ODVOD

(Interno gradivo)

Sestavil Ivo.K.

ŠC Ljubljana, Srednja lesarska šola ŠC Ljubljana, Srednja lesarska šola

SLŠ

2016-17

Kazalo

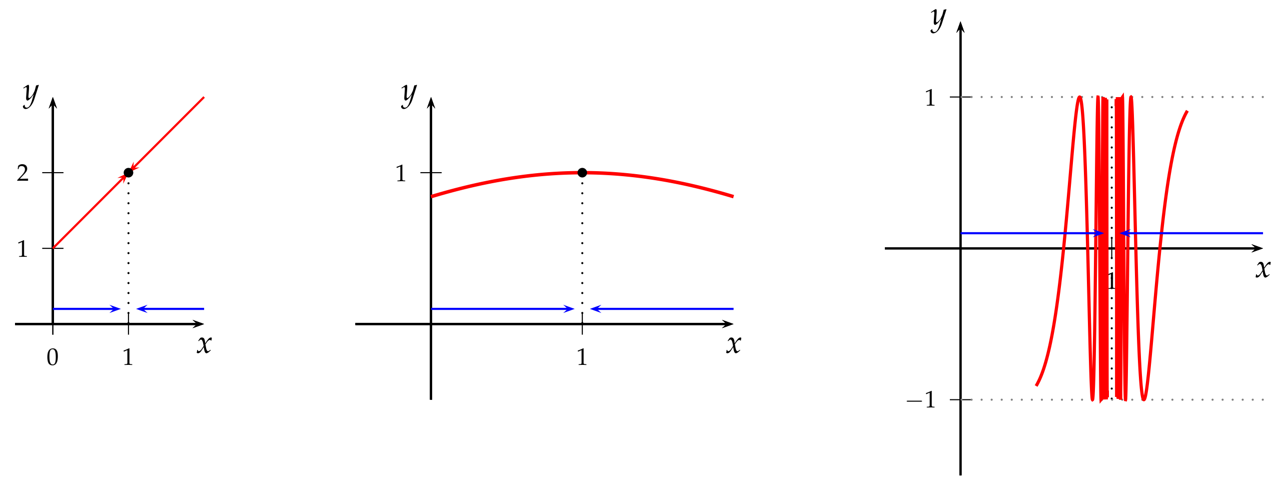
Zametki teorije o odvodu (diferencialni račun) se nahajajo že v delih starogrških matematikov, predvsem Arhimeda, moderno teorijo pa sta v drugi polovici 17. stoletja neodvisno drug od drugega razvila angleški matematik in fizik sir Isaac Newton in nemški filozof in matematik Gottfried Wilhelm Leibniz.

V naslednjih razdelkih bomo poskušali osvetliti pojem odvoda funkcije in preproste primere uporabe. Vse izpeljave bodo nestroge, kakšno bolj strogo utemeljitev pa bomo zapisali v drobnem tisku.

Začeli bomo s pomembnim pojmom limite funkcije.

1 Limita funkcije

Oglejmo si naslednje funkcije $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $f_2(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$, $f_3(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. Vse tri funkcije niso definirane pri $x = 1$. Torej za nobeno ne moremo izračunati njene vrednosti pri $x = 1$. Toda v bližnji **okolici**[1] števila 1 so vse tri funkcije definirane in zato za te vrednosti spremenljivke x lahko izračunamo funkcijske vrednosti. Oglejmo si računalniške slike grafov funkcij f_1, f_2 in f_3 v okolici števila 1:



Slika 1: Grafi funkcij f_1, f_2 in f_3

V primerih vseh treh funkcij se pomikajmo z vrednostjo neodvisne spremenljivke proti številu 1 (bodisi z leve, bodisi z desne) in opazujmo, kaj se dogaja z ustreznimi funkcijskimi vrednostmi? V primeru funkcije f_1 se funkcijske vrednosti vedno bolj približujeju številu 1, v primeru funkcije f_2 se vedno manj ločijo od števila 1, v primeru tretje funkcije, pa opazimo, da funkcijske vrednosti močno nihajo med -1 in 1.

[1]Okolice števila a na številski premici so odprti intervali $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kjer je $\varepsilon > 0$ poljubno pozitivno realno število; če je ε zelo majhno število, dobljeno okolico imenujemo bližnja okolica števila a

Zgled 1: **Vzemimo zaporedji števil $x_n = 1 + \frac{2}{\pi(4n+1)}$ in $y_n = 1 + \frac{2}{\pi(4n-1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dokaži, da se členi zaporedij z rastočim n vedno bolj bližajo 1 in, da je kljub temu $|f_3(x_n) - f_3(y_n)| = 2$ za vsako naravno število n, torej se funkcijske vrednosti ne približujejo druga drugi.**

Razlika $x_n - 1 = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ se spreminja le s spreminjanjem vrednosti n. Preprosto dejstvo je, da če ulomku povečujemo imenovalec (celoto delimo na več delov) in se števec pri tem ne spreminja, se vrednost ulomka manjša; v našem primeru je, recimo pri $n = 1000$ vrednost $\frac{2}{\pi(4001)} \doteq 1.6 \cdot 10^{-4} = 0.00016$, pri $n = 10000$ pa je razlika še približno desetkrat manjša. Torej se z rastočim n vrednosti členov zaporedja x_n le malo razlikujejo od 1, skratka približujejo se številu 1. Podobne ugotovitve veljajo tudi za zaporedje števil y_n. Izračunajmo $f_3(x_n)$:

$$f_3(x_n) = \sin \frac{1}{x_n - 1} = \sin \frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}} = \sin \frac{\pi(4n+1)}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Podobno izračunamo $f(y_n) = -1$. Zato je $|f_3(x_n) - f_3(y_n)| = 2$. ■

Kaj lahko izluščimo iz obnašanja funkcij f_1, f_2, f_3, ki so vse nedefinirane za $x = 1$? Pri prvih dveh se funkcijske vrednosti umirijo (zelo malo spreminjajo), ko se vrednost spremenljivke x približuje številu 1 in to ne glede, iz katere strani se približujemo. V prvem primeru se funkcijske vrednosti umirijo okrog števila 2, v drugem primeru okrog števila 1. Pravimo, da je **limita**[2] funkcije $f_1(x)$, ko se x približuje 1, enaka 2, limita funkcije $f_2(x)$ pa 1. Z oznakami to zapišemo: $\lim_{x\to 1} f_1(x) = 2$ in $\lim_{x\to 1} f_2(x) = 1$. V primeru tretje funkcije, pa takega števila, okrog katerega bi se umirile funkcijske vrednosti, ni, saj v poljubni bližini števila 1 lahko poiščemo take vrednosti za x, da se ustrezne funkcijske vrednosti ločijo za veliko, za 2. Zato pravimo, da funkcija f_3 nima limite v točki $x = 1$.

V splošnem definiramo:

preprosta definicija limite

Limita funkcije $y = f(x)$ imenujemo število, recimo A, okrog katerega se umirijo ali stabilizirajo funkcijske funkcijske vrednosti $f(x)$, ko se spremenljivka x približuje vrednosti a. Z oznakami opisano zapišemo:

$$\boxed{A = \lim_{x\to a} f(x)}$$

1.1 Kako izračunamo limito?

limita "lepih" funkcij

V srednji šoli se ukvarjamo z linearno, kvadratno, polinomsko, racionalno, eksponentno, logaritemsko in kotnimi funkcijami. Grafi takih funkcij so, razen morebiti racionalne funk-

[2] Beseda limita je latinskega izvora in pomeni mejo

cije in funkcij tan, cot, nepretrgane krivulje, učeno pravimo, da so **zvezne**. Pri takih funkcijah je limita funkcije kar enaka ustrezni funkcijski vrednosti, torej: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Praktični nasvet za računanje limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

Vstavimo a namesto x v predpis funkcije f; če dobljeni izraz znamo izračunati, je to iskana limita, če ga ne znamo izračunati moramo izbrati kako drugo pot.

Zgled 2: Izračunaj limite:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2\sqrt{x+2} - 1)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{x}$ **(kot x merimo v radianih).**
3. $\lim\limits_{x\to 1^\circ} \dfrac{\sin x}{x}$ **(kot x merimo v stopinjah)**

Sledimo "praktičnemu" nasvetu; v prvem primeru dobimo:

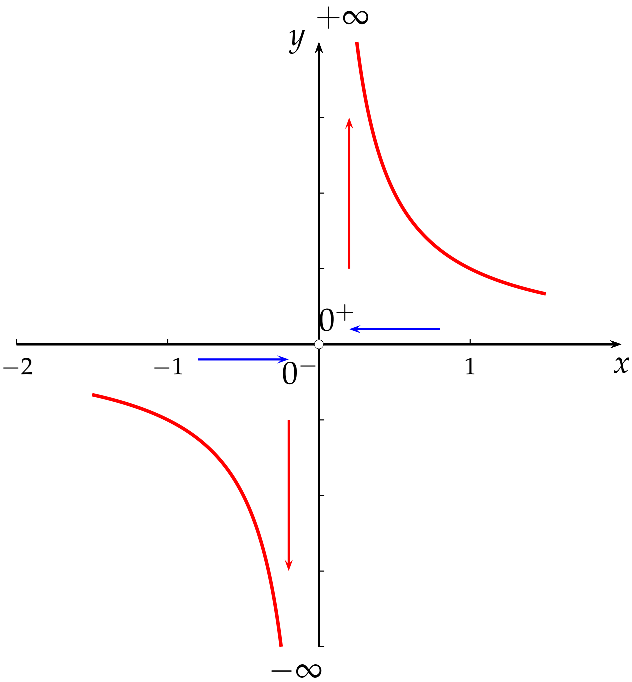
$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 2\sqrt{x+2} - 1) = 2^2 - 2\sqrt{2+2} - 1 = 4 - 2\cdot 2 - 1 = -1$$

v drugem primeru $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 1}{1} \doteq 0,8415$, v tretjem primeru pa je

$$\lim_{x\to 1^\circ} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 1^\circ}{1^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\frac{\pi}{180}} \doteq 0,9999 \qquad \blacksquare$$

nekaj posebnih limit

Vrednosti katerih izrazov ne znamo ali ne moremo izračunati? Spomnimo se, da pri osnovnih računskih operacijah edino deljenje z številom 0 povzroča težave. Tako, recimo $1 : 0$ tudi računalo ne zna izračunati. Toda, če delitelj 0 le malo spremenimo, račun lahko izpeljemo, recimo $1 : 0,01 = 100$, $1 : (-0,001) = -1000$, $1 : 0,000001 = 1000000$. Opazimo, da so rezultati deljenj po velikosti tem večji, čim bliže številu 0 je delitelj. V primeru, ko se delitelj približuje številu 0 z negativne strani, rezultati deljenja postanejo manjši od še tako velikega **negativnega** števila, v primeru, ko se delitelj približuje številu 0 s pozitivne strani, pa postanejo količniki večji od še tako velikega **pozitivnega** števila. Opisano lahko prikažemo tudi z obnašanjem funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ v okolici pola $x = 0$.
Vpeljimo novi oznaki $-\infty$ in ∞ ter ju imenujemo negativno in pozitivno neskončno in zapišemo gornje pisanje v obliki:



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty}$$

Še nekaj opazimo na sliki grafa $f(x) = \frac{1}{x}$. Ko se vrednosti x po absolutni vrednosti povečujejo, torej z novimi oznakami velja bodisi $x \to \infty$ bodisi $x \to -\infty$, so funkcijske vrednosti vedno manjše, torej se umirijo okoli števila 0. Zato lahko zapišemo:

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

definirani izrazi

Oznaki $+\infty$ in $-\infty$ si lahko predstavljamo kot neke vrste "števili", s katerimi lahko tudi računamo. Oznako ∞ si mislimo kot "število", ki ga nobeno drugo število ne preseže, oznako $-\infty$ pa kot "število", ki je manjše od kateregakoli realnega števila. V takem primeru velja naslednja aritmetika z neskončnimi količinami (z a smo označili poljubno realno število):

$$\boxed{\infty \pm a = \infty} \qquad \boxed{\infty + \infty = \infty} \qquad \boxed{\frac{1}{\pm\infty} = 0}$$

$$\boxed{\infty \cdot a = \infty,\ a > 0} \qquad \boxed{(-\infty) + (-\infty) = -\infty}$$

$$\boxed{\infty \cdot a = -\infty,\ a < 0} \qquad \boxed{\infty \cdot \infty = \infty} \qquad \boxed{\frac{1}{0} = \pm\infty}$$

Zakaj pa ne moremo izračunati $\infty - \infty$? Zakaj $\infty - \infty$ ni enako 0? Oglejmo si naslednji zgled. Pa predpostavimo, da je $\infty - \infty = 0$. Označimo z S naslednjo vsoto (vrsto):$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$. Neskončne vsote (vrste) seštevamo tako, da sestavimo zaporedje delnih vsot, recimo za vsoto $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$:

nedefinirani izrazi

$$\begin{array}{lclcl} S_1 & = & a_1 & & \\ S_2 & = & S_1 + a_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & S_2 + a_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ S_{n+1} & = & S_n + a_{n+1} & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} \end{array}$$

Vsota S je potem število okrog katerega se umirijo delne vsote, drugače povedano, vsota vrste je limita delnih vsot, ko gre števil seštetih členov preko vsake meje.

Za našo vsoto $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ je nekaj začetnih delnih vsot $1, 3, 7, 15, \ldots$, v splošnem pa je $S_n = 2^n - 1$, v kar se ni težko prepričati in z indukcijo utemeljiti. Z rastočim n delne vsote presežejo vsako, še tako veliko število, zato je vsota te vrste $S = \infty$. Enostaven račun pokaže, da je $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) - 1 = S - 1$. Potem je $S + S - S = S - 1 - S$. Ker je $S = \infty$ in je po predpostavki $\infty - \infty = 0$, je zato tudi $S - S = 0$. Toda potem pridemo v nasprotje s predpostavko, saj je je primeru, da predpostavka velja, $S = -1$. Dokaz z zanikanjem (reductio ad absurdum) je sklenjen, zato v splošnem $\infty - \infty$ ni enako 0.

Do podobne ugotovitve bi prišli v primeru vrste $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, kjer vsaki prišteti enici eno enico odštejemo, vsaki odšteti pa eno prištejemo. Lihe delne vsote so enake 1, sode so enake 0, torej delne vsote nimajo limite. Vrsto lahko preuredimo v obliko $(1 + 1 + \ldots) - (1 + 1 + \ldots)$, v kateri je vsota prvega člena ∞, prac taka pa je tudi vsota drugega člena. Če bi veljalo, da je $\infty - \infty = 0$, bi vsota vrste $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ bila enaka 0, kar pa nasprotuje temu, da zaporedje delnih vsot nima limite.

Izraze, katerih vrednost ne moremo izračunati, imenujemo nedefinirani izrazi. Za nas bodo zanimivi:

$\boxed{\infty - \infty = ?}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} = ?}$ $\boxed{\dfrac{0}{0} = ?}$

Vzemimo, da je $|k| < 1$. Potem je

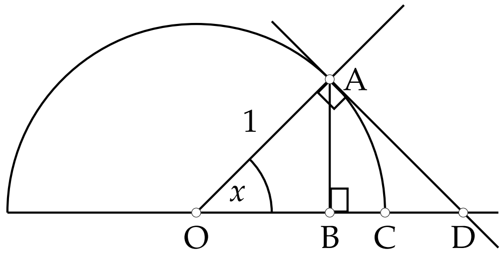
Nekaj posebnih limit

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} k^n = 0}$$

Vzemimo, da je $\varepsilon > 0$ poljubno majhno števil in, da je $0 < k < 1$. (če je pretežko, pa vzemimo, da je $\varepsilon = 0,001$ in $k = 1/2$), torej tako, ki se zelo malo loči od števila 0. Poiščimo vse rešitve (spremenljivka n)neenačbe $k^n \geq \varepsilon$ (v izbranem primeru $(1/2)^n \geq 0,001$). Ker gre za eksponentno enačbo, jo logaritmirajmo, kar z desetiškim logaritmom, ki je naraščajoča funkcija, zato ohranja znak neenakosti. Dobimo: $\log k^n \geq \log \varepsilon$ (vposebnem primeru $\log(1/2)^n \geq \log 0,001 = -3$). Uporabimo pravilo logaritmiranja za potence, da dobimo $n \cdot \log k \geq \log \varepsilon$ ($n \cdot \log(\frac{1}{2}) \geq -3$ ali $-n \cdot \log 2 \geq -3$). Ker je $k < 1$ je logaritem $\log k$ negativno število. Zato je $n \leq \frac{\log \varepsilon}{\log k}$ (v posebnem primeru $n \leq \frac{-3}{-\log 2} \doteq 9,9658$). Če si ogledamo poseben primer, ugotovimo, da je le za $n < 10$ izraz $(1/2)^n$ večji od $0,001$, za vse večje n, torej tudi za ogromne, pa je vrednost potence $(1/2)^n$ manjša od 0,001, torej približno enaka 0. Podobno sklepamo tudi v spološnem primeru: le za tista števila n, ki so kvečjemu $\frac{\log \varepsilon}{\log k}$, je vrednost potence večja od ε. Za vse ostale n, tudi ogromne pa je vrednost k^n približno enaka 0.

V primeru, ko je $-1 < k < 0$, bi ločili sode in lihe stopnje potence k^n, za vsako pa bi ugotovili, da se bližajo številu 0, ko se stopnja povečuje.

Vzemimo poljuben pozitiven kot x, ga položimo v kotomerno krožnico in v presečišču premičnega kraka kota x s kotomerno krožnico načrtamo tangento na kotomerno krožnico. Opisano prikažimo s sliko
Na sliki opazimo, da je $|AB| \leq |\widehat{AC}| \leq |AD|$. Daljica AB je nasprotna kateta (nasproti kota x) pravokotnega trikotnika OAB, zato je njena dolžina $\sin x$. Lok $\widehat{AC}$ ustreza središčnemu kotu x, ki ga merimo v radianih, zato je njegova dolžina enaka $|\widehat{AC}| = x$ ($\frac{\pi \cdot 1 \cdot x}{180°} = \frac{\pi}{180°} \cdot x = 1\,\mathrm{rad} \cdot x = x\,\mathrm{rad} = x$), dolžina tangentnega odseka AD pa je nasprotna kateta v pravokotnem ODA in je zato enaka $\tan x$



Slika 3: K izpeljavi limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

($\tan x = \frac{|AD|}{|OA|} = \frac{|AD|}{1} = |AD|$). Zato je $\sin x \leq x \leq \tan x$. Ker so količine, ki jih primerjamo pozitivne, se za obratne vrednosti urejenost obrne, torej velja $\dfrac{1}{\tan x} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$. Potem pa velja:

$$\cos x = \sin x \cdot \frac{1}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

Z upoštevanjem lihosti funkcij sin in $\tan x$ ter obnašanja urejenosti obratnih vrednosti negativnih števil, bi do podobne neenakosti prišli tudi za negativne vrednosti x.

Tako smo ugotovili, da je za poljuben kot x ulomek $\dfrac{\sin x}{x}$ ujet kot "nadev" v "sendvič"[3] količine $\cos x$ in števila 1. Ko se x približuje številu 0, se polovici sendviča $\cos x$ in 1 bližata številu 1 ($\cos 0 = 1$), zato se tudi "nadev" približuje številu 1, torej je:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

V matematiki (pa tudi v tehniki) igra izredno pomebno vlogo limita

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\;,\; \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Pri tem je število e osnova naravnih logaritmov in je zaokroženo na štiri mesta tri decimalna mesta) enako 2.718. Utemeljitev bomo zaradi prezahtevnosti opustili. Alternativno obliko zadnje limite dobimo, če vpeljemo novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$. Ko gre $x \to \infty$, gre $t \to 0$. Torej je število e dobimo tudi iz naslednjih dveh limit:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,\; \lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{e} = e^{-1}}$$

Dodajmo, da v primeru uporabe praktičnega nasveta, torej vstavljanja $x = \infty$ ali $t = 0$, v obeh primerih dobimo nov nedefiniran izraz: $\boxed{1^\infty =?}$.

[3] V anglo-ameriški literaturi tako sklepanje imenujejo sandwich lemma, lahko tudi squeeze lemma

1.2 Primeri

Še enkrat ponovimo praktično pravilo za računanje limit:

Vstavimo a namesto x v predpis funkcije f; če dobljeni izraz znamo izračunati, je to iskana limita, če ga ne znamo izračunati moramo izbrati kako drugo pot.

Zgled 3: Preveri pravilnost naslednjih trditev:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{5}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 + \tan x}{\sin 2x} = 2$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{2}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = 1$

Sledimo navodilu. V prvem primeru dobimo $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{2\cdot 4 - 2 - 1}{3\cdot 4 - 3\cdot 2} = \dfrac{5}{6}$, v drugem $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\tan x}{\sin 2x} = \dfrac{1 + \tan\frac{\pi}{4}}{\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})} = \dfrac{1+1}{1} = 2$. V tretjem problemu pa že imamo "problem", saj vstavljanje $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{\infty - \infty - 1}{\infty - \infty}$ pripelje do nedefiniranega izraza. V takih primerih (limita racionalne funkcije, ko gre $x \to \infty$) se pogosto poslužimo naslednjega načina iskanja limite. Števec in imenovalec delimo s potenco x^n, kjer je n večja od stopenj polinomov v števcu in imenovalcu, v našem primeru delimo z x^2. Dobimo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x - 1| : x^2}{3x^2 - 3x| : x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{\cancel{x}}{x\cancel{2}} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{3\cancel{x}}{x\cancel{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{3}{x}} = \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{\infty}}^{=0} - \overbrace{\frac{1}{\infty^2}}^{=0}}{3 - \underbrace{\frac{3}{\infty}}_{=0}} = \frac{2}{3}$$

V zadnjem primeru na začetku spet sledimo praktičnemu napotku: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{2\cdot 1^2 - 1 - 1}{3\cdot 1^2 - 3\cdot 1} = \dfrac{0}{0}$. Dobimo nedefiniran izraz, zato moramo za izračun limite ubrati kako drugo pot. Pri polinomih običajno pri nedefiniranosti $0/0$ uberemo naslednjo pot. Ker je vrednost polinoma v števcu in imenovalcu pri $x = 1$ enaka 0, je število $x = 1$ ničla obeh polinomov. Zato lahko polinoma razstavimo, če ne gre drugače, pa s Hornerjevim algoritmom, recimo za polinom v števcu je $\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & \|0 \end{array}$, kar pripelje do razstavljanja $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$, v imenovalcu pa uporabimo kar preprosto izpostavljanje $3x^2 - 3x = 3x(x-1)$. Zato je:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 3x} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\,(2x+1)}{3x\,\cancel{(x-1)}} = \frac{2\cdot 1 + 1}{3 \cdot 1} = 1$$

Tako smo ugotovili, da so vse štiri trditve v nalogi pravilne. ■

Zgled 4: Izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^2+13x+4}{x^3+4x^2+x+4}$

3. $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{x^3+27}{x^2-9} - x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sqrt{3x-2}-4}{x^3-4x}$

V prvem primeru po vstavljanju dobimo izraz $\frac{5}{0}$, ki gre preko vsake meje, bodisi v pozitivno (∞, ko se bližamo številu 2 z desne strani), bodisi v negativno stran ($-\infty$, ko se bližamo številu 2 z leve strani). Zato v tem primeru limite ni. Če bi vzeli namesto funkcije $\frac{x+3}{x-2}$ funkcijo $\frac{x+3}{(x-2)^2}$ bi limita obstajala, in sicer bi bila enaka ∞.

V drugem primeru po vstavljanju dobimo nedefiniranost $(\frac{0}{0})$, ki jo uženemo z razstavljanjem, kjer si spet lahko pomagamo s Hornerjevim algoritmom: števec $\begin{array}{c|ccc} & 3 & 13 & 4 \\ \hline -4 & & -12 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & \|0 \end{array}$, torej $3x^2 + 13x + 4 = (x+4)(3x+1)$, imenovalec $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline -4 & & -4 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \|0 \end{array}$, zato $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x+4)(x^2+1)$. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^2+13x+4}{x^3+4x^2+x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{\cancel{(x+4)}\,(3x+1)}{\cancel{(x+4)}\,(x^2+1)} = \frac{3\cdot(-4)+1}{(-4)^2+1} = -\frac{11}{17}$$

V tretjem primeru $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{x^3+27}{x^2-9} - x\right)$ vstavljanje dá izraz $\frac{0}{0} + 3$, ki je nedefiniran v prvem delu. Zato preuredimo prvi del $\frac{x^3+27}{x^2-9}$ v $\dfrac{\cancel{(x+3)}\,(x^2-3x+9)}{(x-3)\,\cancel{(x+3)}} = \frac{x^2-3x+9}{x-3}$, ki po vstavljanju

$x = -3$ dá definiran izraz $\frac{9+9+9}{-3-3} = -\frac{9}{2}$. Zato je $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^3+27}{x^2-9} - x\right) = -\dfrac{9}{2} + 3 = -1\dfrac{1}{2}$.

Praktični nasvet v zadnjem primeru pripelje do nedefiniranega izraza $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{3x-2}-4}{x^3-4x} = \dfrac{2\sqrt{4}-4}{2^3-8} = \dfrac{0}{0}$. Spomnimo se, kako smo odpravljali korene v imenovalcu (racionalizacija). Podoben postopek uporabimo za odpravo korena v števcu, ulomek razširimo z $x\sqrt{3x-2}+4$, da dobimo:

$$\frac{x\sqrt{3x-2}-4| \cdot (x\sqrt{3x-2}+4)}{x^3-4x| \cdot (x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{x^2(3x-2)-16}{x(x^2-4)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{3x^3-2x^2-16}{x(x-2)(x+2)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{\cancel{(x-2)}\ (3x^2+4x+8)}{x\ \cancel{(x+2)}\ \cdot(x\sqrt{3x-2}+4)} = \frac{3x^2+4x+8}{x(x+2)\cdot(x\sqrt{3x-2}+4)}$$

Polinom $3x^3-2x^2-16$ smo razstavili z uporabo "Hornerja". Po vstavljanju $x=2$, dobimo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{3x-2}-4}{x^3-4x} = \dfrac{3\cdot 4+4\cdot 2+8}{2(2+2)\cdot(2\sqrt{3\cdot 2-2}+4)} = \dfrac{28}{8\cdot 8} = \dfrac{7}{16}$. ■

Zgled 5: Izračunaj naslednje limite:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2\sin 4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$

V vseh primerih po vstavljanju dobimo nedefiniran izraz $\frac{0}{0}$. Spomnimo se na limito $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ in jo uporabimo v naših primerih. V limiti imamo vzorec:

- v limiti nastopa ulomek,
- v števcu (imenovalcu) nastopa izraz **sinus (kot)**, v imenovalcu (števcu) nastopa **kot**,
- **kot** potuje proti 0 (**kot** $\to 0$)

V računih poskušamo doseči opisani vzorec, tudi z vpeljavo nove neznanke. V prvem primeru imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \underbrace{=}_{3x=t} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} 3\cdot\frac{\sin t}{t} = 3\cdot 1 = 3$$

S podobnim postopkom dobimo tudi koristen splošen rezultat:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} = m}$$

V drugem primeru uporabimo pravkar zapisano splošni rezultat:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{\sin 4x} = \frac{3}{2} : \frac{\sin 4x}{x} = \frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{8}$$

V tretjem primeru razširimo števec in imenovalec ulomka z $6x$, da dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{x\cdot\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}:\frac{\sin 3x}{x}=\frac{2}{3}$$

V zadnjem primeru vpeljemo novo spremenljivko $1-x=t$. Potem gre $t\to 0$ kakor hitro gre $x\to 1$. Zato je $\pi x=\pi(1-t)=\pi-\pi t$ in $\sin\pi x=\sin(\pi-\pi t)=\sin\pi t$. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{t(2-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{t}\cdot\frac{1}{2-t}=\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\blacksquare$$

Zgled 6: Izračunaj naslednji limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3}$

Če vstavimo $x=\infty$ v prvi izraz, dobimo nedefiniranost 1^∞, ki jo poznamo iz limite števila e. Tudi v drugem primeru dobimo isto vrsto nedefiniranosti, saj $\dfrac{2x-3}{2x+3}=\dfrac{2-\frac{3}{x}}{2+\frac{3}{x}}\to\dfrac{2+0}{2+0}=1$, ko $x\to\infty$, eksponent $x+3$ pa v tem primeru potuje proti ∞. Oglejmo si, kakšen je glavni vzorec v limitah povezanih s številom e. V limiti nastopajo trije enaki izrazi, ki smo jih zgoraj označili z $\square$:

- enakrat v osnovi potence $\left(1\pm\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$,
- drugič v eksponentu potence $\left(1\pm\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}$
- tretjič kot spremenljivka, ki gre preko vsake meje $\displaystyle\lim_{\square\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{\square}\right)^{\square}$

Izraz, katerega limito računamo, poskušamo preoblikovati v opisani vzorec. V prvem primeru preoblikovanje poteka takole:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot 3x}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{6x}{x}}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6}$$

Pri preoblikovanju smo upoštevali pravilo za potenciranje potenc ($a^{m\cdot n}=(a^m)^n$) ter dejstvo, da v primeru $x\to\infty$ velja, da je tudi $\frac{x}{2}\to\infty$. Obkrožen izraz se potem približuje številu e^{-1}, zato je iskana limita $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^{-6}$. Do podobnega rezultata bi prišli z uvedbo nove spremenljivke $t=\frac{x}{2}$. V drugem primeru najprej spremenimo osnovo v obliko $1\pm\frac{1}{\square}$:

$$\frac{2x-3}{2x+3}=1+\left(\frac{2x-3}{2x+3}-1\right)=1+\frac{(2x-3)-(2x+3)}{2x+3}=1-\frac{6}{2x+3}=1-\frac{1}{\frac{2x+3}{6}}$$

Vpeljimo novo spremenljivko $t = \dfrac{2x+3}{6}$, za katero ugotovimo, da $t \to \infty$, kakor hitro $x \to \infty$. Potem je $x = \dfrac{6t-3}{2}, x+3 = \dfrac{6t+3}{2}$ in

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{6t+3}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6t+3}{2t}}$$

Ko t potuje proti ∞, osnova zadnje limite potuje proti e^{-1}, eksponent $\dfrac{6t+3}{2t}$ pa proti $\frac{6}{2} = 3$. Zato je $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$.

Pravilnost rezultata ocenimo tako, da izračunamo vrednost izraza $\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+3}$ za ogromen x, recimo za $x = 10^6$, za kar nam računalnik dá na pet decimalnih mest zaokroženo vrednost $0,04979$, enako vrednost pa na prav toliko zaokroženih decimalk dá $e^{-3} = 0,04979$. ■

2 Zveznost funkcij

Pojem **zvezna** funkcija je eden najpomembnejših pojmov v teoriji funkcij. Stroga definicija vsebuje za naše potrebe prezahtevno $\varepsilon - \delta$ definicijo. Za naše potrebe bo bolj koristna manj stroga, opisna definicija.

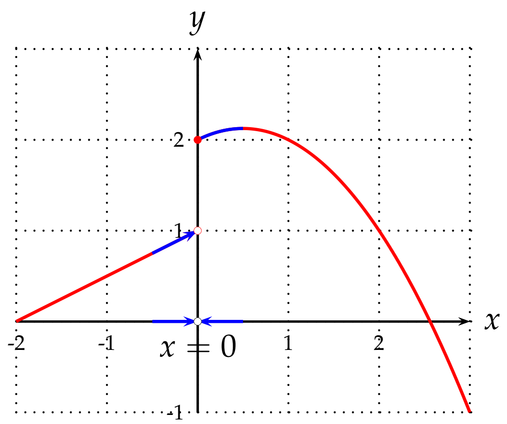
Vpeljimo pojem leve in desne limite funkcije:

leva desna limita

Število L imenujemo leva limita funkcije $f(x)$ v točki $x = a$, če se funkcijske vrednosti $f(x)$ umirijo okoli števila L, ko se x približuje številu a z leve strani, torej $x \to a$; $x < a$. Podobno označimo z D desno limito funkcije $f(x)$ v točki $x = a$, če se funkcijske vrednosti umirijo okrog D, ko se z x bližamo številu a z desne strani, torej $x \to a$; $x > a$. Levo in desno limito označimo:

$$\boxed{L = \lim_{x \to a-} f(x) \text{ in } D = \lim_{x \to a+} f(x)}$$

Za funkcijo f, katere graf prikazuje spodnja slika, je leva limita v točki $x = 0$ enaka $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$, desna limita je enaka $\lim_{x \to 0+} f(x) = 2$, funkcijska vrednost $f(0)$ pa je prav tako enaka 2.

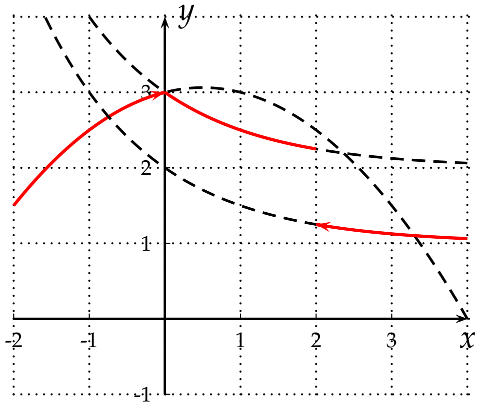


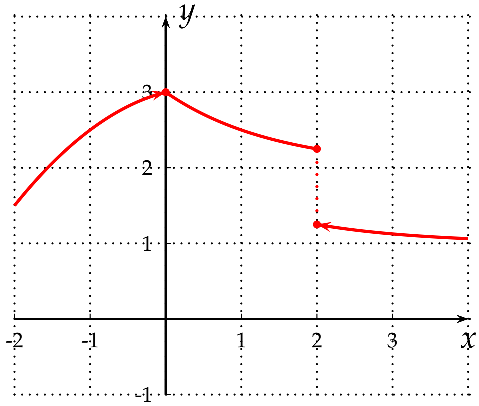
Zgled 7: Nariši graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x+3)(x-4) & ; \quad x < 0 \\ 2^{-x}+2 & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2^x}+1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

in izračunaj $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$ **in** $\lim_{x\to 2+} f(x)$**.**

Funkcija f se sestoji iz treh predpisov. Prvi predpis, $y = -\dfrac{1}{4}(x+3)(x-4)$ je predpis za kvadratno funkcijo v ničelni obliki z ničlama $x_1 = -3$ in $x_2 = 4$ ter temenom $(1/2, 49/16)$. Njen graf narišemo le za $x < 0$. Drugi predpis, ki je definiran za $0 \le x$ 2, je premaknjena eksponentna funkcija $y = 2^{-x}+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, tretji predpis pa je premaknjena eksponentna funkcija $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$. Narišemo vsako posebej vzdolž cele abscisne osi in potem izbrišemo dele, kjer ustrezni predpisi ne veljajo:





Slika 4: Graf funkcije f iz zgleda

Ustrezne limite so

$$\begin{array}{lclclcl}
\lim_{x\to 0-} f(x) & = & \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}(x+3)(x-4)\right) & = & -\frac{1}{4}(0+3)(0-4) & = & 3 \\
\lim_{x\to 0+} f(x) & = & \lim_{x\to 0}(2^{-x}+2) & = & 2^0+2 & = & 3 \\
\lim_{x\to 2-} f(x) & = & \lim_{x\to 2}(2^{-x}+2) & = & 2^{-2}+2 & = & 2\frac{1}{4} \\
\lim_{x\to 2+} f(x) & = & \lim_{x\to 2}(2^{-x}+1) & = & 2^{-2}+1 & = & 1\frac{1}{4}
\end{array} \quad \blacksquare$$

Pravimo, da je funkcija $f(x)$ v točki $x = a$ **zvezna**, če se vrednosti funkcije f pred in po $x = a$ **poljubno malo razlikujejo** od funkcijske vrednosti $f(a)$. Bolj domače povedano, funkcija je v neki svoji točki zvezna, če njen graf v tisti točki ni pretrgan (strgan, prekinjen). **definicija zveznosti**

V primeru funkcije v prejšnjem zgledu je graf pretrgan v točki $x = 2$, zato funkcija f v $x = 2$ ni zvezna, v točki $x = 0$ pa je zvezna, saj se tam graf ne pretrga, kljub temu, da se je predpis spremenil.

Bolj strogo definiramo zveznost takole:

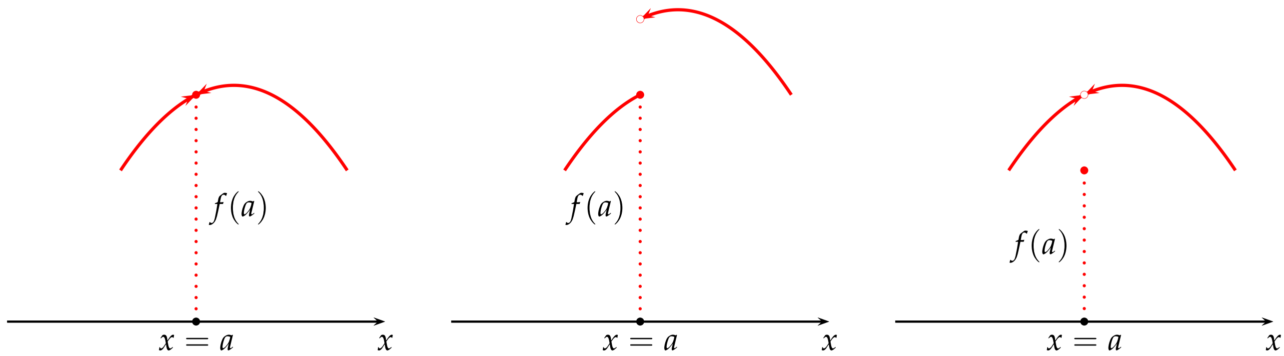
Funkcija $y = f(x)$ je zvezna v točki $x = a$, če sta v tej točki leva in desna limita enaki funkcijski vrednosti v tej točki, torej:

$$\boxed{\text{Funkcija } y = f(x) \text{ je zvezna v točki } x = a \text{, če je } \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)}$$

Če je funcija $y = f(x)$ zvezna v **vsaki** točki nekega obravnavanega območja, pravimo, da je zvezna na tem območju.

Točkam, kjer funkcija ni zvezna, pravimo točke nezveznosti. Poznamo nezveznosti dveh vrst:

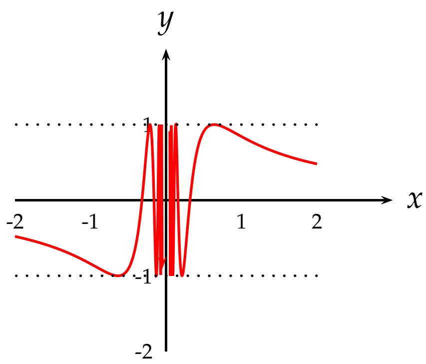
- Nezveznost 1. vrste ima funkcija v točki, v kateri bodisi leva, bodisi desna ali pa celo obe limiti nista enaki funkcijski vrednosti v tej točki. V taki točki ima funkcija skok, ki je enak absolutni vrednosti razlike med levo in desno limito.



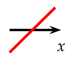
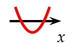
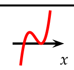
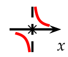
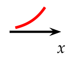
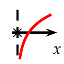
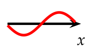
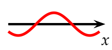
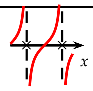
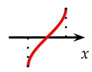
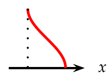
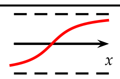
Slika 5: Leva funkcija je v točki $x = a$ zvezna, srednja in desna funkcija pa imata v točki $x = a$ nezveznost s skokom (nezveznost 1. vrste)

- Nezveznost 2. vrste ima funkcija v točki, v kateri bodisi leva, bodisi desna ali pa celo obe limiti ne obstajata.

V tabeli na sliki 4 so prikazane osnovne elementarne funkcije in njihove morebitne točke nezveznosti ter vrsta nezveznosti.



Slika 6: Funkcija $\sin(1/x)$ ima v $x = 0$ nezveznost 2. vrste

ime funkcije	enačba $f(x) =$	graf	točke nezveznosti	vrsta nezveznosti
linearna	$kx + n$		–	–
kvadratna	$ax^2 + bx + c$		–	–
polinom	$ax^n + \ldots + a_1x + a_0$		–	–
racionalna	$\frac{p(x)}{q(x)}$ p in q sta polinoma		poli	1. vrsta
eksponentna	a^x		–	–
logaritemska	$\log_a x$		–	–
sinus	$\sin x$		–	–
kosinus	$\cos x$		–	–
tangens	$\tan x$		poli	1. vrsta
arkus sinus	$\arcsin x$		–	–
arkus kosinus	$\arccos x$		–	–
arkus tangens	$\arctan x$		–	–

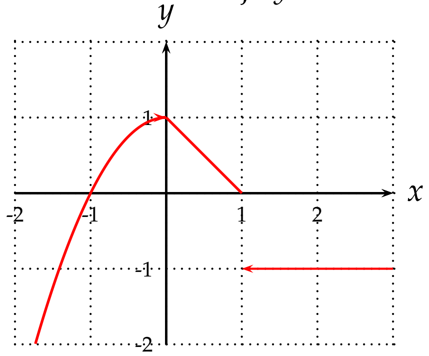
Slika 7: Elementarne funkcije in zveznost

Zgled 8: **Naj bosta a in b poljubni realni števili in**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; \quad x < 0 \\ ax + b & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ -1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

1. **Nariši graf funkcije za $a = -1$ in $b = 1$. Ali je v tem primeru funkcija zvezna?**
2. **Izračunaj konstanto a in b tako, da bo funkcija zvezna.**

Funkcija je sestavljena iz treh predpisov. Na negativnem delu abscisne osi ($x < 0$) je predpis kvadratna funkcija $y = 1 - x^2$, na intervalu $[0, 1]$ je predpis linearna funkcija $y = x - 1$, na poltraku $(1, \infty)$ pa je predpis konstantna funkcija $y = -1$.



Vsak od predpisov predstavlja zvezno funkcijo. Nezveznosti se lahko pojavijo pri takih funkcijah le v točkah spremembe predpisa, v našem primeru pri $x = 0$ in $x = 1$. Ker je $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (1 - x^2) = 1$ in $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (-x + 1) = 1$, je funkcija v točki $x = 0$ zvezna, v točki $x = 1$ pa nezvezna, ker je $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (-x + 1) = 0$ in $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-1) = -1$. $\square$

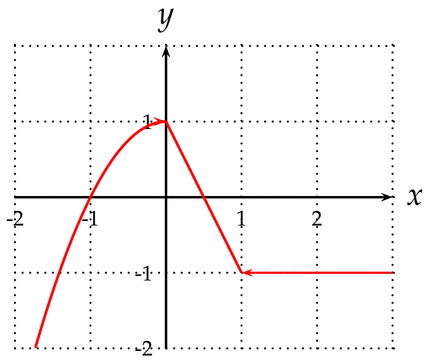
Da bo funkcija f zvezna v $x = 0$, mora veljati

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (1 - x^2) = 1 = b = \lim_{x \to 0+} (ax + b) = \lim_{x \to 0+} f(x)$$

Če naj bo zvezna v $x = 1$, mora veljati

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (ax + b) = a + b = -1 = \lim_{x \to 1+} (-1) = \lim_{x \to 1+} f(x)$$

Konstanti a in b torej zadoščata sistemu enačb $b = 1$ in $a + b = -1$. Le ta pa ima rešitev $a = -2$ in $b = 1$. Narišimo še graf funkcije v primeru izračunanih konstant a in b:

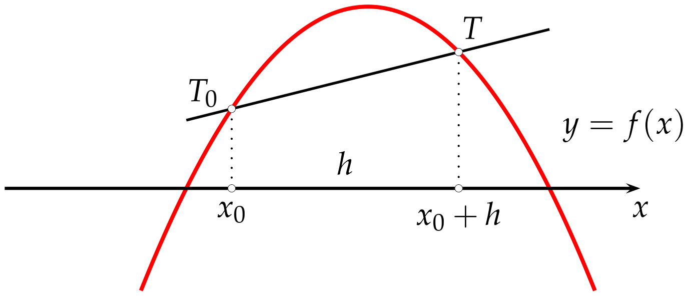


y
x
1
-1
-2
-2
-1
1
2

■

3 Geometrijska definicija odvoda

Vzemimo, da imamo v koordinatni ravnini narisan graf funkcije $y = f(x)$, na njem pa izbrano točko $T_0(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$. Vzemimo poljubno realno število h in na grafu izberimo točko $T(x_0 + h, f(x_0 + h))$.



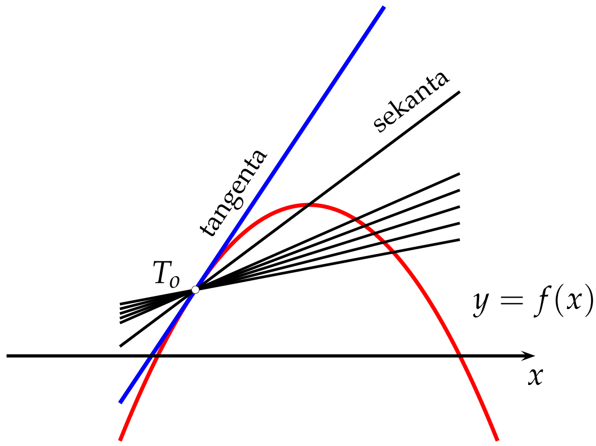
Skozi točki T_0 in T položimo premico, ki jo, ker seka graf funkcije f, imenujemo **sekanta**, njen smerni koeficient označimo s k_s

diferenčni količnik

$$\boxed{k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

in ga imenujmo **diferenčni količnik** funkcije f v točki T_0.

Zanima nas, kaj se dogaja z diferenčnim količnikom k_s funkcije f, ko se h približuje številu 0, ali učeno: skušamo si ponazoriti število $\lim_{h \to 0} k_s$. Zato si oglejmo naslednjo sliko:



Opazimo, da se **sekanta** približuje **tangenti** na graf funkcije, ko se h približuje k 0. Zato se smerni koeficient k_s sekante približuje smernemu koeficientu k_t tangente in to število, $= k_t$, imenujemo odvod funkcije f v točki T_0. Torej:

Odvod funkcije f v točki $T_0(x_0, y_0 = f(x_0))$ je enak smernemu koeficientu tangente na graf funkcije v točki T_0. Odvod **označimo** s $f'(x_0)$ ali tudi $f'(T_0)$:

$$\boxed{k_t = f'(x_0) = f'(T_0)}$$

Geometrijska definicija nam omogoča, da izračunamo odvod poljubne linearne funkcije $f(x) = kx + n$. Izberimo poljubno točko na grafu funkcije f in v njej položimo tangento. Tangenta je očitno kar premica, ki predstavlja graf funkcije f. Zato je:

Odvod linearne funkcije $f(x) = kx + n$ je enak smernemu koeficientu k linearne funkcije, torej je $f'(x) = (kx + n)' = k$. V posebnem primeru, ko je $k = 0$, je linearna funkcija konstantna, zato je odvod **konstantne** funkcije je enak 0.

4 Analitična definicija odvoda

Geometrijska definicija odvoda funkcije je nazorna, toda računsko je (razen v primeru linearne funkcije) neprimerna. Računsko primernejša je naslednja, analitična definicija odvoda. Kot pri geometrijski definiciji odvoda, bomo tudi pri novi definiciji uporabili pojem diferenčnega količnika funkcije:
Naj bo $h \neq 0$ poljubno realno število. Diferenčni količnik funkcije $y = f(x)$ v točki $T(x, y = f(x))$ je izraz:

$$\boxed{\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Seveda je diferenčni količnik funkcije v dani točki $T(x, y)$ odvisen od števila h. Za pokušino poiščimo diferenčni količnik funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}$$

Če ne poznamo binomskega izreka, s katerim smo razvili binom $(x+h)^n$, uporabimo naslednjo formulo iz prvega letnika:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Tedaj:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \underbrace{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}}_{n-\text{členov}}$$

Zgled 9: Preveri pravilnost diferenčnih količnikov naslednjih funkcij:

1. $f(x) = x^2$, $\dfrac{\Delta f}{h} = 2x + h$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$
3. $f(x) = \sin x$, $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\cos(x + \frac{h}{2})$
4. $f(x) = \ln x$, $\dfrac{\Delta f}{h} = \ln(1 + \dfrac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$

V prvem primeru lahko uporabimo kar izpeljani rezultat za funkcijo x^n ali pa še enkrat prehodimo v primeru opisano pot:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{\cancel{h} \cdot (2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h$$

V drugem primeru odpravimo koren iz števca ('racionaliziranje" števca):

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h} \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

V tretjem primeru uporabimo pravilo za "faktorizacijo" razlike kotnih funkcij $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \cdot \sin\dfrac{x+h-x}{2} \cdot \cos\dfrac{x+h+x}{2}}{h} = \frac{2 \cdot \sin\dfrac{h}{2} \cdot \cos\dfrac{2x+h}{2}}{h} = \frac{2 \cdot \sin\dfrac{h}{2}}{h} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})$$

V zadnjem primeru uporabimo pravila za računanje logaritmov, ki seveda veljajo tudi za naravni logaritem ln z osnovo e:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + \frac{h}{x}) = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad \blacksquare$$

Zapišimo sedaj analitično definicijo odvoda:

Odvod funkcije f v točki $T(x, y)$ je enak limiti diferenčnega količnika funkcije f, ko se h bliža nič, torej

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Zgled 10: Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

1. $f(x) = x^n$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \ln x$

Diferenčne količnike vseh funkcij smo izračunali v prejšnjem zgledu, odvode pa izračunamo z ustreznimi limitami. Začnimo kar po vrsti, torej je prva funkcija $f(x) = x^n$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot 0 + \ldots + 0^{n-1} = nx^{n-1}$$

Zato je $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Za funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$ račun poteka takole:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Zato je $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Koren $\sqrt{x}$ lahko zapišemo v obliki potence $x^{\frac{1}{2}}$. Potenčno funkcijo x^n ($n \in \mathbb{N}$) odvajamo tako, da eksponent n postavimo pred osnovo x ($n \cdot x^{n-1}$), novi eksponent pa je za ena zmanjšani stari eksponent. Enako pravilo velja tudi v primeru korenske funkcije, saj je

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

V primeru funkcije $f(x) = \sin x$ uporabimo v prejšnjih poglavjih račun $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin au}{u} = a$. Zato je:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} \cos(x + \frac{h}{2}) = 2 \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{h}}_{=2\cdot\frac{1}{2}=1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2})}_{=\cos x} = \cos x$$

in tako $(\sin x)' = \cos x$.

V zadnjem primeru uporabimo limito, s katero smo izračunali število e, in sicer obliko $\lim_{t\to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$. Dobimo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\dfrac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\dfrac{x}{h}\cdot\dfrac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\dfrac{x}{h}}\right)^{\dfrac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

Zato je $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ ■

Zgled 11: Izračunaj z analitično definicijo odvod funkcije $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$.

Izračunamo in uredimo diferenčni količnik ($f(x+h) = \frac{(x+h)+1}{2(x+h)-1}$)

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{\frac{x+h+1}{2x+2h-1} - \frac{x+1}{2x-1}}{h} = \frac{2x^2 + 2xh + 2x - x - h - 1 - 2x^2 - 2hx + x - 2x - 2h + 1}{h(2x + 2h - 1)(2x - 1)} =$$

$$= \frac{-3}{(2x + 2h - 1)(2x - 1)}$$

Zato je $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2x+2h-1)(2x-1)} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$ ■

Računanje odvoda s pomočjo definicije je precej zamudno delo. S "praktičnim pravilom" za računanje limit si pri računanju limite diferenčnega količnika ne moremo pomagati, saj v vsakem primeru dobimo nedefiniran izraz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) - f(x)}{0} = \frac{0}{0}$$

Zato bomo v naslednjem poglavju razvili orodja, s katerimi bomo poenostavili izračun odvodov.

5 Tehnika odvajanja

V prejšnjih letih smo spoznali osnovne lastnosti elementarnih funkcij: linearne ($f(x) = kx + n$) v 1. razredu, kvadratne ($f(x) = ax^2 + bx + c$), eksponentne ($f(x) = a^x$) in logaritemske ($f(x) = \log_a x$),če je le bilo mogoče v drugem razredu, polinome (recimo tretje stopnje $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$) in racionalne funkcije (recimo $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$) v tretjem razredu, pa tudi kotne funkcije (sin, cos, tan) smo spoznali v tretjem razredu. Če smo bili delovni smo v tretjem razredu spoznali tudi lastnosti krožnih funkcij arcsin, arccos in arctan. Te funkcije in take, ki so njihove osnovne računske kombinacije ($+, -, \cdot, :$) bomo imenovali **enostavne** funkcije, tiste, ki so kompozitum dveh ali več enostavnih pa bomo imenovali **sestavljene** funkcije. Tako sta npr. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2-2x+3}$ in $g(x) = x^3 \ln x$ enostavni funkciji, funkciji $h(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ in $q(x) = e^{-x^2}$ pa sta sestavljeni. Pri sestavljenih funkcijah bomo tisto, ki jo na izbranem x uporabimo prvo, imenovali **notranja** funkcija, ostale nastopajoče so **zunanje** funkcije. Tako je v primeru funkcije $h(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ zunanja funkcija sin, notranja linearna funkcija $y = 2x - \frac{\pi}{3}$, v drugem primeru je notranja kvadratna funkcija $y = -x^2$, zunanja je eksponentna funkcija $y = e^x$.

Tehnika odvajanja funkcije (= **kako poiskati odvod** funkcije) je kombinacija uporabe **tabele** odvodov elementarnih funkcij in uporabe **pravil** za odvajanje vsote, razlike, produkta in količnika funkcij ter verižnega pravila za odvod sestavljene funkcije. Tabelo pridelamo tako, da izračunamo diferenčni količnik ustrezne funkcije in njegovo limito.

Nekaj odvodov v tabeli izračunamo na zgoraj opisan način (z limito diferenčnega količnika), nekaj odvodov pa dobimo s kombinacijo pravil in že sestavljene tabele.

Tabela odvodov:

funkcija	**odvod**	**funkcija**	**odvod**
c	0	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
x	1	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pravila izpeljemo s pomočjo pravil limitiranja in nekaj spretnosti v preoblikovanju diferenčnih količnikov. Tako je za vsoto ali razliko dveh funkcij :

$$\frac{\Delta(f \pm g)}{h} = \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} = \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\Delta f}{h} \pm \frac{\Delta g}{h}$$

in zato $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

Diferenco $\Delta(f \cdot g)$ produkta dveh funkcij zapišemo takole:

$$\Delta(f \cdot g) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) =$$

$$= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) = \Delta f \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \Delta g$$

Zato je $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Podobno preoblikujemo diferenco količnika dveh funkcij:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} = \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \frac{\Delta f \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g}{g(x+h)g(x)}$$

Torej je $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Izpeljana pravila zapišimo; pri tem količina a pomeni poljubno število, konstanto.

Pravila odvajanja:

	operacija	**pravilo**	**pravilo a**
1.	vsota	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$(f(x) \pm a)' = f'(x)$
2.	produkt	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
3.	količnik	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\frac{f(x)}{a}\right)' = \frac{f'(x)}{a}$

Pravila v zadnjem stolpcu so preproste posledice pravil v srednjem stolpcu. Prvo pravilo pove, da konstanta, ki jo prištevamo ali odštevamo (**aditivna** konstanta) pri odvajanju izgine, ostali pravili pa povesta, da pri množenju in deljenju funkcije s konstanto odvajamo le funkcijo, konstanto prepišemo.

Dosedaj zapisana pravila nam omogočajo odvajanje vseh enostavnih funkcij. Utrdimo z nekaj primeri.

Zgled 12: Izračunaj $f'(-2)$, če je $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$.

Najprej izračunamo odvod f'. Opazimo, da je zadnja računska operacija v izrazu za funkcijo seštevanje ali odštevanje, zato uporabimo pravila 1., 1a., 2a. in v tabeli odvodov preberemo, kako odvajamo potenco:

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 4 \cdot 1 = \underline{\underline{-2x^2 + x - 4}}$$

Zato je $f'(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 4 = -8 - 2 - 4 = \underline{\underline{-14}}$ ■

Zgled 13: Izračunaj odvod funkcije $y = \dfrac{1 + \sqrt[3]{x^2}}{x} + 2\sqrt{x} - 3$.

Zadnja računska operacija je spet $+$ ali $-$, zato najprej uporabimo pravilo 1. in 1.a. Za odvajanje prvega člena lahko uporabimo pravilo 3. (v tem členu je zadnja operacija /), lahko pa funkcijo predelamo tako, da bomo uporabljali le pravilo 1. Odločimo se za drugo možnost. Odvod korena ni zapisan v tabeli, pa saj ni potreben, ker lahko koren zapišemo v obliki potence. Torej: $y = x^{-1} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3 = x^{-1} + x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3$. Zato je:

$$y' = -x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

Dogovorimo se, da rezultat odvajanja zapišemo nazaj s koreni, čeprav smo v vmesnih korakih uporabljali potenčni zapis korena. ■

Zgled 14: Odvajaj funkcijo $f : x \mapsto \dfrac{2\sin x}{1 + \cos x}$.

Predpis zapišimo v bolj običajni obliki $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1 + \cos x}$. Zadnja operacija v predpisu funkcije je deljenje, zato uporabimo pravilo 3. in v tabeli poiščemo odvode ustreznih kotnih funkcij.

$$f'(x) = \frac{2\cos x(1 + \cos x) - 2\sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + \overbrace{2\cos^2 x + 2\sin^2 x}^{=2}}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2(\cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{1 + \cos x}}} \; \blacksquare$$

Zgled 15: Izračunaj ničle funkcije $f'(x)$, če je $f(x) = x^3 \cdot \ln x$.

Zadnja računska operacija je množenje funkcij, zato uporabimo pravilo 2. Torej:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = \underline{\underline{x^2(3 \ln x + 1)}}$$

Ker je funkcija f definirana le za pozitivne x, je $f'(x) = 0$ le takrat, ko je $3 \ln x + 1 = 0$. To pa se zgodi takrat, ko je $x = e^{-\frac{1}{3}} \doteq 0,7165$. ■

6 Odvod sestavljene funkcije

Pravila iz prejšnjega razdelka nam omogočajo odvajati enostavne funkcije, v tem razdelku se bomo naučili odvajati sestavljene funkcije. Ponovimo:

Funkcija h je **sestavljena** funkcija ali **kompozitum** funkcij f in g (oznaka $h = f \circ g$), če je $h(x) = f(g(x))$. Drugače povedano: $f \circ g$ preslika spremenljivko x v y tako, da funkcija g preslika x v u (torej: $u = g(x)$), dobljeni u pa funkcija f preslika v y (torej: $y = f(u)$).

V zapisu sestavljene funkcije $y = f(g(x))$ imenujmo funkcijo g **notranja** funkcija (to na izbranemu x uporabimo najprej), funkcijo f pa **zunanja** funkcija. V spodnji tabeli je nekaj primerov sestavljenih funkcij:

funkcija $y = (f \circ g)(x)$	**notranja** $u = g(x)$	**zunanja** $y = f(u)$
$y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$	$u = \frac{x-1}{x+1}$	$y = \sqrt[3]{u}$
$y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$	$u = 2x - \frac{\pi}{3}$	$y = \sin u$
$y = e^{-x^2+2x}$	$u = -x^2 + 2x$	$y = e^u$
$y = \log_2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$y = \log_2 u$

Spomnimo se, da je odvod funkcije, recimo q, enak limiti diferenčnega količnika funkcije q:

$$q'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta q}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{q(z+t) - q(z)}{t}$$

Spremembo neodvisne spremenljivke smo tu označili s t, lahko pa bi jo tudi s kako drugo oznako; važno je le, da se pri računanju limite diferenčnega količnika (=odvoda) ta sprememba zmanjšuje (= giblje proti 0). Ker je $\Delta q = q(z+t) - q(z)$, je $q(z+t) = q(z) + \Delta q$. Še to pripomnimo, da je $\lim\limits_{h\to 0} \Delta q = 0$.

Diferenčni količnik sestavljene funkcije $y = f(g(x))$ je enak:

$$\frac{\Delta(f\circ g)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Označimo $u = g(x)$ in upoštevajmo, da je $g(x+h) = g(x) + \Delta g = u + \Delta g$. Diferenčni količnik sestavljene funkcije preoblikujmo v:

$$\frac{\Delta(f\circ g)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(u+\Delta g) - f(u)}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{h} = \frac{f(u+\Delta g) - f(u)}{\Delta g}\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Pošljimo $h \to 0$. Potem tudi Δg potuje proti 0 in je zato $\lim\limits_{\Delta g\to 0}\dfrac{f(u+\Delta g) - f(u)}{\Delta g} = f'(u)$ in $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$.

Tako smo pridelali znamenito formulo za odvod sestavljene funkcije (=verižno pravilo):

$$\boxed{((f\circ g)(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

Če notranjo funkcijo označimo z u, torej $u = g(x)$, lahko zapišemo verižno pravilo v obliki:

$$\boxed{((f\circ g)(x))' = (f(u))' = f'(u)\cdot u'}$$

Verižno pravilo uporabimo na nekaj primerih:

Zgled 16: Izračunaj odvod funkcije $f(x) = (2x-3)^4$.

Označimo notranjo funkcijo z u, torej $u = 2x - 4$. Potem je $f(x) = u^4$. Zato je $f'(x) = 4u^3 \cdot u'$. Ker je $u' = 2$, je $f'(x) = \underline{\underline{8(2x-3)^3}}$. ■

Zgled 17: Izračunaj odvod funkcije $y = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

Spet označimo z u notranjo funkcijo $\frac{2x-1}{x+2}$, izračunajmo njen odvod $u' = \frac{2\cdot(x+2)-(2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$. Uporabimo formulo za verižno pravilo na funkciji $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$:

$y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = -\frac{u'}{2u^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{-\frac{5}{2(x+2)\sqrt{(x+2)(2x-1)}}}}$ ■

Zgled 18: Izračunaj odvod funkcije $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Tokrat primer rešimo na dva načina (komentar prepuščamo bralcu).

1. način:

$$y = \ln u,\ u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{v},\ v = \frac{1-x}{1+x}$$

$$v' = \frac{-2}{(1+x)^2},\quad u' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$$

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{u}\cdot\frac{v'}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v}}\cdot\frac{v'}{2\sqrt{v}} = \frac{v'}{2v} = \frac{-2}{(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{2(1-x)} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2-1}}}$$

2. način:

$$y = \ln\sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}} = \tfrac{1}{2}\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right)$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-1}{1-x} - \tfrac{1}{1+x}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} = \tfrac{-2}{2(1-x)(1+x)} = \underline{\underline{\tfrac{1}{x^2-1}}}$$

■

Funkcijo $y = \sqrt{1-x^2}$ lahko zapišemo tudi v implicitni (=nerazviti) obliki $x^2 + y^2 = 1$. Pri odvajanju implicitnih funkcij si moramo zapomniti, da je y funkcija spremenljivke x, zato je v našem primeru izraz y^2 sestavljena funkcija z zunanjo funkcijo u^2 in notranjo funkcijo $u = y$. V takem primeru odvod izraza y^2 enak:

$$(y^2)' = (u^2)' = 2u\cdot u' = 2y\cdot y'$$

Tudi pri implicitno danih funkcijah moramo izračunati odvod y'. To storimo, da odvajamo implicitno enačbo funkcije in upoštevamo, da je y funkcija spremenljivke x. V našem primeru je:

$(x^2+y^2)' = 1' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \underline{\underline{-\frac{x}{y}}} = \underline{\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}$ ■

Zgled 19: Izračunaj vrednost odvoda implicitno dane funkcije (krožnice) $x^2 + y^2 = 8ax$ v tistem presečišču s krivuljo $y^2(2a - x) = x^3$, ki ima pozitivno ordinato (a je pozitivna konstanta).

Presečišča izračunamo tako, da rešimo sistem ustreznih enačb $x^2 + y^2 = 8ax \quad y^2(2a - x) = x^3$. Izrazimo iz druge enačbe y^2, uvrstimo v prvo, ki jo uredimo do enačbe $ax(5x - 8a) = 0$. Potem je ustrezno presečišče $P(\frac{8a}{5}, \frac{16a}{5})$. Odvajajmo implicitno podano krožnico. Dobimo: $2x + 2yy' = 8a$ in odtod $y' = \frac{4a - x}{y}$ in tako $y'(P) = \frac{4a - \frac{8a}{5}}{\frac{16a}{5}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ ■

Zgled 20: Z implicitnim odvajanjem enostavno izračunamo odvode inverznih funkcij. Oglejmo si kako to storimo na primerih funkcij: eksponentne $y = e^x$ in ciklometričnih $y = \arccos x$ ter $y = \arctan x$.

Začnimo z eksponentno funkcijo $y = e^x$. Njena inverzna funkcija je naravni logaritem ln. Torej je

$$\ln y = x \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y' = y = e^x}}$$

Nadaljujmo s funkcijo $y = \arccos x$. Njena implicitna oblika je $\cos y = x$. Zato je:

$$\cos y = x \;\Rightarrow\; -\sin y \cdot y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}}$$

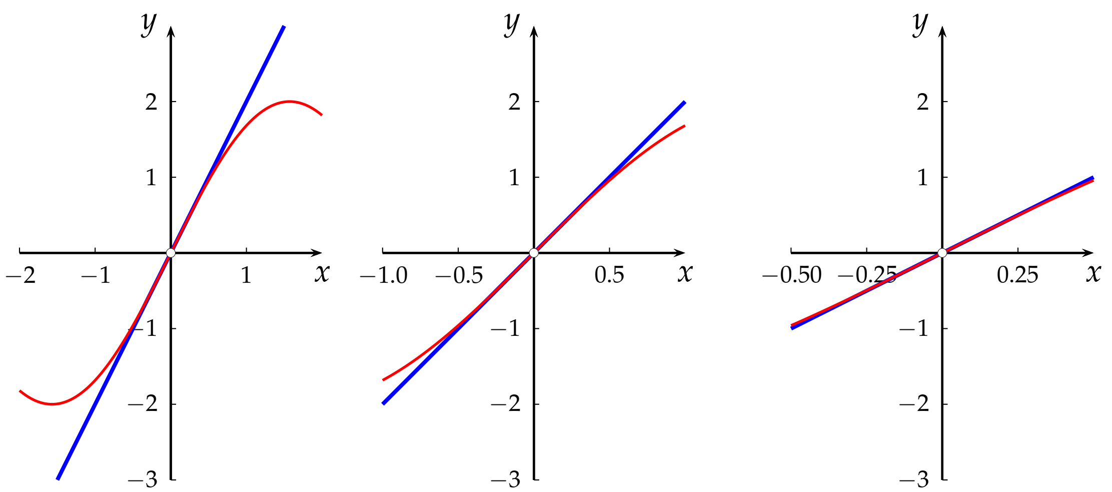
Še funkcija $f(x) = \arctan x$. Njena implicitna oblika je $\tan y = x$, kjer je $y = f(x)$. Zato je:

$$\tan y = x \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + x^2}}} \qquad ■$$

7 Tangente in normale

Spomnimo se, da smo tangento na graf funkcije v dani točki imenovali tisto premico, ki ima smerni koeficient enak odvodu funkcije v dani točki, drugače rečeno, tangenta je premica, ki se krivulji v ustrezni točki "najbolj prilega".

Na spodnjih slikah je prikazan graf funkcije $y = 2\sin x$ in njegove tangente z dotikališčem v izhodišču koordinatnega sistema. Slike so v različnih povečavah, največja je na desni sliki.



Slika 8: Graf funkcije $2\sin x$ in tangente v točki $(0, 0)$ v različnih povečavah

Opazimo, da se na zadnji sliki tangenta in graf funkcije skoraj ne razlikujeta. [4] To pomeni, da so funkcijske vrednosti funkcije v okolici dotikališča skoraj enake funkcijskim vrednostim linearne funkcije, katere graf predstavlja tangenta. V enačbi tangente $y = kx + n$ sta predpisa preprosti računski operaciji seštevanja in množenja, zato nam opisan postopek omogoča preprost izračun približne funkcijske vrednosti v okolici izbranega dotikališča.

Zgled 21: Z opisanim postopkom izračunaj približno vrednost $2\sin 1°$.

Izpišimo potrebne podatke:

[4] To velja za lepe ali gladke funkcije, za katere lahko v ustrezni točki lahko izračunamo odvod, torej lahko v tisti točki položimo tangento na graf funkcije

1. Naša **funkcija** je $f(x) = 2\sin x$

2. Tangento postavimo v **izbrani točki** $D(x_0, y_0 = f(x_0))$ grafa naše funkcije. Običajno izberemo tako točko, v kateri znamo izračunati funkcijsko vrednost; v našem primeru izberimo točko $T(0,0)$.

3. Izračunamo **odvod** funkcije v izbrani točki; v našem primeru je $f'(x) = 2\cos x$ in $f'(0) = 2$.

4. Zapišemo **enačbo tangente** v izbrani točki. Zato se spomnimo geometrijske definicije odvoda funkcije, ki pravi, da je odvod funkcije v dani točki enak smernemu koeficientu tangente ($= k_t$). Zato je enačba tangente v točki $D(x_0, y_0)$ enaka:

$$y = k_t x + n,\ n = y_0 - k_t x_0 \quad \text{ali} \quad y = y_0 + k_t(x - x_0)$$

   V našem primeru je enačba tangente $y = 2x$.

5. **Izračunamo približno vrednost** funkcije pri izbrani vrednosti x. Pri tem upoštevamo, da je vrednost funkcije, označimo jo z y_f, približno enaka vrednosti na tangenti $y_t = y_0 + k_t(x - x_0)$. V našem primeru je zato (stopinje pretvorimo v radiane $1^\circ = \frac{\pi}{180}$):

$$y_f = 2\sin 1^\circ = 2\sin\frac{\pi}{180} \approx y_t = \frac{\pi}{90} \approx 0,0349065850$$

   Izračunana vrednost se le malo loči od z računalom izračunane vrednosti na 10 decimalnih mest: $2\sin 1^\circ \doteq 0,0349048129$. ■

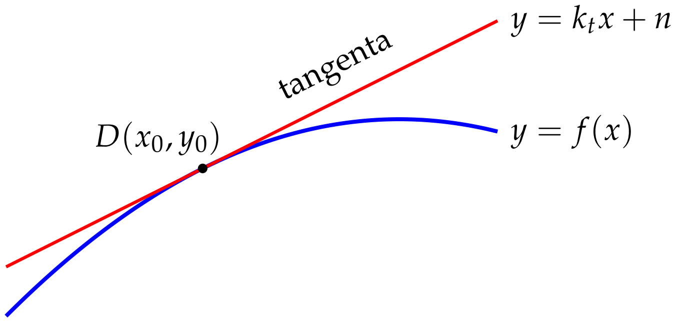
Zgled 22: V naslednjem primeru zapiši manjkajoče komentarje.

$\sqrt[3]{8,001} = ?$, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x_0 = 8$, $y_0 = f(x_0) = 2$, $k_t = f'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$

$\sqrt[3]{8,001} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0,001 \approx 2,000083$ ■

Dosedanje pisanje nas poskuša prepričati, da je koristno znati poiskati enačbo tangente na dano krivuljo (običajno graf funkcije) v dani točki krivulje. Prav iskanje enačbe tangente je glavna naloga tega razdelka. Glavne količine, ki pri tem nastopajo so:

- Enačba funkcije $y = f(x)$.
- Dotikališče $D(x_0, y_0)$.



Slika 9: Graf funkcije, dotikališče, tangenta

- Smerni koeficient k_t tangente.

Naša naloga je poiskati enačbo tangente v točki D. Pri tem bomo uporabili znanja o enačbi premice.

Enačbo tangente zapišemo v eni od oblik:

$$\boxed{y = k_t x + n,\ n = y_0 - k_t x_0} \text{ ali } \boxed{y = y_0 + k_t(x - x_0)} \text{ ali } \boxed{y - y_0 = k_t(x - x_0)}$$

Kot nam pove geometrijska definicija odvoda, smerni koeficient tangente (k_t) izračunamo z odvodom funkcije f: $\boxed{k_t = f'(x_0)}$. Katerokoli obliko enačbe tangente izberemo, vedno v njej nastopajo trije parametri: koordinati dotikališča x_0, y_0 in smerni koeficient k_t. Parametri so povezani z dvema enačbama: $y_0 = f(x_0)$ in $k_t = f'(x_0)$. [5] Torej za iskanje enačbe tangente zadošča, če poznamo enega od parametrov x_0, y_0, k_t; ostala dva potem izračunamo. Ponazorimo z nekaj primeri.

Zgled 23: Zapiši enačbo tangente na dano krivuljo v dani točki:

1. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ **v presečišču z ordinatno osjo.**
2. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ **v ničli.**
3. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ **v točki z absciso** $x_0 = \frac{\pi}{2}$**.**

V prvem primeru poznamo $x_0 = 0$, saj imajo točke na ordinatni osi tako absciso. Zato je $y_0 = \frac{0+1}{2\cdot 0-1} = -1$. Da izračunamo k_t, moramo najprej izračunati odvod funkcije f: $f'(x) =$

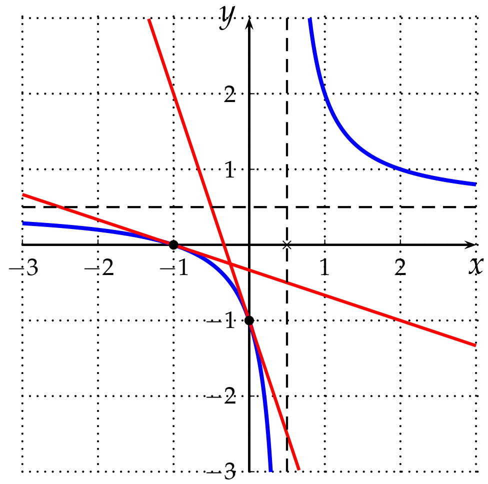
[5] Če je krivulja podana implicitno z enačbo $f(x, y) = 0$, enačbi postaneta: $f(x_0, y_0) = 0$ in $k_t = y'(x_0, y_0)$

$\frac{1\cdot(2x-1)-(x+1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$. Zato je $k_t = \frac{-3}{(2\cdot 0-1)^2} = -3$. Tako je enačba tangente:

$$y-(-1) = -3(x-0) \Rightarrow \underline{\underline{y=-3x-1}} \qquad \square$$

V drugem primeru je $y_0 = 0$ in zato $x_0 = -1$. Ker imamo opravka z isto funkcijo kot v prvem primeru, je $k_t = \frac{-3}{2\cdot(-1)-1)^2} = -\frac{1}{3}$. Zato je enačba tangente:

$$y-0 = -\frac{1}{1}(x-(-1)) \Rightarrow \underline{\underline{y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}} \qquad \square$$



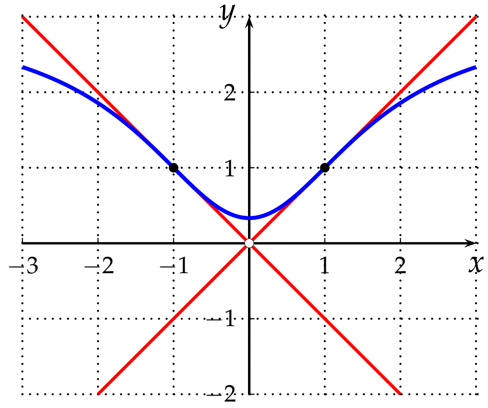
Slika 10: Slika tangent za prva dva primera

V tretjem primeru poznamo x_0. Potem je $y_0 = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+2 = -\frac{1}{2}+2 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$. Za izračun smernega koeficienta k_t potrebujemo odvod funkcije. Izračunajmo ga z verižnim pravilom: $u = 2x-\frac{\pi}{3}$, $u' = 2 \Rightarrow y' = -2\sin u = -2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Zato je $k_t = -2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$. Enačba tangente je tako: $\underline{\underline{y=\frac{3}{2}-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}$ ali v implicitni obliki $\underline{\underline{2\sqrt{3}x+2y-3+\pi\sqrt{3}=0}}$. $\blacksquare$

Zgled 24: Pokaži, da tangente na krivuljo $y = \frac{3x^2+1}{x^2+3}$, ki imajo dotikališče v točki z ordinato 1, vsebujejo koordinatno izhodišče.

Podatki: $y = \frac{3x^2+1}{x^2+3}$, $y_0 = 1$. Izračunamo x_0: $1 = \frac{3x_0^2+1}{x_0^2+3} \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow D_1(1,1)$ in $D_2(-1,1)$. Torej moramo izračunati enačbi dveh tangent. Najprej potrebujemo $y' =$

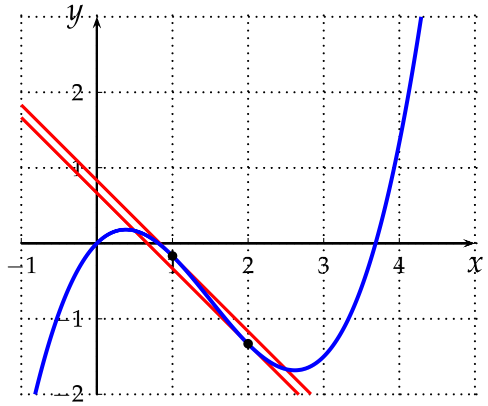
$\dfrac{6x(x^2+3)-(3x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{16x}{(x^2+3)^2}$. Izračunamo ustrezna smerna koeficienta: $k_1 = y'(1) = 1$ in $k_2 = y'(-1) = -1$. Zato sta enačbi tangent: $y = 1+1\cdot(x-1) \Rightarrow \underline{\underline{y = x}}$ in $y = 1-1\cdot(x+1) \Rightarrow \underline{\underline{y = -x}}$. Obe opisani tangenti res potekata skozi izhodišče. ■



Slika 11: Slika k zgledu 4

Zgled 25: Izračunaj razdaljo med tangentama na krivuljo $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$, ki sta vzporedni premici $y = -x$.

Znani podatek je $k_t = -1$ (vzporednost premic). Poiskati moramo koordinati x_0 in y_0 dotikališč(a).

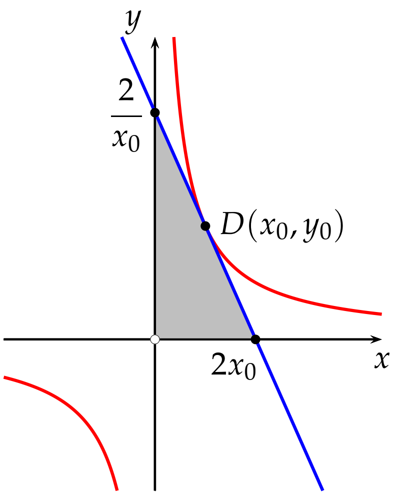


Slika 12: Slika k zgledu 5

Zato potrebujemo sistem dveh enačb. Prvo enačbo $y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - \frac{3}{2}x_0^2 + x_0$ pripišemo dejstvu, da dotikališče leži na krivulji, drugo enačbo $-1 = x_0^2 - 3x_0 + 1$ pa dejstvu, da je smerni koeficient tangente enak odvodu funkcije v dotikališču. Druga enačba pove, da je $x_0 = 1$ ali $x_0 = 1$, prva pa, da sta potem dotikališči $D_1(1, \frac{1}{6})$ in $D_2(2, -\frac{4}{3})$. Enačbi ustreznih tangent sta $6x + 6y - 5 = 0$ in $3x + 3y - 2 = 0$. Upoštevajmo enačbo za oddaljenost točke od premice (tangenti sta vzporedni, zato je razdalja med njima enaka oddaljenosti ene od točk na prvi tangenti do druge tangente): $d = \left| \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{6} - 2}{3\sqrt{2}} \right| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}}$. ■

Zgled 26: Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga odreže od koordinatnih osi tangenta na krivuljo z enačbo $y = \dfrac{1}{x}$ in dotikališčem v prvem kvadrantu.

Za lažjo predstavo narišimo graf funkcije $y = \frac{1}{x}$, na njegovi veji v prvem kvadrantu izberimo poljubno točko $D(x_0, y_0 = \frac{1}{x_0})$. Narišemo tangento z dotikališčem v D in označimo trikotnik, ki ga tangenta odreže od osi. Izračunati moramo ploščino tega trikotnika. Opisano je prikazano na spodnji sliki.



Slika 13: Slika k zgledu 6

Upoštevajmo, da je $k_t = -\frac{1}{x_0^2}$ in enačba tangente z dotikališčem $D(x_0, y_0)$ v prvem kvadrantu: $y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Enačbo tangente preoblikujemo v odsekovno obliko: $\dfrac{x}{2x_0} + \dfrac{y}{\frac{2}{x_0}} = 1$ ali pa izračunamo odseka na oseh. Zato je iskana ploščina enaka $\dfrac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \dfrac{2}{x_0} = \underline{\underline{2}}$ in je neodvisna od dotikališča. ■

Zgled 27: **Izračunaj, za katere vrednosti parametra n je premica $y = 8x + n$ tangenta na krivuljo z enačbo $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.**

Smerni koeficient premice $y = 8x + n$ je enak 8, zato je tudi odvod funkcije f v morebitnih dotikališčih enak 8. Vzemimo, da je dotikališče iskane tangente točka $D(a, b)$. Potem je $f'(a) = 8$. Ker je $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, za absciso a dotikališča dobimo enačbo $\frac{2}{(a+1)^2} = 8$, ki ima rešitvi $a_1 = -1/2$ in $a_2 = -3/2$. Ustrezni ordinati b sta enaki $b_1 = f(a_1) = -3$ in $b_2 = f(a_2) = 5$. Enačbi ustreznih tanget sta potem $y + 3 = 8(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 8x + 1$ in $y - 5 = 8(x + \frac{3}{2}) \Rightarrow y = 8x + 17$. Zato sta iskana parametra n dva: $n_1 = 1$ in $n_2 = 17$. Poskušaj nalogo rešiti brez uporabe odvoda. ■

Zgled 28: **Zapiši enačbo tangente na krožnico $x^2 + y^2 = r^2$ v poljubni točki $T(x_0, y_0)$ na krožnici.**

V tem primeru predpostavimo, da poznamo bodisi x_0, bodisi y_0 izbrane točke. Drugo koordinato izračunamo iz enačbe krožnice $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ in pri tem pazimo, da izberemo pravo med nastalima rešitvama. Potrebujemo še smerni koeficient tangente, za katerega vemo, da je enak odvodu ($= y'(x_0, y_0)$). Odvod izračunamo z implicitnim odvajanjem: $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$. Zato je $k_t = -\frac{x_0}{y_0}$ in tako:

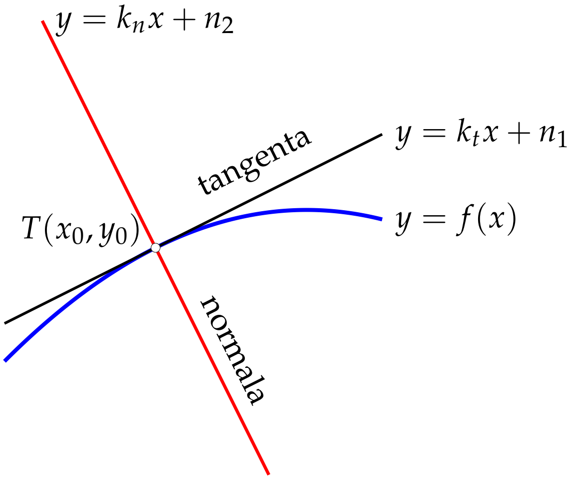
$$y = y_0 + k_t(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow \underline{\underline{x_0x + y_0y = r^2}} \ ■$$

Opišimo še pojem normale na krivuljo z enačbo $y = f(x)$.

Normala na krivuljo v točki $T(x_0, y_0)$ grafa funkcije ali krivulje je premica, ki je pravokotna na tangento na graf funkcije ali krivulje v točki $T(x_0, y_0)$.

Podobno, kot smo tangento zapisali v treh oblikah, tudi enačbo normale skozi dano točko $T(x_0, y_0)$ zapišemo v eni od naslednjih oblik (k_n je smerni koeficient normale):

$$\boxed{y = k_nx + n,\ n = y_0 - k_nx_0} \quad \text{ali} \quad \boxed{y = y_0 + k_n(x - x_0)} \quad \text{ali} \quad \boxed{y - y_0 = k_n(x - x_0)}$$



Slika 14: Tangenta, normala

Ker je normala pravokotna na tangento, je smerni koeficient normale enak obratni in nasprotni vrednosti smernega koeficienta tangenta, torej je:

$$\boxed{k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}}$$

Zgled 29: Zapiši enačbo tangente in enačbo normale na graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x$ v točki $A(-2, y_0)$.

K zapisanemu naj bralec sam doda komentarje.

$$x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = f(-2) = -2, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow k_t = f'(-2) = 9 \text{ in } k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{9}$$

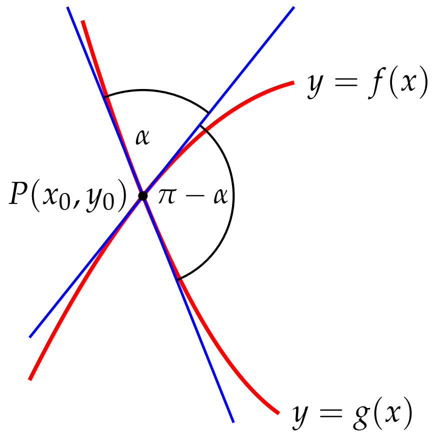
Tangenta: $y = -2 + 9(x+2) \Rightarrow \underline{\underline{y = 9x + 16}}$, normala: $y = -2 - \frac{1}{9}(x+2) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{9}x - \frac{20}{9}}}$.
■

8 Kot med krivuljama

Spomnimo se, da kot določajo vrh in dva poltraka, ki imata izhodišče v vrhu. Tudi kot med premicama v ravnini nam je že poznan; to je ostri kot z vrhom v presečišču premic, kraka pa sta ustrezna dela premic. Če sta premici podani v koordinatni ravnini, poznamo njuna smerna koeficienta, recimo k_1 in k_2. Potem lahko izračunamo kot med njima (recimo α) z znano formulo:

$$\boxed{\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|}$$

Kako definirati kot med dvema krivuljama v ravnini? Očitno se morata krivulji sekati; presečno točko izberemo za vrh kota med krivuljama (če je presečišč več, je tudi kotov med krivuljama več), kraka pa naj ležita na tangentah na krivulji v presečni točki.



Slika 15: Kot α med krivuljama z enačbama $y = f(x)$ in $y = g(x)$

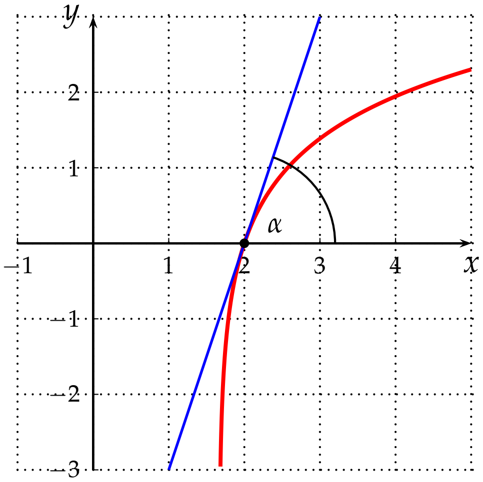
V presečišču nastanejo štirje koti, ki sestavljajo dva para (enakih) sovršnih kotov. Za kot med krivuljama proglasimo ostrega med nastalimi koti. Izbrani kot izračunamo s formulo za kot med premicama (=tangentama). Torej: Kot med krivuljama z enačbama $y = f(x)$ in $y = g(x)$ izračunamo tako, da:

- Izračunamo presečišče(a) P med krivuljama; torej rešimo sistem enačb $y = f(x)$, $y = g(x)$ (abscise dobimo običajno z enačenjem, torej z enačbo: $f(x) = g(x)$).
- Izračunamo odvoda $f'(x)$ in $g'(x)$.

- Izračunamo smerna koeficienta k_1 in k_2 tangent na krivulji v presečišču: $k_1 = f'(P) = f'(x_0)$, $k_2 = g'(P) = g'(x_0)$.
- Za izračun kota uporabimo formulo: $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$

Zgled 30: Izračunaj na minuto točno kot pod katerim graf funkcije $f(x) = \ln(3x-5)$ seka abscisno os.

Enačbi krivulj sta $y = \ln(3x-5)$ in $y = 0$ (abscisna os).



Presečišče izračunamo iz logaritemske enačbe $\ln(3x-5) = 0$, ki ima rešitev $x = 2$. Presečišče je zato $P(2, 0)$.

V naslednjem koraku izračunamo odvod sestavljene funkcije $y = \ln(3x-5)$; označimo $u = 3x - 5$ in $y = \ln u$. Potem je $y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{3}{3x-5}$.

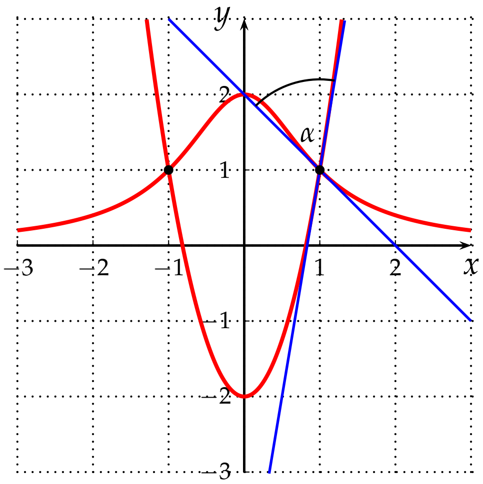
Odvod druge funkcije ($y = 0$) je v tem primeru očiten: $y' = 0$.

Izračunamo smerna koeficienta tangent v presečišču P: $k_1 = \frac{3}{3 \cdot 2 - 5} = 3$ in $k_2 = 0$.

Uporabimo formulo za kot: $\tan\alpha = \left|\frac{3-0}{1+3\cdot 0}\right| = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 71°34'}}$. ■

Zgled 31: Izračunaj kot med krivuljama $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ in $y = 3x^2 - 2$. Rezultat zaokroži na stotinko stopinje. Nariši ustrezni sliko.

Kljub temu, da naloga ne zahteva slike, si sliko racionalne in kvadratne funkcije za vajo narišimo:



Ker sta obe funkciji sodi ($f(-x) = f(x)$), zadostuje, da izračunamo kot v presečišču s pozitivno absciso. Za izračun presečišč zapišemo in rešimo enačbo:

$$\frac{2}{1+x^2} = 3x^2 - 2 \Rightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{x^2=t} 3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1, x_2 = -1}}$$

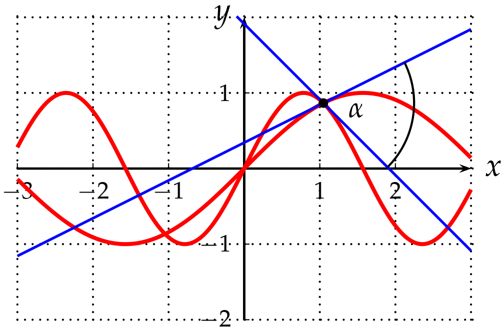
Iskani presečišči sta: $P_1(1,1)$, $P_2(-1,1)$.

Izračunamo odvoda obeh funkcij: $y' = \dfrac{-4x}{1+x^2}$ in $y' = 6x$.

Ustrezna smerna koeficienta tangent v presečišču P_1 sta $k_1 = -1$ in $k_2 = 6$.

Potem je $\tan\varphi = \left|\frac{-1-6}{1-1\cdot 6}\right| = \frac{7}{5}$. Zato je $\underline{\underline{\varphi = 54,46^\circ}}$. ∎

Zgled 32: Izračunaj kot med grafoma funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \sin 2x$ v presečišču z absciso v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Nariši ustrezno sliko in rezultat zaokroži na minuto točno.



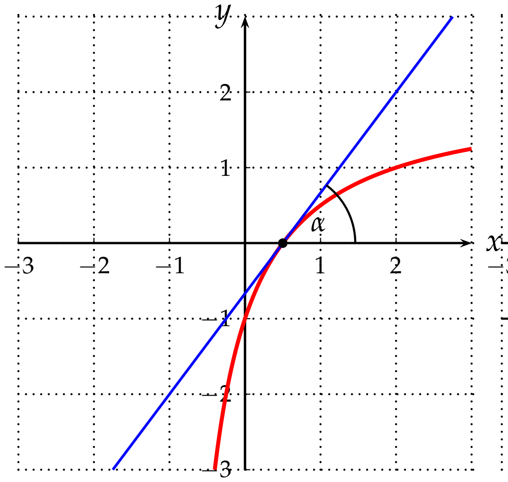
Presečišče: $f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x = \sin 2x$; poenotimo kote in faktoriziramo $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$. Rešitve enačbe $\sin x = 0$ ($x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) ne ustrezajo pogojem naloge. Ustrezno presečišče poiščemo med rešitvami enačbe $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ustrezna rešitev v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je $x = \frac{\pi}{3}$, zato je presečišče $P(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

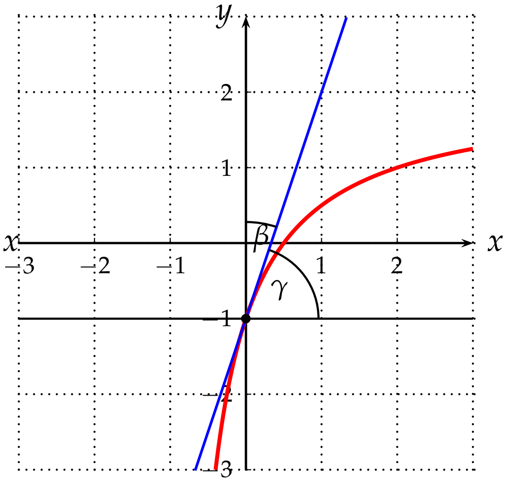
Odvoda: $f'(x) = \cos x$ in $g'(x) = 2\cos 2x$.

Smerna koeficienta tangent: $k_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ in $k_2 = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$.

Iskani kot: $\tan\alpha = \left|\dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}\right| = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 71°34'}}$. ■

Zgled 33: Izračunaj na stotinko stopinje kota, pod katerima seka graf funkcije $y = \dfrac{2x-1}{1+x}$ abscisno in ordinatno os.



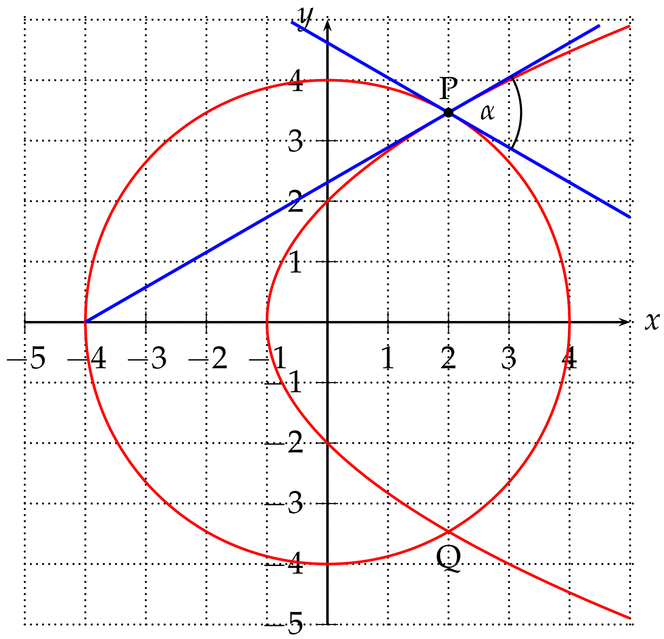


Presečišči ni težko izračunati: $A(\frac{1}{2},0)$ in $B(0,-1)$. Potrebujemo odvod dane funkcije: $y' = \dfrac{3}{(1+x)^2}$. V točki A bo smerni koeficient $k_A = \frac{4}{3}$, v točki B pa $k_B = 3$. Smerni koeficient abscisne osi k_2 je enak 0, zato je $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_A - k_2}{1 + k_A k_2}\right| = k_A = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 53,13^\circ}}$

Ordinatna os smernega koeficienta nima, zato kot β ne moremo izračunati z običajno metodo. Zagato rešimo tako, da najprej izračunamo kot γ med tangento v točki B in vzporednico abscisni osi skozi točko B. Očitno je potem $\beta = 90^\circ - \gamma$. Vzporednice abscisni osi imajo smerni koeficient enak 0, zato je $\tan\gamma = k_B = 3 \Rightarrow \gamma = 71,57^\circ$ in tako $\underline{\underline{\beta = 18,43^\circ}}$. ■

Zgled 34: Izračunaj kot med krivuljama $y^2 = 4(x+1)$ in $x^2 + y^2 = 16$.

Za tiste, ki ne poznajo krivulj drugega reda povejmo, da je prva krivulja parabola s temenom v $(-1,0)$ in parametrom $p = 2$, druga krivulja pa je krožnica s središčem v izhodišču in polmerom 4.



Presečišča dobimo tako, da rešimo sistem enačb $y^2 = 4(x+1)$ in $x^2 + y^2 = 16$, najbolje z zamenjalnim načinom. Vstavimo $y^2 = 4x + 4$ iz prve enačbe v drugo enačbo; dobimo:

$$x^2 + 4x + 4 = 16 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -6$$

Za drugo rešitev, $x_2 = -6$, hitro opazimo, da ne ustreza sistemu. Zato je edina rešitev $x = 2$, ki pridela dve ordinati: $y^2 = 4(2+1) \Rightarrow y_1 = 2\sqrt{3}$ in $y_2 = -2\sqrt{3}$. Ustrzni presečišči sta dve: $P(2, 2\sqrt{3})$ in $Q(2, -2\sqrt{3})$. Zaradi očitne simetrije sta ustrezna kota enaka, zato bomo izračunali le kot v presečišču P.

Odvoda bomo izračunali z implicitnim odvajanjem in hkrati izračunačli ustrezna smerna koeficienta tangent:

$$y^2 = 4(x+1) \Rightarrow 2y \cdot y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y} \Rightarrow k_1 = y'(P) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow k_2 = y'(P) = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Potem je

$$\tan\alpha = \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \right| = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 60^\circ}} \qquad \blacksquare$$

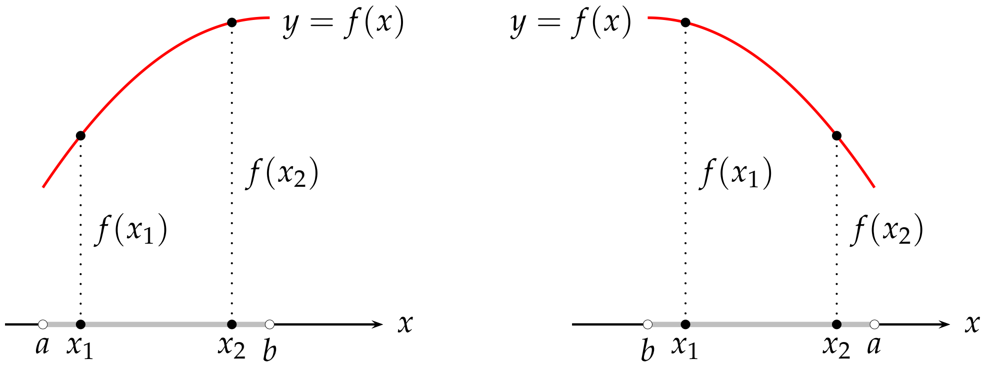
9 Naraščanje-padanje

Vzemimo gladko funkcijo $y = f(x)$ in se spomnimo, kaj smo razumemo pod pojmom naraščanja in padanja funkcij:

Recimo, da funkcija f definirana na intervalu $[a, b]$. Potem je funkcija f:

- **strogo naraščajoča**, če za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala $[a, b]$ velja $f(x_1) < f(x_2)$ (večji x dá večji y).
- **naraščajoča**, če za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala $[a, b]$ velja $f(x_1) \leq f(x_2)$ (večji x dá vsaj enak, če ne večji y).
- **strogo padajoča**, če za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala $[a, b]$ velja $f(x_1) > f(x_2)$ (večji x dá manjši y).
- **padajoča**, če za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala $[a, b]$ velja $f(x_1) \geq f(x_2)$ (večji x dá največ enak, če ne manjši y).

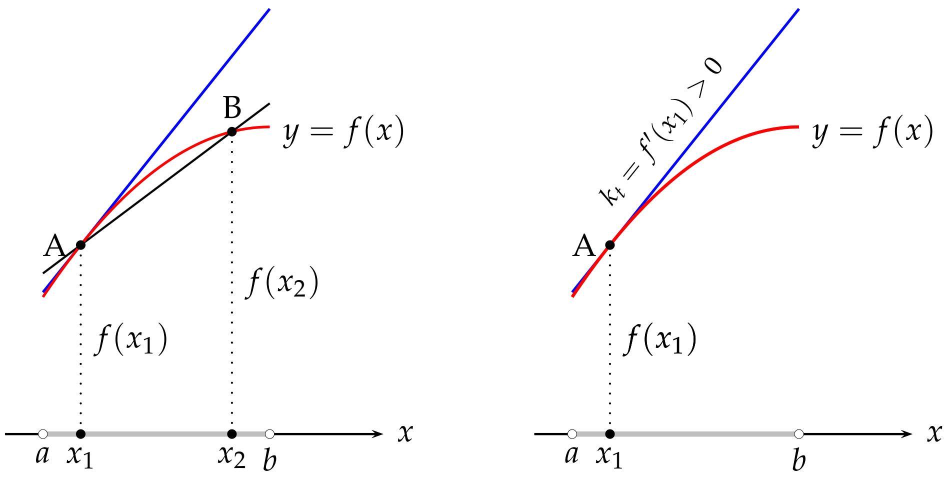
Če je funkcija bodisi naraščajoča bodisi padajoča, jo imenujemo **monotona** funkcija.



Slika 16: Na levi sliki je prikazana naraščajoča funkcija, na desni sliki padajoča funkcija

Graf funkcije si lahko predstavljamo kot "hribovje", ki ga prehodimo od leve proti desni. Na tistih delih "hribovja" (grafa), kjer se vzpenjamo, je funkcija naraščajoča, tam kjer se spuščamo je padajoča. Torej lahko s primerno narisanega grafa lahko ocenimo, kje funkcija narašča, kje pada. Toda slike so nam lahko le v pomoč, za gladke funkcije pa ugotavljamo točke naraščanja in padanja z odvodom.

Kako to storimo. Vzemimo na intervalu $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_2 > x_1$. Naj bo funkcija $y = f(x)$ v danem intervalu strogo naraščajoča.



Slika 17: Ugotavljanje monotonosti z odvodom

Skozi točki $A(x_1, f(x_1))$ in $B(x_2, f(x_2))$ grafa funkcije f napeljemo sekanto. Njen smerni koeficient je pozitiven za poljubno izbiro abscise x_2. Zato je tudi smerni koeficient tangente v točki A pozitiven. Toda smerni koeficient tangente je enak odvodu funkcije, zato je v tistih točkah, kjer funkcija narašča, odvod funkcije pozitiven. S podobnim sklepanjem bi ugotovili, da je v primeru padajoče funkcije odvod funkcije v ustrezni točki negativen; torej:

Gladka funkcija $y = f(x)$ je **naraščajoča** v tistih točkah x, kjer je $\boxed{f'(x) > 0}$, **padajoča** pa v tistih točkah x, kjer je $\boxed{f'(x) < 0}$.

Zgled 35: Ugotovi intervale naraščanja in padanja funkcije

$$f(x) = \frac{1}{128}(x+2)^2(x-4)^3$$

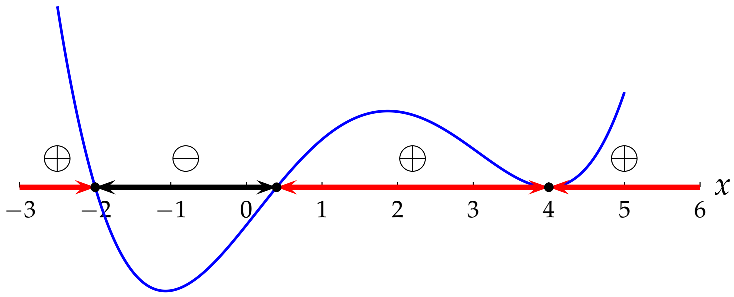
Funkcija je polinom pete stopnje, zato gladka. Običajno polinome zapisujemo v splošni obliki in tej obliki izračunamo odvod, toda v našem primeru bi bil prevod v splošno obliko zamuden. Zato ga bomo odvajali s pravilom produkta in verižnim pravilom:

$$f'(x) = \frac{1}{128}\left(\left((x+2)^2\right)'(x-4)^3 + (x+2)^2\left((x-4)^3\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{128}\left(2(x+2)(x-4)^3 + 3(x+2)^2(x-4)^2\right) = \frac{1}{128}(x+2)(x-4)^2(2x-8+3x+6) =$$

$$= \frac{1}{128}(x+2)(x-4)^2(5x-2)$$

Intervali naraščanja so rešitev neenačbe $f'(x) > 0$, torej $\frac{1}{128}(x+2)(x-4)^2(5x-2) > 0$. Polinomske neenačbe rešujemo s skico približnega grafa. Ničle odvoda f' so $x_1 = -2$, $x_2 = 4(II)$ in $x_3 = \frac{2}{5}$. Vodilni koeficient $\frac{1}{128}$ je pozitiven, stopnja 4, zato je graf:



Iz grafa razberemo, da funkcija narašča v uniji intervalov $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{5}, -4) \cup (4, \infty)$, na intervalu $(-2, \frac{2}{5})$ pa pada. V končnih mejah intervalov je odvod enak 0; tam funkcija niti ne raste, niti ne pada. O takih točkah bomo govorili v naslednjem razdelku. ■

Zgled 36: Učili smo se, da ima polinom tretje stopnje z realnimi koeficienti, ena realno ničlo in par konjugirano kompleksnih ničel, ali pa tri realne ničle. Pokaži, da ima polinom $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$ en samo realno ničlo.

Ker je polinom zvezna (nepretrgana) funkcija in je $p(0) = -4$ ter $p(1) = 7$, polinom $p(x)$ za neko vrednost x med 0 in 1 doseže vrednost 0, torej ena realna ničla leži v intervalu$(0, 1)$. Da je to edina ničla pokažemo takole. Odvod polinoma $p'(x)$ je kvadratna funkcija $6x^2 + 6x + 6$, ki ima negativno diskriminanto ($D = -108$) in pozitivni vodilni koeficient $a = 1$. Zato je $p'(x) > 0$ za vsak x. To pa pomeni, da je polinom $p(x)$ strogo naraščajoča funkcija, ki zato le enkrat preseka abscisno os, torej ima le eno ničlo. ■

10 Stacionarne točke

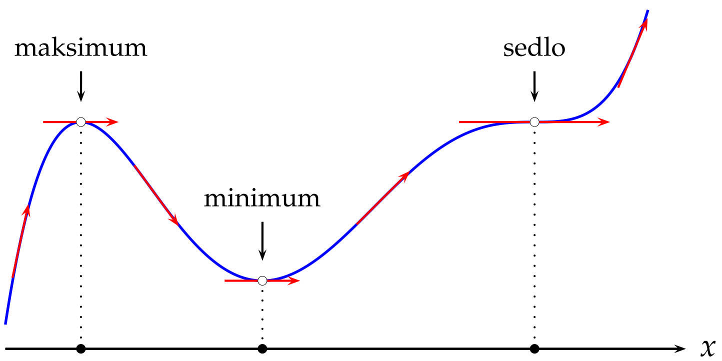
V prejšnjem razdelku smo opazili, da obstajajo pri gladkih funkcijah točke, v katerih funkcija niti ne raste, niti ne pada. Take točke imenujemo **stacionarne** točke. Preprost razmislek pove, da je odvod funkcije v stacionarni točki enak 0.

definicija stacionarn točke

Stacionarne točke gladke (=odvedljive) funkcije z enačbo $y = f(x)$ so tiste, v katerih je vrednost prvega odvoda enaka 0, torej:

$$\boxed{\text{točka } A(x_0, f(x_0)) \text{je stacionarna točka natanko tedaj, ko je } f'(x_0) = 0}$$

Drugače povedano: stacionarne so tiste točke na grafu funkcije, kjer je tangenta na graf vzporedna abscisni osi, torej tiste točke, v katerih je smerni koeficient tangente $k_t = 0$.



Slika 18: Stacionarne točke na "hribovju", grafu funkcije

Stacionarne točke razdelimo na **maksimume, minimume in sedla**:

1. **Maksimum** (x_0, y_0) je taka točka, da so **vse** vrednosti funkcije v "bližini" x_0 **manjše** od vrednosti $f(x_0)$.

2. **Minimum** (x_0, y_0) je taka točka, da so vse vrednosti funkcije v "bližini" x_0 **večje** od vrednosti $f(x_0)$.

3. **Sedlo** (x_0, y_0) je taka točka, da zadosti "blizu" točke x_0 velja natanko ena od možnosti:

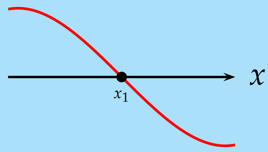
   - vrednosti funkcije so za $x < x_0$ manjše od vrednosti $f(x_0)$, za vrednost $x > x_0$ pa večje od $f(x_0)$,

- vrednosti funkcije so za $x < x_0$ večje od vrednosti $f(x_0)$, za vrednost $x > x_0$ pa manjše od $f(x_0)$.

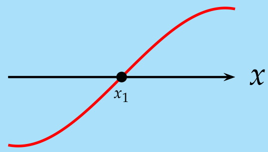
Tako kot smo to že storili, si graf funkcije predstavljajmo kot "hribovje", ki ga prehodimo od leve proti desni. Na tistih delih "hribovja", kjer se najprej vzpenjamo ($\nearrow$), potem hodimo po ravnem ($\rightarrow$) in se na koncu spustimo($\searrow$), ima funkcija maksimum.
Pred minimumom se najprej spuščamo ($\searrow$), nato hodimo po ravnem ($\rightarrow$), potem pa vzpenjamo ($\nearrow$). V primeru sedla pa se bodisi najprej vzpenjamo ($\nearrow$), zravnamo ($\rightarrow$) in spet vzpenjamo ($\nearrow$), bodisi najprej spuščamo ($\searrow$), zravnamo ($\rightarrow$) in nato spet spuščamo ($\searrow$).

razvrstitev stacionarn točk

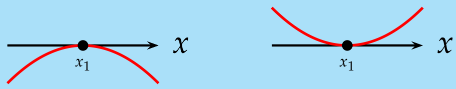
- Abscise stacionarnih točk funkcije $y = f(x)$ so rešitve enačbe $f'(x) = 0$; če je x_1 abscisa stacionarne točke, je ustrezna ordinata y_1 enaka $f(x_1)$.
- Stacionarne točke razvrstimo glede na obnašanje **prvega odvoda** $f'(x)$ funkcije $f(x)$:
  - Če je prvi odvod **padajoč** v neki bližnji okolici abscise stacionarne točke, je ta točka **maksimum** (največja vrednost):



  - Če je prvi odvod **naraščajoč** v neki bližnji okolici abscise stacionarne točke, je ta točka **minimum** (najmanjša vrednost):



  - Če se prvi odvod **dotakne** abscisne osi v abscisi stacionarne točke, je ta točka **sedlo**:



Zgled 37: Poišči in ugotovi vrsto stacionarne točke za polinom $p(x) = x^4 - 2x^3$.

Izračunamo prvi odvod $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, ga enačimo z 0 in rešimo nastalo enačbo:

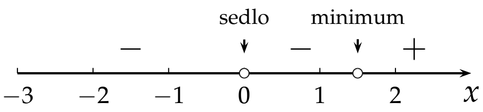
$$4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$$

Izračunamo ustrezne funkcijske vrednosti: $y_1 = f(0) = 0$ in $f(\frac{3}{2}) = 4 \cdot (\frac{3}{2})^4 - 2 \cdot (\frac{3}{2})^3 = \frac{81}{16} - \frac{54}{8} = -\frac{27}{16}$. Zato sta stacionarni točki $S_1(0,0)$ in $S_2(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$. Kaj predstavljata, ugotovimo z obnašanjem prvega odvoda:

- lahko si pomagamo z naslednjo tabelo:

interval \ točka	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
testna točka x	-1		1		2
predznak $f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
zaključek	$\searrow$	sedlo	$\searrow$	minimum	$\nearrow$

- ali pa si pomagamo z naslednjo sliko:



Na sliki so prikazani **predznaki** vrednosti (prvega) **odvoda** na intervalih na katere razpade številska premica z narisanimi stacionarnimi točkami. Predznaki nam pokažejo smer ustrezne tangente.

Tako smo ugotovili, da je v točki $S_1(0,0)$ sedlo, v točki $S_2(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$ pa minimum funkcije f.
■

Zgled 38: Poišči in ugotovi vrsto stacionarne točke polinoma

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^3(x+1)^4$$

Odvajamo z uporabo pravila produkta in verižnega pravila:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}\left(\left((x-1)^3\right)'(x+1)^4 + (x-1)^3\left((x+1)^4\right)'\right) = -\frac{1}{4}\left(3(x-1)^2(x+1)^4 + (x-1)^3 \cdot 4(x+1)^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}(x-1)^2(x+1)^3\,(3x+3+4x-4) = -\frac{1}{4}(x-1)^2(x+1)^3(7x-1)$$

Torej imajo stacionarne točke abscise $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ in $x_3 = \frac{1}{7}$. Ker sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$ tudi ničli polinoma, sta ustrezni ordinati $y_1 = y_2 = 0$, tretjo ordinato pa dobimo z malo truda: $y_3 = \frac{221184}{823543} \doteq 2.51$. Še tabela predznakov :

interval \ točka	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
testna točka x	-2		0		$\frac{1}{2}$		2
predznak $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
zaključek	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	maksimum	$\searrow$	sedlo	$\searrow$

V zadnjem zgledu opazimo, da so večkratne ničle polinomov tudi stacionarne točke. Utemeljitev ne potrebuje globokega razmisleka. Če je število x_1 večkratna ničla polinoma $p(x)$, recimo $k-$kratna ($k = 2, 3, \ldots$), lahko polinom $p(x)$ zapišemo v obliki $p(x) = (x - x_1)^k \cdot q(x)$, kjer je $q(x)$ polinom za k manjše stopnje kot polinom p. Potem je $p'(x) = k(x - x_1)^{k-1} \cdot q(x) + (x - x_1)^k \cdot q'(x)$ in tako $p'(x_1) = k \cdot 0 \cdot q(x_1) + 0 \cdot q'(x_1) = 0$. Torej je v x_1 res stacionarna točka.

Podoben sklep velja tudi za racionalno funkcijo. Tudi tam so večkratne ničle tudi stacionarne točke. Pri večkratnih polih racionalnih funkcij pa moramo biti previdni. Vzemimo racionalno funkcijo $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$. V $x = 2$ ima funkcija f dvojni pol. Izračunajmo njen odvod:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2)^2 - (x+1) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 2x + 4x + 4}{(x-2)^4} = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x-2)^4}$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe $f'(x) = 0$; v našem primeru $x_1 = -4$ in $x_2 = 2$. Toda v $x_2 = 2$ ima funkcija tudi pol, zato tam ni definirana in tako ne more imeti pri $x = 2$ stacionarno točko. Takšnim zapletom se izognemo, če odvod malo popravimo:

$$f'(x) = \frac{-(x+4)\ \cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}}} = \frac{-(x+4)}{(x-2)^3}$$

V zadnji obliki pa v $x = 2$ ni več stacionarne točke. ■

Zgled 39: Poišči in ugotovi vrsto stacionarne točke racionalne funkcije

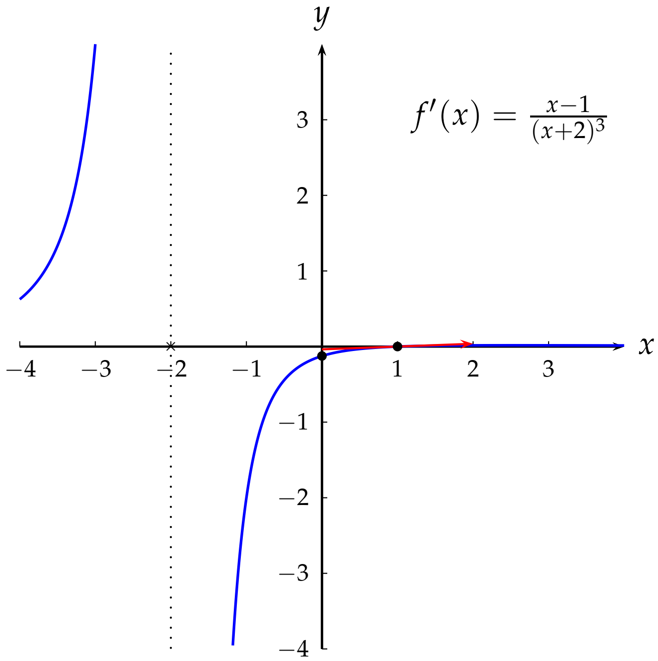
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

Odvod: $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x^2+4x+4) - (x^2-2x+1)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2} = \dfrac{6x^2+6x-12}{(x^2+4x+4)^2}$. Pri racionalnih funkcijah smo zgoraj opozorili, da moramo biti previdni v primeru večkratnih polov. V našem primeru je v $x = -2$ dvojni pol, zato odvod preuredimo v obliko:

$$f'(x) = \frac{6x^2+6x-12}{(x^2+4x+4)^2} = \frac{6(x^2+x-2)}{((x+2)^2)^2} = \frac{6\ \cancel{(x+2)}\ (x-1)}{(x+2)^{\cancel{4}}} = \frac{x-1}{(x+2)^3}$$

Rešimo enačbo $f'(x) = 0$ in tako ugotovimo, da je edina stacionarna točka pri $x = 1$, ustrezna ordinata pa $y = 0$.

Katere vrste je stacionarna točka $(1, 0)$ ugotovimo iz približnega grafa prvega odvoda $f'(x) = \frac{x-1}{(x+2)^3}$, ki ima ničlo 1, pol -2, asimptoto $y = 0$ in začetno vrednost $f'(0) = -\frac{1}{8}$.



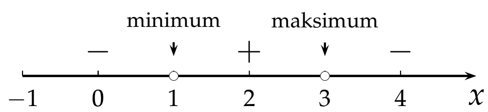
V stacionarni točki $(1, 0)$ je odvod pozitiven, zato ima funkcija f v točki $(1, 0)$ maksimum. ■

Zgled 40: Poišči in ugotovi vrsto stacionarnih točk funkcije $f(x) = 2\ln(x^2 + 3) - x$.

Uporabimo verižno pravilo in izračunamo odvod:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x - 1 = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 + 3} = \frac{-(x^2 - 4x + 3)}{x^2 + 3} = \frac{-(x-1)(x-3)}{x^2 + 3}$$

Upoštevamo pogoj za stacionarne točke $f'(x) = 0$ in dobimo $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Zato sta stacionarni točki $S_1(1, 2\ln 2 - 1)$ in $S_2(3, 2\ln 12 - 3)$. Vrsto stacionarnih točk ugotovimo iz naslednje slike predznakov prvega odvoda:

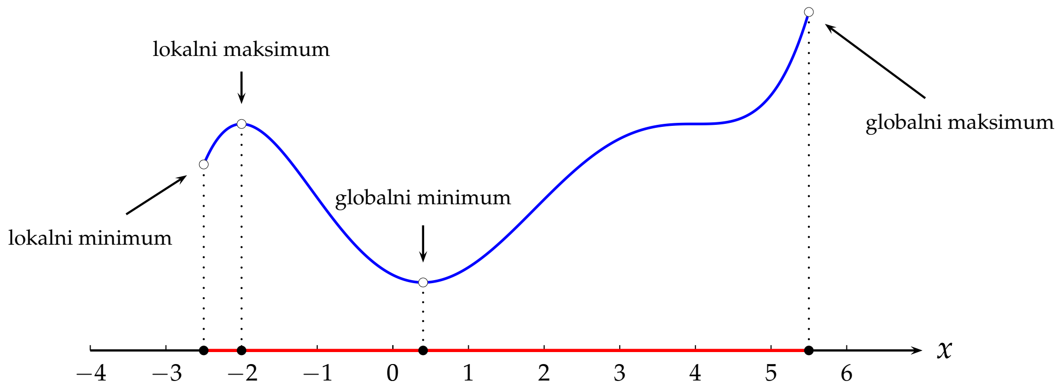


Tako smo ugotovili, da je točka S_1 minimum in točka S_2 maksimum funkcije f. ■

lokalni globalni ekstremi

Ekstremne vrednosti ne iščemo le pri funkcijah. Recimo, v neki šoli iščemo po velikosti najvišje dijake. Najprej napravimo izbor v vsakem razredu, med najvišjimi v posameznem razredu pa potem poiščemo najvišjega. Dijakom, ki so najvišji v posameznem razredu pravimo **lokalni maksimumi**, tistemu, ki je najvišji med vsemi najvišjimi, pa pravimo **globalni maksimum**.

Tudi pri funkcijah govorimo o lokalnih in globalnih ekstremih. Oglejmo si kako iščemo globalne in lokalne ekstreme pri gladkih funkcijah (tiste, ki so povsod odvedljive). Vzemimo za konkreten primer polinom $p(x) = (1/128)(x+2)^2(x-4)^3 + 3$. Njegov graf je prikazan na spodnji sliki. Zanimajo nas ekstremne vrednosti polinoma na intervalu $[-2.5, 5.5]$.



Slika 19: Lokalni in globalni ekstremi polinoma $p(x) = (1/128)(x+2)^2(x-4)^3 + 3$ na intervalu $[-2.5, 5.5]$.

Ekstreme gladkih funkcij poiščemo z enačbo $p'(x) = 0$. V našem primeru je $p'(x) = (1/128)(x-4)^2(x+2)(5x-2)$. Zato so abscise stacionarnih točk $-2, \frac{2}{5}$ in 4, ustrezne ordinate pa izračunamo. Tako dobimo stacionarne točke $(4,3)$, $(-2,3)$ in $(\frac{2}{5}, \frac{2814}{3125} \doteq 0.9)$.

Tabelo predznakov odvodov razširimo še na meji definicijskega območja -2.5 in 5.5:

interval \ točka	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
testna točka x	-2.5		0		3		5.5
predznak $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
zaključek	$\nearrow$	maksimum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$	sedlo	$\nearrow$

Ker je na levem koncu intervala $[-2.5, 5.5]$ odvod pozitiven, funkcija tam narašča. Zato so vse bližnje vrednosti v okolici $x = -2.5$ večje od vrednosti pri $x = -2.5$, ki je enaka $10091/4096 \doteq 2.46$. Torej je v $x = -2.5$ lokalni minimum. Podobno ugotavljamo v desnem krajišču $x = 5.5$. Tam je odvod pozitivena, zato funkcija narašča, za bližnje $x < 5.5$ je vrednost $f(5.5) = 18363/4096 \doteq 4.48$[6]. Največji lokalni maksimum na definicijskem območju postane globalni maksimum, ki je v našem primeru v točki $(5.5, 18363/4096)$. Globalni minimum postane lokalni minimum $(\frac{2}{5}, \frac{2814}{3125}$, saj vrednost na meji pri $x = -2.5$ večja od vrednosti pri $x = 2/5$. ■

[6] Vrednosti v -2.5 in 5.5 nam je prijazno izračunal `https://www.wolframalpha.com/index.html`