanimiv (konstantno zaporedje), primer $k = 0$ pa je nemogoč. V primeru, ko je $k < 0$, je zaporedje **alternirajoče** (naslednji člen ima nasproten znak predhodnemu členu).

Zgled 3.3: Naj bo 14, 7, ... geometrijsko zaporedje.

a) Izračunaj količnik k in zapiši splošni člen a_n.

b) Izračunaj 88. člen.

c) Ali je število $\frac{7}{512}$ člen tega zaporedja in, če je, kateri po vrsti?

d) Koliko členov tega zaporedja je večjih od 10^{-4}?

Ker je $a_1 = 14$ in $a_2 = 7$, je količnik enak $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Splošni člen je enak $a_n = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 7 \cdot 2 \cdot 2^{1-n} = 7 \cdot 2^{2-n}$ Potem je $a_{88} = a_1 \cdot k^{87} = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{87} \doteq 9 \cdot 10^{-26}$.

Če naj bo število $\frac{7}{512}$ člen zaporedja, mora imeti enačba $a_n = \frac{7}{512}$ rešitev v množici naravnih števil. Če uporabimo eno od formul za zgoraj zapisan splošni člen a_n, dobimo eksponentno enačbo $7 \cdot 2^{2-n} = \frac{7}{512}$, ki po preoblikovanju postane enačba $2^{2-n} = 2^{-9}$. Zato je $2 - n = -9$ in $n = 11$. Torej je 11. člen enak iskanemu številu.

Za odgovor na zadnje vprašanje moramo rešiti neenačbo $a_n > 10^{-4}$. Neenačbo preoblikujemo v eksponentno neenačbo $7 \cdot 2^{2-n} > 10^{-4}$, to pa v neenačbo $2^{2-n} > \frac{10^{-4}}{7}$. Obe strani logaritmiramo z recimo desetiškim logaritmom, ki ohrani znak neenakosti; dobimo:

$$\log 2^{2-n} > \log\left(\frac{10^{-4}}{7}\right) \Rightarrow (2-n)\cdot log2 > \log\left(\frac{10^{-4}}{7}\right) \Rightarrow 2-n > \frac{\log\left(\frac{10^{-4}}{7}\right)}{\log 2} \doteq -16,1$$

Zato je $n - 2 < 16,1$ in $n < 18,1$. Torej je osemnajst členov tega zaporedja večjih od $10^{-4} = 0,0001$. ■

Zgled 3.4: Med števili 20 in 1620 vrini tri števila tako, da nastala števila sestavijo geometrijsko zaporedje. Zapiši vrinjena števila.

Vrinjena števila skupaj s številoma 20 in 1620 tvorijo GZ. Pri tem je $a_1 = 20$ in $a_5 = 1620$. Uporabimo formulo za splošni člen, da dobimo enačbo, v kateri je neznanka količnik tega zaporedja: $20 \cdot k^4 = 1620$. Rešitvi enačbe sta števili $k_1 = \sqrt[4]{81} = 3$ in $k_1 = -\sqrt[4]{81} = -3$. Druga rešitev odpade, saj v tem primeru drugi člen zaporedja $(= a_1 \cdot k = 20 \cdot (-3) = -60)$ ni med številoma 20 in 1620. Zato je $k = 3$ in so vrinjena števila: $20 \cdot 3 = 60$, $60 \cdot 3 = 180$, $180 \cdot 3 = 540$.

Slika 6: Interpolacija intervala $[20, 1620]$ z geometrijskim zaporedjem petih (treh vrinjenih) števil

Ko vrinemo med dve dani števili a in b $(a < b)$ nekaj števil tako, da števili a in b skupaj z vrinjenimi sestavljajo geometrijsko zaporedje, pravimo, da smo interval $[a, b]$ **interpolirali** z geometrijskim zaporedjem. V našem primeru smo interval $[20, 1620]$ interpolirali s števili 60, 180, 540. ■

Zgled 3.5: Izračunaj prvi člen a_1 in količnik k geometrijskega zaporedja, če je $a_1 - a_3 + a_5 = -65$ in $a_1 + a_7 = -325$.

Uporabimo formulo za splošni člen in dobimo enačbi:$a_1 - a_1k^2 + a_1k^4 = -65$ in $a_1 + a_1k^6 = -325$. V obeh enačbah izpostavimo a_1 in potem bodisi iz prve bodisi iz druge enačbe izrazimo a_1, recimo iz druge: $a_1 = \dfrac{-325}{1+k^6}$. Dobljeno vstavimo v prvo enačbo. Dobimo enačbo z neznanko k: $\dfrac{-325}{1+k^6} \cdot (1-k^2+k^4) = -65$. Enačbo uredimo (delimo z -65 in odpravimo ulomke):

$$\frac{-325}{1+k^6} \cdot (1-k^2+k^4) = -65 \Rightarrow 5 \cdot (1-k^2+k^4) = 1+k^6 \Rightarrow k^6 - 5k^4 + 5k^2 - 4 = 0$$

Vpeljimo novo neznanko $k^2 = t$, da dobimo enačbo tretje stopnje $t^3 - 5t^2 + 5t - 4 = 0$, ki rešujemo s Hornerjevim algoritmom s $t = 4$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 5 & -4 \\ 4 & & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \|0 \end{array}$$

Nastala kvadratna enačba $t^2 - t + 1 = 0$ nima rešitev v realnih številih, zato je edina rešitev $t = 4$ in potem $k_1 = 2$ in $k_2 = -2$. V prvem primeru je $a_1 = \frac{-325}{1+2^6} = -5$, pa tudi v drugem primeru je $a_1 = \frac{-325}{1+(-2)^6} = -5$. ■

S S_n smo označili vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja in dobljeno vsoto imenovali aritmetična vrsta. Enako oznako (S_n) uporabimo tudi za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja in jo imenujemo geometrijska vrsta. Kako izraziti vsoto geometrijske vrste? Eden od načinov je naslednji. Ker je

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-2} + a_1k^{n-1}$$

je potem

$$k \cdot S_n = a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + \ldots + a_1k^{n-1} + a_1k^n$$

Od druge zapisane enačbe odštejemo prvo zapisano enačbo in upoštevamo, da pri odštevanju označena dela izgineta. Don+bimo:

$$k \cdot S_n - S_n = a_1k^n - a_1 \Rightarrow S_n = a_1\frac{k^n-1}{k-1}$$

Tako smo dobili formulo za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja:

vsota geometrijske vrste

$$\boxed{S_n = a_1\frac{k^n-1}{k-1} = a_1\frac{1-k^n}{1-k}}$$

Prvo zapisano formulo uporabimo v primeru, ko je $|k| > 1$, drugo v primeru, ko je $|k| < 1$. V primeru $k = 1$ formule nemoremo uporabiti, pa tudi samo zaporedje je v tem primeru nezanimivo, saj je zaporedje tedaj konstantno.

Zgled 3.6: V geometrijskem zaporedju s prvim členom 4 in količnikom 2 je zadnji člen enak 1024. Izračunaj vsoto vseh členov tega zaporedja.

Če naj uporabimo formulo za vsoto $S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1}$, moramo poznati a_1, k in n. Prvi člen in količnik poznamo ($a_1 = 4$, $k = 2$), izračunati moramo še število členov (n). Ker poznamo zadnji člen (a_n) in formulo za splošni člen zaporedja ($a_n = a_1 k^{n-1}$), dobimo za neznanko n eksponentno enačbo: $1024 = 4 \cdot 2^{n-1}$, ki jo preoblikujemo do enačbe $2^{n-1} = 2^8$. Zato je $n = 9$ in je potem vsota členov enaka: $S_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1} = 4 \cdot \frac{2^9-1}{2-1} = 4 \cdot 511 = 2044$. ■

Zgled 3.7: Bolha in kobilica tekmujeta, katera bo prva premagala razdaljo 80 m. Prvi bolhin skok meri 80 cm in traja 0,8 s. Njen vsak naslednji skok je enako dolg, le traja 2% več kot predhoden skok. Pri kobili prvi skok meri 2,02 m in traja 1,5 s. Njen vsak naslednji skok traja enako dolgo, le da je za 2% krajši kot predhoden skok. Katera bo zmagala: bolha ali kobilica? Odgovor utemelji.

Zmagala bo tista, ki bo osemdeset metersko razdaljo opravila v krajšem času. Zato moramo izračunati čas skakanja za bolho in za kobilico.

Prvi skok bolhe traja $0,8\,\text{s}$, drugi traja 2% dlje, torej je njegov čas $0,8 \cdot 1,02 = 0,816\,\text{s}$, treji skok traja $0,816 \cdot 1,02 = 0,83232\,\text{s}$ in tako dalje. Časi posameznega skoka sestavljajo geometrijsko zaporedje s prvim členom $0,8\,\text{s}$ in količnikom $102\% = 1,02$. Skupen čas bomo dobili, ko bomo sešteli vse člene tega zaporedja. Vsaj koliko pa mora biti skokov, torej členov zaporedja? Vsi skoki skupaj morajo vsaj doseči 80 m, torej če jih je n in je posamezni skok dolg 80 cm = 0,8 m, velja neenačba $n \cdot 0,8\,\text{m} \geq 80\,\text{m}$. Zato je $n \geq 100$. Najmanjši skupen čas, recimo T_b je potem:

$$T_b = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1} = 0,8 \cdot \frac{1,02^{100}-1}{1,02-1} \doteq 249,77\,s$$

V primeru kobilice so časi skokov enako dolgi, dolžine skokov pa tvorijo geometrijsko zaporedje s prvim členom 2,02 m in količnikom $98\% = 0,98$. Število skokov (n) mora biti v tem primeru tako število, ki reši neenačbo $S_n \geq 80$, kjer smo s S_n označili vsoto dolžin vseh skokov:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1} = 2,02 \cdot \frac{1-0,98^n}{1-0,98} = 101(1-0,98^n)$$

Rešujemo neenačbo $101(1-0,98^n) \geq 80$:

$$101(1-0,98^n) \geq 80 \Rightarrow (1-0,98^n) > \frac{80}{101} \Rightarrow -0,98^n \geq \frac{80}{101} - 1 \Rightarrow 0,98^n \leq \frac{21}{101}$$

Neenačbo logaritmiramo, recimo z desetiškim logaritmom in uporabimo pravila logaritmiranja. Dobimo

$$n \cdot \log 0,98 \leq \log\left(\frac{21}{101}\right) \Rightarrow n \geq \frac{\log\left(\frac{21}{101}\right)}{\log 0,98} \doteq 77,74$$

Torej mora kobilica napraviti vsaj 78 skokov, ki trajajo $78 \cdot 1,5 = 117\,\mathrm{s}$. S primerjavo časov ugotovimo, da je zmagovalka tekme kobilica. ■

3.1 Povzetki in naloge

Pripomočki:

- Zaporedje $\{a_n\}$ je geometrijsko (GZ), če je količnik poljubnih dveh zaporednih členov **stalen (konstanten)**:
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$$
Število k imenujemo **količnik** ali **kvocient** zaporedja.
- V primeru tričlenega GZ a, b, c je srednji člen aritmetična sredina sosednjih členov, torej je $b = \sqrt{a \cdot c}$ ali $b^2 = b \cdot c$.
- Osnovne količine GZ so: **prvi člen** (a_1), **količnik**(k), **število členov** (n), **zadnji** (**splošni**) člen (a_n), **vsota členov** zaporedja ($S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$)

  Osnovne količine so povezane z dvema enačbama:

  1. Enačba za splošni člen: $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
  2. Enačbi za vsoto prvih n členov $S_n = a_1 \dfrac{k^n - 1}{k-1} = a_1 \dfrac{1-k^n}{1-k}$

Naloge:

1. Dopolni naslednjo tabelo, kjer je a_1 prvi člen, k količnik, a_n zadnji člen, n število členov in S_n vsota členov aritmetičnega zaporedja:

naloga	a_1	k	n	a_n	S_n
a)	8192	$\frac{1}{2}$	13	-	-
b)	7	5	-	4375	-
c)	-	$3,2$	5	-	95041
d)	-	4	9	24576	-
e)	-	$1,5$	-	11664	32944

$[2, 16383;\ 5, 5467;\ 625, 65536;\ 0, 375, 32767, 875;\ 1024, 7]$

2. V naslednjih nalogah so zapisani izrazi zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Izračunaj neznana realna števila x:

   (a) $x-4,\ x-2,\ x+2.$ [6]

   (b) $4,\ x,\ 9.$ [± 6]

   (c) $\sqrt[x]{16},\ 2^{x+1},\ 0,25^{-x}.$ [2]

3. Med števili 3 in 48 vrini tri pozitivna števila tako, da bo nastalo geometrijsko zaporedje. Zapiši vrinjena števila. [6, 12, 24]

4. Prvi člen GZ je 1, četrti pa -64. Zapiši splošni člen zaporedja in ugotovi, koliko členov zaporedja je po absolutni vrednosti manjših od 100 000. [$a_n = (-4)^{n-1}$, 9]

5. Izračunaj naslednji vsoti, če so členi vsote zaporedni členi GZ:

   (a) $2+4+8+\ldots+1024.$ [2046]

   (b) $144+72+36+\ldots+\dfrac{9}{16}.$ [$287\frac{7}{16}$]

6. Ali je zaporedje $a_1 = \sqrt{2}+1,\ a_2 = \dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}},\ a_3 = 3\sqrt{2}+3$ geometrijsko? Odgovor utemelji! [$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \sqrt{3}$]

7. Zapiši GZ štirih členov, če veš, da je prvi za 36 večji od drugega, tretji pa za 4 večji od četrtega. [54, 18, 6, 2; 27, -9, 3, 1]

8. Najemnik stanovanja ponudi lastniku stanovanja za najem stanovanja za 30 dni naslednjo pogodbo:

   ”Prvi dan najema Vam plačam 100 €, drugi dan 200 €, tretji dan 300 €in tako naprej, torej vsak naslednji dan za 100 €več kot prejšni dan. Vi pa boste meni plačali stroške, in sicer prvi dan 1 cent, drugi dan 2 centa, tretji dan 4 cente in tako naprej, torej vsak naslednji dan dvakrat toliko kot prejšni dan.”

   Lastnik pristane na pogodbo. Kakšen je bil obračun na koncu meseca? [lastnik mora plačati najemniku]

9. Dolžina, širina in višina kvadra so zaporedni členi GZ. Poišči robove kvadra, če je površina kvadra $252\,\mathrm{dm}^2$, prostornina pa $216\,\mathrm{dm}^3$. [3, 6, 12 vse v dm]

10. Tri števila, katerih vsota je 15, tvorijo AZ. Če tem številom dodamo zapored 1, 4 in 19, dobimo GZ. Zapiši začetna števila. [2, 5, 8; 26, 5, -16]

4 Geometrijska vrsta

V matematiki vsoto členov nekega zaporedja imenujemo **vrsta**. Če ima zaporedje končno členov, je vrsta **končna**, če pa je členov zaporedja neskončno, je vrsta **neskončna**. Primera končnih vrst sta vsoti prvih n-členov aritmetičnega ali pa geometrijskega zaporedja. **vrsta**

V primeru neskončne vrste ne moremo seštevati z običajnimi metodami, ker moramo vedno še nekaj dodati. Če ima neskončna vrsta končno vsoto, jo imenujemo **konvergentna** vrsta, če pa vsote ne moremo določiti ali pa vsota raste preko vsake meje, je vrsta **divergentna**.

Kako poiščemo vsoto neskončne vrste? Vzemimo neskončno zaporedje

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

in ustrezno neskončno vrsto vrsto $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Ustvarimo zaporedje **delnih vsot** S_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$ tako, da je **delne vsote**

$$\begin{array}{lllll} S_1 & = & a_1 & & \\ S_2 & = & S_1 + a_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & S_2 + a_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ S_{n+1} & = & S_n + a_{n+1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \end{array}$$

Za prvo delno vsoto uporabimo kar prvi člen zaporedja, druga je vsota prvega in drugega člena, tretjo dobimo tako, da drugi delni vsoti prištejemo tretji člen zaporedja in tako dalje, skratka naslednjo delno vsoto dobimo tako, da prejšnji delni vsoti prištejemo naslednji člen zaporedja. Za zgled vzemimo naslednjo nalogo:

Zgled 4.1: **Naj bo $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Izračunaj prvih pet delnih vsot, ugani formulo za splošno delno vsoto in predpostavko dokaži z matematično indukcijo.**

Ker moramo izračunati le prvih pet delnih vsot, izračunamo prvih pet členov zaporedja:

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{15},\ a_3 = \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{35},\ a_4 = \frac{1}{7\cdot 9} = \frac{1}{63},\ a_5 = \frac{1}{9\cdot 11} = \frac{1}{99}$$

Potem je:

$$\begin{array}{lllllll} S_1 & = & a_1 & = & \frac{1}{3} & & \\ S_2 & = & S_1 + a_2 & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} & = & \frac{2}{5} \\ S_3 & = & S_2 + a_3 & = & \frac{2}{5} + \frac{1}{35} & = & \frac{3}{7} \\ S_4 & = & S_3 + a_4 & = & \frac{3}{7} + \frac{1}{63} & = & \frac{4}{9} \\ S_5 & = & S_4 + a_5 & = & \frac{4}{9} + \frac{1}{99} & = & \frac{5}{11} \end{array}$$

Formulo za splošno delno vsoto uganemo iz zapisanih oblik za prvih pet delnih vsot. Vidimo, da so delne vsote ulomki. V števcih prvih petih delnih vsot so zapored števila 1, 2, 3, 4, 5, zato sklepamo, da je v n-ti delni vsoti v števcu število (izraz) n. Podobno sklepamo za imenovalce. V prvih petih imenovalcih so števila 3, 5, 7, 9 in 11, zato sklepamo, da je v n-ti delni vsoti v imenovalcu število (izraz) $2n+1$. Torej je naša trditev, da je $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Trditev pokažemo z matematično indukcijo. Za prvih nekaj členov trditev velja. Predpostavimo, da velja tudi število n, torej velja $S_n = \frac{n}{2n+1}$. Potem je:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Ker ima formula za S_{n+1} enako obliko kot za S_n, je izpolnjen tudi drugi korak indukcije, zato je res $S_n = \frac{n}{2n+1}$. ■

konvergentna
divergentna
vrsta

Če ima neskončna vrsta končno vsoto, jo imenujemo **konvergentna** vrsta, če pa vsote ne moremo določiti ali pa vsota večja od vsakega v naprej določenega števila, je vrsta **divergentna**.

Konvergentnost ali je divergentnost neskončne vrste ugotovimo iz obnašanja delnih vsot. Če se delne vsote z rastočim indeksom **stabilizirajo**(**umirijo**) okrog nekega števila (**vedno bolj** so **enake** temu številu), je vrsta konvergentna, njena vsota pa je to število. Če delne vsote rastejo **preko vsake meje** ali pa, če se stabilizirajo okrog **večih števil**, pravimo, da divergirajo, torej nimajo vsote. Bolj učeno pravimo, da imajo v primeru konvergentne vrste delne vsote **limito**, ki je število, recimo S, okrog katerega se pri velikih n delne vsote stabilizirajo. Z oznakami to zapišemo takole:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Zgled 4.2: Razišči konvergenco vrste

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$$

Za to vrsto smo ugotovili, da je splošna, n-ta delna vsota enaka $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Tabelirajmo nekaj delnih vsot in jih zaokrožimo na štiri decimalna mesta:

n	10	50	100	1000	10000	100000
S_n	0.4762	0.4950	0.4975	0.4996	0.5000	0.5000

Delne vsote se z rastočim n stabilizirajo okrog $\frac{1}{2}$, zato je vsota vrste enaka $\frac{1}{2}$. ■

Naslednja primera poiščemo v stari Grčiji:

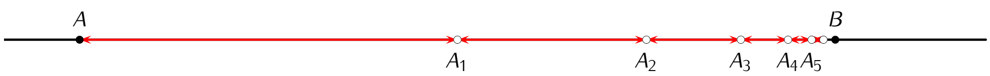
Zgled 4.3: V petem stoletju pred našim štetjem je živel filozof Zenon iz Elee. V enem od svojih del je opisal svoje štiri znamenite aporije (paradokse, nerešljivo nasprotje pri logični sodbi) o dihotomiji, Ahilu in želvi, puščici in stadionu. Mi se bomo posvetili prvima dvema:

a) (dihotomija): Gibajoče telo ima v vsaki točki svoje poti do cilja pred seboj še neko razdaljo, ki jo je mogoče razdeliti na pol. Teh polovic, ki so sicer vedno krajše in jih mora telo preiti, da bi prišlo na cilj, je neskončno, zato telo nikoli ne bo prišlo na cilj.

b) (Ahil in želva): Najhitrejši tekač (Ahil) nikoli ne ujame najpočasnejšega (želva), če je na začetku počasnejši tekač pred hitrejšim, kajti v času, ki je potreben, da doseže začetno točko počasnejšega tekača, ta že premeri novo razdaljo in tako vselej obdrži (vedno manjšo) prednost.

Razloži nesmisle v gornjih trditvah.

Če velja sklep v prvem primeru, nihče nikoli ne bi prišel do mesta, v katerega potuje, kar pa vemo, da je nemogoče. Zenon je v svojem sklepanju razdaljo a med začetnim



Slika 7: K razlagi Zenonovih paradoksov

mestom A in ciljem B razdelil na neskončno mnogo delov:

$$|AA_1| = \frac{a}{2},\ |A_1A_2| = \frac{a}{4},\ |A_2A_3| = \frac{a}{8},\ |A_3A_4| = \frac{a}{16},\ \ldots$$

Vsota teh delov je neskončna vrsta

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16} + \ldots$$

Seveda ta vrsta konvergira, njena vsota je začetna razdalja a.

Če je Zenon v prvem primeru razdelil (končno) razdaljo na neskončno število vedno manjših delčkov, je v drugem primeru to naredil s časom, v katerem Ahil ujame želvo. Vzemimo zaradi večje enostavnosti, da je Ahil stokrat hitrejši od želve, torej je Ahilova hitrost 100 enot/s, če je želvina hitrost 1 enota/s. Vzemimo še, da je Ahil dal želvi prednost 1000 dolžinskih enot. Preprost razmislek pove, da je rešitev enačbe $100 \cdot t = 1000 + 1 \cdot t$ čas, v katerem Ahil ujame želvo ($t = \frac{1000}{99} s = 10\frac{10}{99}$ s). Ta čas je Zenon razdelil na neskončno mnogo časov: $t_1 = \frac{1000}{100} = 10$ s je čas, v katerem Ahil pride iz točke A do začetega položaja želve (točka A_1). Med tem se želva odmakne $1 \cdot t_1 = 100$ enot do točke A_2. Potem je $t_2 = \frac{100}{100} = 1$ s čas, v katerem Ahil pride do novega položaja želve, ki se medtem premakne za $1 \cdot 1$ enoto do točke A_3. S $t_3 = \frac{1}{100} = 0.01$ s, označimo čas, v katerem Ahil pride do novega položaja želve. Z opisanim postokom nadaljujemo v neskončnost. Celoten čas je potem neskončna vrsta $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$, ki je seveda na običajen način nikoli ne moremo sešteti. Ima pa nastala vrsta končno vsoto, in sicer čas $t = \frac{1000}{99}$ s, torej čas, v katerem Ahil ujame želvo. ■

Ni se težko prepričati, da je neskončna vrsta konvergentna, če so njeni členi vse bolj blizu števila 0 (potreben pogoj). Da pa to ni tudi zadosti (zadosten pogoj), se prepričamo v naslednjem primeru:

Zgled 4.4: Razišči konvergenco harmonične vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Člene vrste od števila 1 naprej razdelimo v naslednje skupine:

- V prvi skupini naj bo le eno (1) število: $\frac{1}{2}$.
- V drugi skupini skupini so naslednji dve (2) števili: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$
- V tretjo skupino skupino postavimo naslednja štiri (4) števila: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$
- V četrti skupini naj bo naslednjih osem (8) števil: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$

Postopek nadaljujemo po zgoraj opisanem vzorcu. Dodajmo, da je na **koncu** vsake skupine člen $\frac{1}{2^k}$, če je k številka skupine. V k-ti skupino dodamo naslednjih 2^{k-1} števil:

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}, \frac{1}{2^{k-1}+2}, \frac{1}{2^{k-1}+3}, \ldots, \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

V vsaki skupini je najmanjši zadnji člen, zato je:

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+3} + \ldots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

količina	$a)$	$b)$	$c)$	$d)$
a_1	1	1	1	1
k	1.01	0.99	-1.01	-0.99
a_{10}	1.0937	0.9135	-1.0937	-0.9135
a_{100}	2.6780	0.3697	-2.6780	-0.3697
a_{1000}	20751.6392	$4.4 \cdot 10^{-5}$	-20751.6392	$-4.4 \cdot 10^{-5}$
a_{10000}	$1.62 \cdot 10^{43}$	$2.27 \cdot 10^{-44}$	$-1.62 \cdot 10^{43}$	$-2.27 \cdot 10^{-44}$
S_{10}	10.4622	9.5618	-0.0521	0.0480
S_{100}	170.4814	63.3968	-0.8482	0.3186
S_{1000}	2095815.5638	99.9957	-10426.9431	0.5025
S_{10000}	$1.64 \cdot 10^{45}$	100	$-8.14 \cdot 10^{42}$	0.5025

Slika 8: Tabela k zgledu 5

Delna vsota členov v prvih k skupinah je tako večja od $k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$, zato vsota harmonične vrste raste preko vsake meje in zato divergira. ■

Za nas bo najzanimivejša **neskončna geometrijska vrsta** s prvim členom a in količnikom k: **geometrijska vrsta**

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + a^{k-1} + a^k + \ldots$$

Obnašanje vrste raziščimo v naslednjem primeru:

Zgled 4.5: Vzemimo geometrijska zaporedja:

a) $1, 1.01, \ldots$

b) $1, 0.99, \ldots$

c) $1, -1.01, \ldots$

d) $1, -0.99, \ldots$

Za vsako od zaporedij izračunaj količnik, 10., 100., 1000., 10000. člen, delne vsoto neskončne vrste za prvih deset, prvih sto, prvih tisoč in prvih deset tisoč členov. Komentiraj rezultate.

V prvem primeru je $k = 1.01/1 = 1.01$, v drugem primeru je $k = 0.99/1 = 0.99$, v tretjem primeru je $k = -1.01/1 = -1.01$ in v zadnjem primeru je $k = -0.99/1 = -0.99$. V vseh primerih je prvi člen enak 1. Iskane račune opravimo z osnovnima formulama GZ, izračune pa zapišemo v tabelo.
Kljub temu, da sta prva člena zaporedja enaka in se količnika zelo malo razlikujeta (za 0.02), postajajo v prvem primeru ($k = 1.01 > 1$) členi vedno večji in zato tudi vsota

raste preko vsake meje, v drugem primeru ($0 < k = 0.99 < 1$) pa postajajo členi vedno manjši. Vsota velikega števila členov se stabilizira okrog števila 100.

V tretjem primeru ($k = -1.01 < -1$) predznak členov alternira (spreminja predznak), členi pa po absolutni vrednosti postajajo čedalje večji. Kljub temu, da so v tabeli vse vsote tega primera negativne, tudi predznaki zaporednih vsot alternirajo, absolutne vrednosti vsot pa rastejo preko vsake meje. Tako je, recimo S_{10000} negativna, naslednja vsota $S_{10001} = 1 \cdot \frac{(-1.01)^{10001}-1}{-1.01-1} = 8.22 \cdot 10^{42}$ pa je pozitivna. Po absolutni vrednosti se vsoti le malo razlikujeta, obe pa sta veliki.

V zadnjem primeru ($-1 < k = -0.99 < 0$) predznak členov prav tako alternira, členi pa po absolutni vrednosti postajajo čedalje manjši. Tako kot smo to ugotovili v drugem primeru, tudi v tem primeru opazimo, da se vsote pri velikem številu sumandov stabilizirajo okrog nekega števila, v tem primeru okoli števila 0.5. ■

Delne vsote geometrijske vrste zapišemo s formulo za vsoto prvih n členo GZ:

$$S_n = \frac{a(1-k^n)}{1-k}$$

Delna vsota se spreminja le s količino k^n. Ta pa po absolutni vrednosti postaja vedno večja (z rastočim n), če je $|k| > 1$ in vedno manjša, če je $|k| < 1$. Torej v primeru $|k| > 1$ geometrijska vrsta divergira, v primeru $|k| < 1$ pa konvergira k številu $\frac{a}{1-k}$. Ugotovljeno zapišimo:

Geometrijska vrsta $a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots$ konvergira natanko tedaj, ko je $\boxed{|k| < 1}$, njena vsota pa je tedaj enaka:

$$\boxed{S = a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots = \frac{a}{1-k}}$$

Zgled 4.6: Razišči konvergenco naslednjih geometrijskih vrst in v primeru, da konvergirajo, izračunaj njihovo vsoto:

a) $1 - 1 + 1 - \ldots$

b) $4 - 2\frac{2}{3} + 1\frac{7}{9} - \ldots$

c) $(2+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) + (1+\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ldots$

d) $1 - \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8} - \ldots$

V prvem primeru je $k = -1$ in $|k| = 1$, zato vrsta ne konvergira. Pogled na delne vsote pokaže, da se delne vsote umirjajo okrog dveh števil: 1 in -1. Zato vrsta ne konvergira.

V drugem primeru je $k = \dfrac{-\frac{8}{3}}{4} = -\dfrac{2}{3}$ in $|k| = \frac{2}{3} < 1$, zato vrsta konvergira, njena vsota pa je $S = \dfrac{4}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{12}{5} = 2\dfrac{2}{5}$.

Količnik vrste je tretjem primeru enak

$$k = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}| \cdot (2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}| \cdot (2-\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{4-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ker je $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, vrsta konvergira, njena vsota pa je

$$S = \frac{2+\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}| \cdot (2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}| \cdot (2+\sqrt{2})} = \frac{8+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4}{4-2} = 6+4\sqrt{2}$$

V zadnjem primeru je količnik vrste enak

$$k = \frac{-\sin^2\frac{\pi}{8}}{1} = -\sin^2\frac{\pi}{8} = -\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = -\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = -\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Pri računanju smo uporabili trigonometrično formulo $\sin x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$ za $x = \frac{\pi}{8}$ in vrednost $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ker je $|k| = \frac{2-\sqrt{2}}{4} < 0.15 < 1$, vrsta konvergira, zato lahko uporabimo formulo za njeno vsoto:

$$1-\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}-\ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{6-\sqrt{2}} = \frac{4(6+\sqrt{2})}{32} = \frac{6+\sqrt{2}}{8} \qquad \blacksquare$$

Zgled 4.7: Izračunaj $\dfrac{0,2\overline{27}}{0,\overline{63}}$

V prvem letniku smo periodična decimalna števila spreminjali v ulomke z zaporednim množenjem z 10. Tako smo decimalno število $0,2\overline{27} = 0,2727\ldots$ označili z x ($x = 0,2\overline{27}$), potem pa smo x zapored množili z 10, dokler nismo pri dveh tako dobljenih enačbah dobili enake periode. V našem primeru je $10x = 2,\overline{27}$, $100x = 22,\overline{72}$, $1000x = 227,\overline{27}$. Enako periodo imata enačbi $10x = 2,\overline{27}$ in $1000x = 227,\overline{27}$. Ko ju odštejemo, dobimo enačbo $990x = 225$ in odtod $x = \dfrac{225}{990} = \dfrac{5}{22}$.

Drugi način pretvorbe periodične decimalne številke v ulomek uporablja neskončno geometrijsko vrsto. Prvo decimalno mesto imenujemo desetine, drugo stotine, tretje tisočine, nato nastopijo desttisočine in tako dalje. Zato lahko zapišemo

$$0,2\overline{27} = \frac{2}{10} + \frac{27}{1000} + \frac{27}{100000} + \dots \qquad 0,\overline{63} = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$

Opazimo, da je od ulomka $\frac{2}{10}$ naprej zapisana geometrijska vrsta s prvim členom $\frac{27}{1000}$ in količnikom $\frac{1}{100}$. Ker je $|k| < 1$ konvergira, njena vsota pa je enaka

$$\frac{\frac{27}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{1000 - 10} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}$$

Potem je

$$0,2\overline{27} = \frac{2}{10} + \frac{27}{1000} + \frac{27}{100000} + \dots = \frac{2}{10} + \frac{3}{110} = \frac{22+3}{110} = \frac{25}{110} = \frac{5}{22}$$

Podobno pretvorimo $0,\overline{63}$ v ulomek. V tem primeru je $a_1 = \frac{63}{100}$, količnik pa je enak kot v prejšnjem primeru, torej $\frac{1}{100}$. Zato je:

$$0,\overline{63} = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \dots = \frac{\frac{63}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

Z vsem izračunanim je potem

$$\frac{0,2\overline{27}}{0,\overline{63}} = \frac{\frac{5}{22}}{\frac{7}{11}} = \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 22} = \frac{5}{14} \qquad \blacksquare$$

4.1 Povzetki in naloge

Pripomočki:

- Vsoto $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ členov zaporedja $a_1, a_2, a_3, \dots$ imenujemo **vrsta**. Če je členov končno je vrsta **končna**, če je členov neskončno, je **neskončna**.
- Delna vsota neskončne vrste je katerakoli končna vsota prvih nekaj (lahko tudi zelo veliko) členov zaporedja. Če se delne vsoto približujejo nekemu številu, je vrsta **konvergentna**, drugače je vrsta **divergentna**.

- Neskončna geometrijska vrsta $a + ak + ak^2 + \ldots$ konvergira natanko tedaj, ko je njen količnik $|k| < 1$. Njena vsota je potem $S = \dfrac{a}{1-k}$

Naloge:

1. Preveri, če naslednje geometrijske vrste (GV) konvergirajo in če, izračunaj njihove vsote:
   (a) $6 + 2 + \dfrac{2}{3} + \ldots \quad [9]$
   (b) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} - \ldots \quad [\frac{25}{48}]$
   (c) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \ldots \quad [3\sqrt{\frac{3}{2}}]$
   (d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - 1 + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \ldots \quad [\frac{26+15\sqrt{3}}{4}]$
2. Pretvori v ulomek naslednja periodična decimalna števila:
   (a) $0,\overline{8} \quad [\frac{8}{9}]$
   (b) $0,\overline{36} \quad [\frac{4}{11}]$
   (c) $4,5\overline{6} \quad [4\frac{17}{30}]$
3. Neskončna konvergentna geometrijska vrsta ima prvi člen enak 81, vsota 3. in 5. člena pa je 52. Izračunaj količnik vrste. $[-\frac{4}{9}]$
4. Vsota konvergentne GV je 6, vsota prvih dveh členov pa $\dfrac{10}{3}$. Izračunaj količnik in prvi člen vrste. $[\frac{2}{3},\ 2; -\frac{2}{3},\ 10]$
5. Dokaži, da so števila $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2}$ členi padajočega GZ. Izračunaj še vsoto neskončne GV, katere prvi trije členi so dana števila. $[4 + 3\sqrt{2}]$
6. Reši enačbi:
   (a) $\dfrac{1}{3^x} + \dfrac{1}{3^{x+1}} + \dfrac{1}{3^{x+2}} + \ldots = \dfrac{27}{2}. \quad [x = -2]$
   (b) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = 2a \quad [a = -2 \vee a = 0]$
7. Skozi točko A_0 ravnine potekajo štiri premice, ki ravnino delijo na osem enakih delov. Na eni od premic leži točka A_1, ki je od A_0 oddaljena 1 m. Iz točke A_1 položimo pravokotnico na eno od sosednjih premic, npr. na tisto, ki leži v smeri

nasprotni smeri urinega kazalca (pozitivna smer). Nožišče te pravokotnice označimo z A_2. Postopek nadaljujemo tako, da iz A_2 položimo pravokotnico na sosednjo (v pozitivni smeri) premico. Nožišče te pravokotnice je A_3. Postopek nadaljujemo v nekončnost. Izračunaj dolžino lomnjene črte $A_0A_1A_2A_3\ldots$. $[(2+\sqrt{2})\,\mathrm{m}]$

5 Elementarni obrestni račun

V tem prispevku se bomo ukvarjali s preprosto finančno matematiko, ki jo najpogosteje uporabljajo finančne ustanove, recimo banke, posojilnice in še kakšne bi našle. Najprej si oglejmo osnovne količine, ki nastopajo v elementarnem obrestnem računu.

Glavnica (tudi **kapital**, **vloga**), ki jo običajno označimo z G, je denarna vrednost, ki smo jo vložili ali pa izposodili.

Glavnico merimo v denarnih enotah, pri nas (trenutno) v evrih (€), v ZDA v dolarjih ($), japonci merijo v jenih (¥), angleži v funtih (£) in tako dalje.

Obresti so denarna nagrada, ki jo dobimo ali damo zaradi posojanja ali izposojanja. Obresti se obračunavajo na določeno časovno obdobje in se običajno merijo z deležem glavnice. Označevali jih bomo z o.

Tudi obresti merimo v denarni enoti, ki v državi velja.

Obrestna mera je v odstotkih (procentih) zapisan delež glavnice, ki jo moramo prejeti ali plačati za obresti. Obrestno mero bomo označili s p.

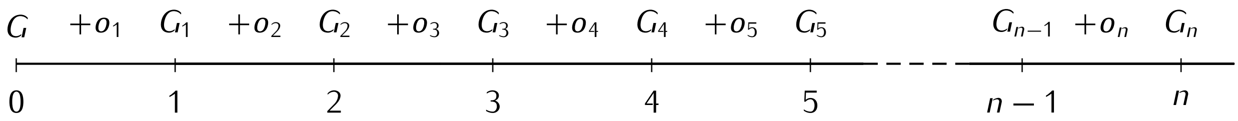
Obrestovalno obdobje (ali tudi obdobje **kapitalizacije**) je čas, za katerega prejmemo ali plačamo obresti. Običajna časovna obdobja so **leto**, **pol leta**, **mesec**, lahko pa se obresti obračunavajo tudi **dnevno**.

Vzemimo, da bomo varčevali (vračali) glavnico G več obrestovalnih obdobij. Z o_n označimo obresti v n tem obrestovalnem obdobju, z G_n pa označimo glavnico po n obrestovalnih obdobjih. Tako dobimo dve zaporedji:

- zaporedje obresti: $o_1, o_2, \ldots o_n$
- zaporedje glavnic: $G_1, G_2, \ldots G_n$

Seveda novo glavnico dobimo tako, da prejšnji glavnici prištejemo ustrezne obresti. Tako je $G_1 = G + o_1$, $G_2 = G_1 + o_2, \ldots$.

Obe zaporedji si grafično predstavimo na **časovni** premici:



Na premici smo **konce** posameznih obrestovalnih obdobij oštevilčili z 1, 2, 3, …, z 0 pa smo označili začetek obrestovanja.

Obresti v enem obrestovalnem obdobju izračunamo s enostavnim sklepnim računom. Sestavimo sorazmernostno tabelo $\begin{array}{ccc} G & \ldots & 100\% \\ o & \ldots & p\% \\ \hline \end{array}$ in izračunamo (procent okrajšamo):

$$\boxed{o = \frac{G \cdot p}{100}}$$

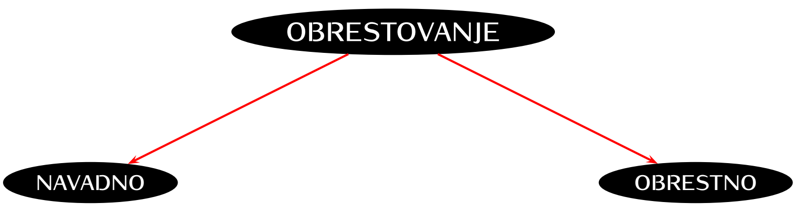
Običajno obrestovalno obdobje je eno leto. Če si želimo obresti izplačati (odplačati) v manjšem časovnem obdobju, izberemo **sorazmerni del** letnih obresti.

Zgled 5.1: **Vzemimo, da smo v banko vložili 15000 €. Banka nam vlogo obrestuje 2,5% letno obrestno mero. Izračunaj, kolikšen znesek bomo imeli v banki**

(a) po enem letu? **(b) po sedmih mesecih?** **(c) po 45 dneh?**

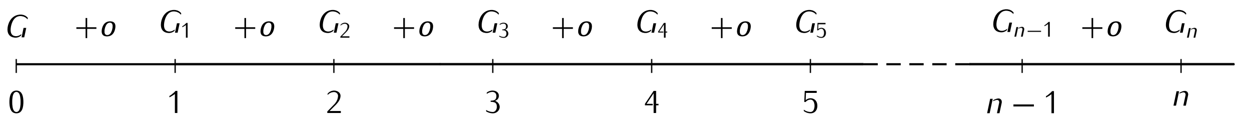
Letne obresti znesejo $o = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{15000 \cdot 2{,}5}{100} = 375$ €. V drugem primeru mora izbrati sorazmeren del obresti. Ker leto vsebuje 12 mesecev, obresti za en mesec znesejo $\frac{o}{12} = 31,25$ €, za sedem mesecev pa potem $\frac{7 \cdot o}{12} = 218,75$ €. Pri obrestih za 45 dni najprej izberemo sorazmeren del za en dan. Pri tem izberemo, da ima leto 365 dni, zato obresti na dan znesejo $\frac{o}{365} = 1,027$ €, za 45 dni pa $\frac{45 \cdot o}{365} = 46,23$ €. ■

V primeru, ko obrestovanje poteka več obrestovalnih obdobij, imamo običajno dva načina obrestovanja:



5.1 Navadno obrestovanje

V primeru **navadnega obrestovanja** so obresti enake vsako obrestovalno obdobje.



Zato glavnice $G_1, G_2, \ldots$ sestavljajo **aritmetično** zaporedje z razliko o in začetnim členom G. Začetni člen v tem primeru ni prvi člen, ta je G_1, ampak "ničti"člen, ker je G vrednost glavnice na začetku obrestovalnega obdobja, torej v času "nič".

Vzemimo, da je obrestna mera obrestovanja za obrestovalno obdobje enaka p. Potem je $G_1 = G + o$, $G_2 = G + 2o$, $G_3 = G + 3o, \ldots$. Preprost razmislek pove, da je

$$\boxed{G_n = G + n \cdot o = G \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)}$$

Zgled 5.2: Čez koliko let se bo začetna varčevalna vloga podvojila, če banka obrestuje navadno, z letnim pripisom obresti in 4% obrestno mero?

Recimo, da je odgovor čez n let. Potem je $G_n = 2G$, če smo z G označili začetno vlogo. Uporabimo zgoraj zapisano formulo in dobimo enačbo:$2\cancel{G} = \cancel{G}(1 + \frac{n \cdot p}{100})$. Po krajšanju ter preprostem urejanju uženemo, da je $n = \frac{100}{p} = 25$. Torej potrebujemo pri 5% obrestni meri 25 let, da se pri navadnem obrestovanju vloga podvoji. ■

5.2 Obrestno obrestovanje

V primeru **obrestnega obrestovanja** se obresti po koncu obrestovalnega obdobja pripišejo k glavnici in se nove obresti izračunajo iz nove glavnice.

Vzemimo, da je bila začetna glavnica G, obrestna mera za obrestovalno obdobje pa p. Obresti za prvo obrestovalno obdobje izračunamo kot običajno: $o_1 = \frac{G \cdot p}{100}$. Potem je

$$G_1 = G + o_1 = G + \frac{G \cdot p}{100} = G \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{=r} = G \cdot r$$

Količino $1 + \dfrac{p}{100}$ označimo z r in jo imenujemo **obrestovalni faktor**.

$$\boxed{r = 1 + \frac{p}{100}}$$

Obrestovalni faktor v primeru konkretnih podatkov zapišemo v decimalni obliki. Tako je, recimo pri 4% obrestni meri, obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{4}{100} = 1,04$, pri 2,5% obrestni meri pa $1,025$. Obrestno mero dobimo iz obrestovalnega faktorja s preprosto preureditvijo formule za r : $p = 100 \cdot (r - 1)$. Tako je pri obrestovalnem faktorju $1,045$ obrestna mera $100 \cdot (1,045 - 1) = 4,5\%$.

Izračunajmo glavnico G_2 po drugem obrestovalnem obdobju. Ker je obrestovanje obrestno, so nove obresti $o_2 = \frac{G_1 \cdot p}{100}$ in je zato

$$G_2 = G_1 + o_2 = G_1 + \frac{G_1 \cdot p}{100} = G_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_1 \cdot r = (G \cdot r) \cdot r = G \cdot r^2$$

S podobnim sklepanjem bi ugotovili, da je $G_3 = G \cdot r^3$ in v splošnem

$$\boxed{G_n = G \cdot r^n}$$

Tako smo ugotovili, da pri obrestnem obrestovanju glavnice po posameznih obrestovalnih obdobjih sestavljajo **geometrijsko** zaporedje z začetnim ("ničtim") členom G, količnik zaporedja pa je obrestovalni faktor r:

G	Gr^1	Gr^2	Gr^3	Gr^4	Gr^5	…	Gr^{n-1}	Gr^n
0	1	2	3	4	5	…	$n-1$	n

Zgled 5.3: **V banko smo položili 10 000 €. Banka obresti pripisuje na koncu leta (letna kapitalizacija) z letno obrestno mero 2,5%.**

(a) Koliko denarja imamo v banki po sedmih letih?

(b) Čez koliko let lahko dvignemo 12 108,16 €?

(c) Čez koliko let obresti presežejo 3008,65 €?

(d) Čez koliko let lahko dvignemo dvakrat toliko, kot smo vložili?

(e) Kolika bi morala biti obrestna mera, da bi se začetni vložek podvojil v desetih letih?

V prvem primeru uporabimo kar osnovno enačbo obrestno obrestnega računa $G_n = G \cdot r^n$. Ker je $n = 7$, $r = 1 + \frac{2{,}24}{100} = 1{,}0242$, je $G_7 = 11\,822{,}07$ €, zaokroženo na cent.

V drugem primeru rešujemo eksponentno enačbo $G \cdot r^n = G_n$ po neznanki n ($G = 10\,000$ €, $G_n = 12\,108{,}16$ €). Eksponentne enačbe pri tako različnih osnovah rešujemo z logaritmi:

$$G \cdot r^n = G_n \Rightarrow r^n = \frac{G_n}{G} \Rightarrow n = \log_r \frac{G_n}{G} = \frac{\log G_n - \log G}{\log r} = 7{,}999\ldots$$

Pri reševanju enačbe smo uporabili osnovna pravila logaritmiranja: $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$, logaritem, brez zapisane osnove, pa pomeni desetiški logaritem. Račun pove, da bomo zapisano vsoto lahko dvignili po osmih letih.

Tretji primer je skoraj enak drugemu primeru. Upoštevamo, da privarčevano vlogo ($= G_n$) dobimo tako, da začetni vlogi prištejemo obresti, torej je $G_n = 13\,008{,}65$ €. Reševanje nadaljujemo kot v prejšnjem primeru. Dobimo, da bodo čez 11 let obresti presegle zapisani znesek.

Tudi v četrtem primeru imamo opravka z eksponentno enačbo $Gr^n = 2G$, ki po krajšanju postane $r^n = 2$. Odtod je $n = \log_r 2 = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}0242} = 28{,}98\ldots$. Torej se začetna vloga, ne samo v primeru 10 000 €, pri taki obrestni meri, podvoji čez 29 let.

V zadnjem primeru imamo opravka s potenčno enačbo $Gr^{10} = 2G$, ki po krajšanju postane $r^{10} = 2$, ta pa ima rešitev $r = \sqrt[10]{2} = 1{,}07177\ldots$. Torej je iskana obrestna mera približno $7{,}2\%$. ■

V bančnem poslovanju je običajno, da je obrestna mera **letna**, obrestovalno obdobje pa **leto**. Če je obrestovalno obdobje manjše od enega leta (večjega od leta običajno ni),je obrestna mera za to manjše obdobje sorazmerna letni obrestni meri.

Zgled 5.4: V banko vložimo 1 000 €. Banka nam nudi 10% obrestno mero in pripisuje obresti:

(a) letno;

(b) polletno;

(c) četrtletno;

(d) mesečno.

Kolikšne zneske imamo v banki po štirih letih za različna obrestovalna obdobja?

V vsakem primeru izračunamo obrestovalni faktor in preštejemo obrestovalna obdobja:

obr. obdobje	obr. mera p(%)	obr. faktor (r)	št. obdobij
letno	10%	$1,1$	1
polletno	$10/2 = 5\%$	$1,05$	2
četrtletno	$10/4 = 2,5\%$	$1,025$	4
mesečno	$10/12 = 0,8\overline{3}\%$	$1,008\overline{3}$	12

V vsakem primeru uporabimo formulo za izračun glavnice po n obrestovalnih obdobjih $G_n = G \cdot r^n$.

V prvem primeru izračunamo $G_4 = 1\,000 \cdot 1,1^4 = 1464,1$ €, v drugem primeru je $G_8 = 1\,000 \cdot 1,05^8 = 1477,46$ €, v tretjem primeru je $G_{16} = 1\,000 \cdot 1,025^{16} = 1484,51$ €in zadnjem primeru mesečnega pripisa obresti izračunamo $G_{48} = 1\,000 \cdot 1,008\overline{3}^{48} = 1489,35$ €. ■

Zgled 5.5: **Tri banke, A, B, in C, ponujajo za enoletni depozit naslednje pogoje:**

- **A banka ponuja letno obrestno mero** $3,97\%$ **in dnevno obrestno obrestovanje (upoštevaj, da banke običajno za leto izberejo 360 dni);**
- **B banka ponuja letno obrestno mero** $3,95\%$ **in mesečno obrestno obrestovanje;**
- **C banka ponuja letno obrestno mero** $3,98\%$ **in četrtletno obrestno obrestovanje.**

Katera ponuja najboljše pogoje?

Pomagamo si z **efektivno obrestno mero** (EOM).

EOM je letna obrestna mera, ki pridela v enem letu enako glavnico, kot predpisani pogoji, torej, če začetni vložek (depozit) v enem letu naraste na glavnico G_1, bi enako glavnico dobili, če bi obrestovali enak vložek G z obrestno mero EOM, torej je

$$G_1 = G \cdot (1 + \frac{EOM}{100})$$

Najboljše pogoje bo torej ponudila banka, ki bo imela največjo efektivno obrestno mero. Izrazimo v zadnji enačbi EOM z ostalimi količinami:

$$EOM = \left(\frac{G_1}{G} - 1\right) \cdot 100$$

A banka: $G_1 = G(1+\frac{p_1}{100 \cdot 360})^{360}$; $EOM = \left((1+\frac{3,97}{100 \cdot 365})^{365} - 1\right) \cdot 100 = 4,05\%$;

B banka: $G_1 = G(1+\frac{p_3}{100 \cdot 12})^{12}$; $EOM = \left((1+\frac{3,95}{100 \cdot 12})^{12} - 1\right) \cdot 100 = 4,02\%$;

C $G_1 = G(1+\frac{p_3}{100 \cdot 12})^{12}$; $EOM = \left((1+\frac{3,98}{100 \cdot 4})^{4} - 1\right) \cdot 100 = 4,04\%$.

Najboljše pogoje ponuja banka A, najslabše banka B. ■