VEKTORJI

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.

2016

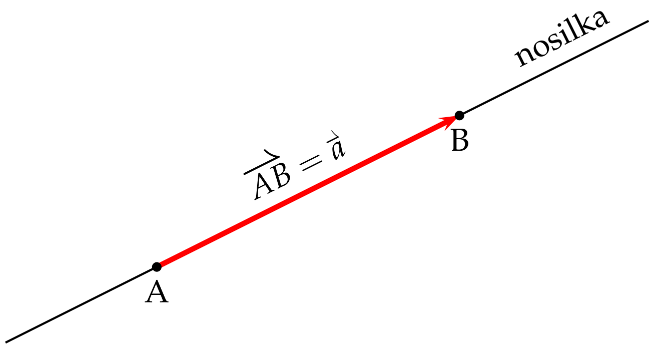
Kazalo

1 Osnovne definicije

Krajišči daljice, recimo AB, sta enakovredni. Tudi, če bi zapisali BA bi vedeli, da govorimo o isti daljici. Če pa krajiščema damo različni vlogi, recimo, da eno krajišče imenujemo **začetek**, drugo pa **konec**, dobimo nov geometrijski objekt, **vektor**. S temi objekti se bomo ukvarjali na naslednjih straneh. Začnimo z naslednjo definicijo:

definicija vektorja

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je usmerjena (orientirana) daljica AB. Točko A imenujemo **začetek**, točko B pa **konec** vektorja, ki ga označimo s puščico. V tiskanih knjigah vektor označujejo tudi z **odebeljenim** zapisom **AB**. Premico, ki vsebuje daljico AB, imenujemo **nosilka** vektorja $\overrightarrow{AB}$. Nosilko vektorja imenujemo tudi **smer** vektorja. Vektor lahko zapišemo tudi brez začetne in končne točke, recimo $\vec{a}$.



Slika 1: Vektor, nosilka

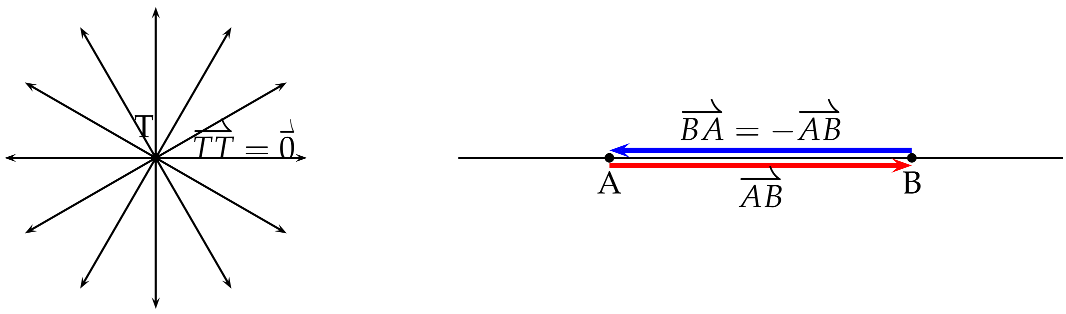
Med vektorji imata pomembno vlogo vektor ”nič” in nasprotni vektor.

vektor ”nič”

Vektor nič ($\vec{0}$) je vektor, ki ima začetek in konec v isti točki: $\vec{0} = \overrightarrow{TT}$. Nosilka vektorja $\vec{0}$ je poljubna premica.

nasprotni vektor

Nasprotni vektor vektorja $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ je vektor $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ (zamenjamo začetek in konec vektorja). Nasprotni vektor vektorja $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ bomo označili tako kot pri številih z znakom $-$ (minus), torej $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



Slika 2: Vektor nič in nasprotni vektor

dolžina vektorja

Dolžina (= velikost, = absolutna vrednost, = norma) vektorja je **dolžina** daljice, ki predstavlja vektor, torej: $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ (uporablja se tudi oznaka: $||\overrightarrow{AB}||$)

Izraz **kolinearne točke** smo uporabljali za točke, ki ležijo na isti premici. V naslednji definiciji ga uporabimo tudi pri vektorjih:

smer vektorja

Smer vektorja je njegova nosilna premica, torej nosilka. Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ležita na vzporednih nosilka, sta **kolinearna**.

smisel vektorja

Malo zahtevnejša je definicija **smisla** vektorja. Poenostavljeno smisel vektorja pomeni, na katero stran premice je vektor obrnjen. Bolj natančna je naslednja definicija:

Kolinearna vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ imata isti **smisel** ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$)natanko tedaj, ko obstaja ravnina Σ, da velja:

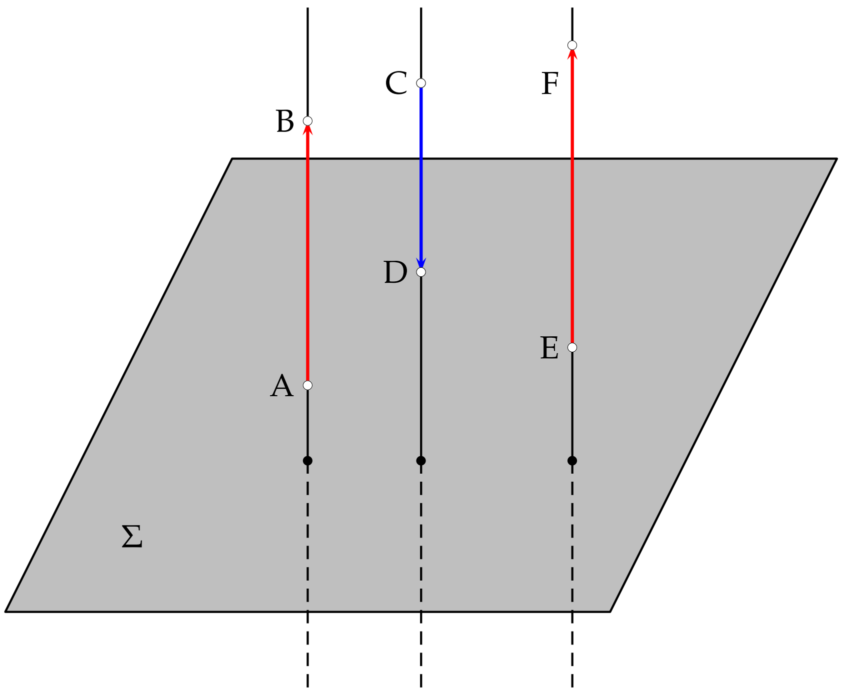
- Σ je pravokotna na nosilki vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$,
- poltraka (A;B) in (C;D) ležita na isti strani ravnine Σ.

Če taka ravnina Σ ne obstaja, sta kolinearna vektorja nasprotno smiselna ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Na sliki 3 sta $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ istosmiselna, $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{EF}$ pa nasprotno smiselna.

enakost vektorjev

Vektor je natanko določen s tremi objekti: z **dolžino**, s smerjo in s **smislom**. Zato je smiselno definirati enakost dveh vektorjev takole:

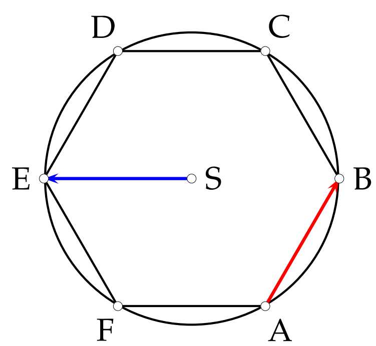


Slika 3: K razlagi smisla vektorja

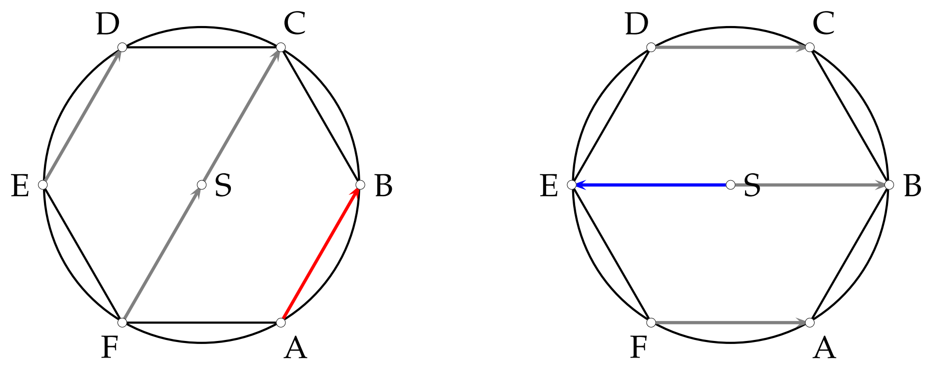
Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **enaka** natanko tedaj, ko:

1. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (vektorja sta enako **dolga**),
2. imata isto **smer** (njuni nosilki sta **vzporedni** premici),
3. imata isti **smisel** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$).

Zgled 1.1: Na sliki je pravilni šestkotnik ABCDEF z očrtano krožnico s središčem v točki S. Zapiši vse vektorje, ki imajo krajišča v ogliščih šestkotnika in središču krožnice in so enaki vektorju $\overrightarrow{AB}$, in vse vektorje, ki so nasprotni vektorju $\overrightarrow{SE}$.



Vektorju $\overrightarrow{AB}$ so enaki vektorji $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SC}$ in $\overrightarrow{ED}$. Vsi imajo enake dolžine, ležijo v isti smeri in imajo isti smisel kot vektor $\overrightarrow{AB}$.



Slika 4: Iskani vektorji

Nasprotni vektorji vektorja $\overrightarrow{SE}$ so vektorji $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{SB}$ in $\overrightarrow{DC}$. Vsi imajo enake dolžine, ležijo v isti smeri, imajo pa nasprotni smisel kot vektor $\overrightarrow{SE}$. ■

2 Računske operacije z vektorji

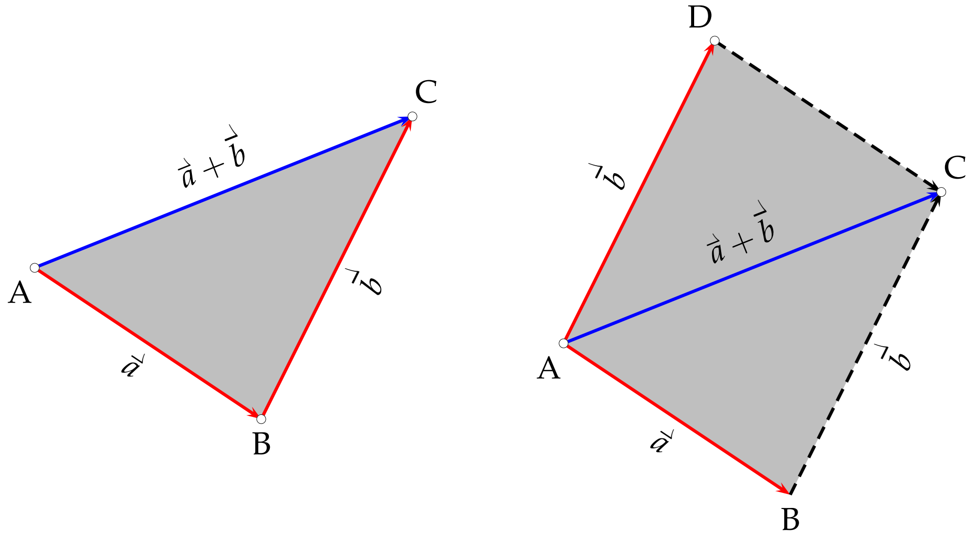
Označimo množico vseh vektorjev v prostoru z V, množico realnih števil $\mathbb{R}$ pa imenujmo množica **skalarjev**. Z elementi množice vektorjev in množice skalarjev definiramo naslednje računske operacije:

Seštevanje $\vec{a}+\vec{b}$

Rezultat seštevanja (vsota) je vektor. Če si vektor $\overrightarrow{AB}$ predstavljamo kot ravno pot, ki jo začnemo v A in končamo v B, $\overrightarrow{BC}$ kot ravno pot iz B v C, je seštevek (rezultat, rezultanta) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ obeh poti ravno pot iz A v C, torej vektor $\overrightarrow{AC}$.

Vsoto lahko pridelamo na dva načina:

1. (**Trikotniško pravilo**) V konec vektorja $\vec{a}$ postavimo začetek vektorja $\vec{b}$. Vsota je vektor, ki ima začetek v začetku vektorja $\vec{a}$, konec pa v koncu vektorja $\vec{b}$.
2. (**Paralelogramsko pravilo**) Začetka obeh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ postavimo v skupen začetek. Vsota je diagonala $\overrightarrow{AF}$ paralelograma, ki ga tvorita vektorja $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ in $\vec{b}=\overrightarrow{AE}$.



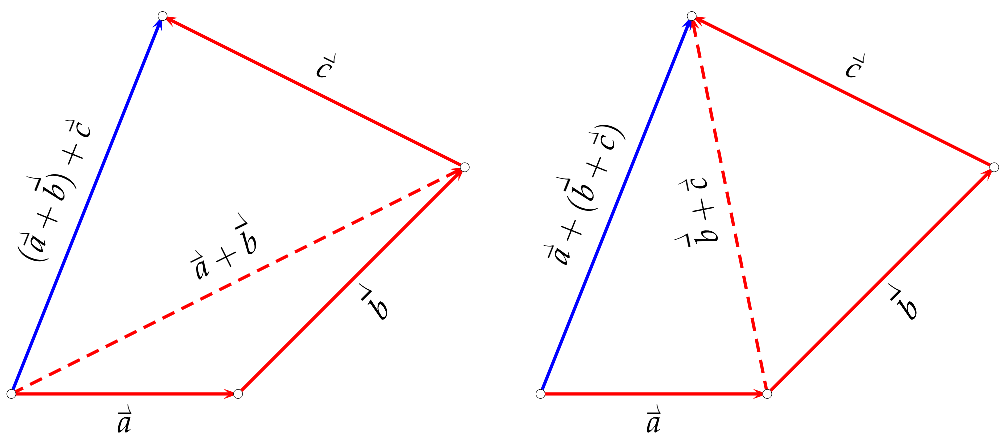
Slika 5: Trikotniško in paralelogramsko pravilo seštevanja

Ni se težko prepričati, da seštevanje na oba načina da isti rezultat, saj sta v paralelogramu nasprotni stranici vzporedni in enako dolgi.

Za seštevanje vektorjev veljajo enaki zakoni kot za seštevanje števil:

- **Komutativnost** vsote $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ preberemo iz paralelogramskega pravila na sliki 5; enkrat seštevamo v spodnjem trikotniku $\triangle$ ABC, drugič pa v zgornjem $\triangle$ ADC.

- **Asociativnost** vsote, t.j.: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ pokaže naslednja slika:



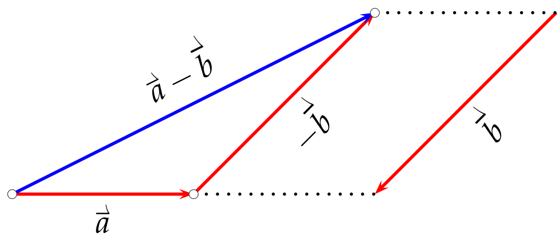
Slika 6: Utemeljitev asociativnosti

- Vektor $\vec{0}$ ima enako vlogo kot jo ima pri številih število 0, pravimo, da je **nevtralni** element za seštevanje: $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

- Vektor $-\vec{a}$ ima vlogo **nasprotnega** elementa za seštevanje: $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Odštevanje $\vec{a}-\vec{b}$

Odštevanje, tako kot pri številih, definiramo kot prištevanje nasprotnega elementa, torej: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



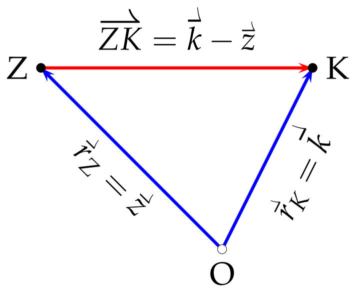
Slika 7: Odštevanje je prištevanje nasprotnega vektorja

Vektorju, ki ga odštevamo, recimo $\vec{b}$, napravimo nasprotni vektor (zamenjamo začetek in konec) in njegov začetek vzporedno premaknemo v konec vektorja od katerega odštevamo, recimo v konec vektorja $\vec{a}$.

prosti krajevni vektor

Vzemimo v prostoru točko O in jo imenujmo **izhodišče**. Vse vektorje prostora razdelimo v dve skupini:

- **krajevni** vektorji so tisti, ki se začnejo v izhodišču O, konec pa v neki točki, recimo A, prostora. Krajevni jih imenujemo zato, ker njihov konec kaže na položaj točke glede naizhodišče.
- **prosti** vektorji so vsi tisti, ki nimajo začetka v izhodišču.



Slika 8: Prosti vektor je razlika dveh krajevnih vektorjev

Seveda vsak prosti vektor z ustreznim vzporednim premikom napravimo krajevni in obratno, vsak krajevni lahko s poljubnim vzporednim premikom napravimo prostega.

Vsak prosti vektor lahko izrazimo kot razliko krajevnih vektorjev njegovega konca in začetka:

$$\boxed{\overrightarrow{ZK}=\vec{k}-\vec{z}=\vec{r}_K-\vec{r}_Z}$$

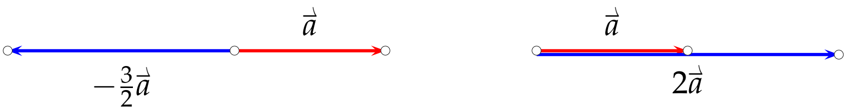
Ustrezno utemeljitev potrdi gornja slika. Na sliki je narisan prosti vektor $\overrightarrow{ZK}$ in ustrezna krajevna vektorja $\overrightarrow{OK}$ in $\overrightarrow{OZ}$. Krajevni vektor ustrezne točke označimo tudi z oznako $\vec{r}_T$, če pokaže točko T. Če želimo priti iz točke Z v točko K lahko to storimo neposredno, torej napravimo vektor $\overrightarrow{ZK}$, lahko pa iz Z pridemo v K naokoli preko izhodišča O tako, da najprej napravimo vektor $\overrightarrow{ZO} = -\vec{z}$ in nato vektor $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Zato je $\overrightarrow{ZK} = \overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OK} = -\vec{z} + \vec{k} = \vec{k} - \vec{z}$.

Pri seštevanju in odštevanju vektorjev dvema izbranima vektorjema priredimo tretji vektor, vsoto ali razliko. Pri naslednji operaciji pa izbranemu vektorju in izbranemu (realnemu) številu (pravimo mu tudi **skalar**) priredimo vektor.

Množenje vektorja s številom $m \cdot \vec{a}$

Naj $\vec{a}$ vektor in m realno število. Rezultat množenja vektorja $\vec{a}$ s številom m je **vektor** $m \cdot \vec{a}$, za katerega velja:

1. $|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$ (dolžina se poveča ali zmanjša za faktor $|m|$),
2. $m\vec{a} \parallel \vec{a}$ (vektor $m\vec{a}$ ima isto smer (je vzporeden) vektorju $\vec{a}$),
3. $m\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, če je $m > 0$ in $m\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, če je $m < 0$.



Slika 9: Primera množenja vektorja s številom

Brez dokaza, ki pa tudi ne zahteva veliko napora, zapišimo naslednje zakonitosti množenja vektorja s številom:

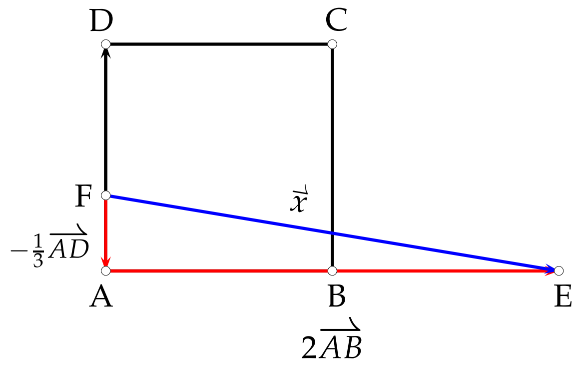
Lastnosti množenje vektorja s številom

Za množenja vektorja s številom veljajo naslednje zakonitosti:

- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ (distributivnost v seštevanju vektorjev),
- $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ (distributivnost v seštevanju skalarjev),
- $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ (homogenost),
- $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$,
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Zgled 2.1: Naj bo ABCD kvadrat s stranico dolžine 3 enote. Nariši vektor $\vec{x} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Razliko $2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ zapišimo z vsoto $2\overrightarrow{AB} + (-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})$. Vsoto vektorjev narišemo tako, da člena vsote postavimo enega za drugim. Začnemo z $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, ki ga postavimo tako, da se začne v točki F, ki leži na tretjini daljice AD, v A pa postavimo začetek vektorja $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$. Potem je iskani vektor $\vec{x} = \overrightarrow{FE}$. ■



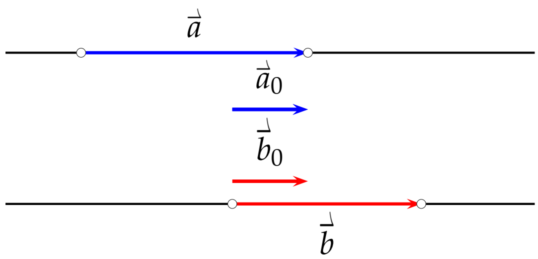
3 Linearna kombinacija vektorjev

enotski vektor

Vzemimo, da je $\vec{a}$ neničelen vektor in $|\vec{a}|$ njegova dolžina. Vektor, ki ima isto smer in smisel kot vektor $\vec{a}$, njegova dolžina pa meri eno enoto ($= 1$), imenujemo enotski vektor vektorja $\vec{a}$ in ga označimo $\vec{a}_0$. Ker je dolžina enotskega vektorja eno enoto, sta vektor in enotski vektor povezana z enačbama:

$$\boxed{\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0 \text{ ali } \vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}}$$

Vzemimo poljubna neničelna, kolinearna (vzporedna) vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Njuna enotska vektorja $\vec{a}_0$ in $\vec{b}_0$ se razlikujeta kvečjemu v smislu. Zato je bodisi $\vec{a}_0 = \vec{b}_0$, bodisi $\vec{a}_0 = -\vec{b}_0$. Vzemimo prvo možnost. Tedaj

$$\vec{a}_0 = \vec{b}_0 \Rightarrow \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Izpeljali smo pomembno lastnost kolinearnih (vzporednih) vektorjev:

kolinearni vektorji

Če sta neničelna vektorja kolinearna (vzporedna), lahko enega izrazimo z drugim, torej obstaja tako število m:

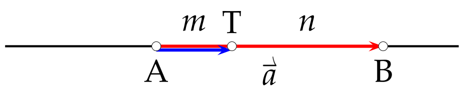
$$\boxed{\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = m \cdot \vec{a}}$$

Pravimo tudi, da je $\vec{b}$ večkratnik vektorja $\vec{a}$.

Število m je enolično (natanko) določeno, saj, če bi obstajalo še eno tako število, recimo m', da je $\vec{b} = m' \cdot \vec{a}$, bi veljalo $m \cdot \vec{a} = m' \cdot \vec{a}$ in zato (distributivnost množenja vektorja s številom omogoča izpostavljanje števila, pa tudi vektorja) $(m - m')\vec{a} = \vec{0}$, kar pa pri neničelnem vektorju $\vec{a}$ gre le, če je $m - m' = 0$. Zato je $m = m'$, kar smo želeli pokazati.

Zgled 3.1: Na nosilki vektorja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ leži taka točka T, da je: $|AT| : |TB| = m : n$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AT}$ z vektorjem $\vec{a}$.

Ker je $\overrightarrow{AT}$ kolinearen z $\vec{a}$, obstaja realno število λ (lambda), da je $\overrightarrow{AT} = \lambda\vec{a}$. Število λ je razmerje dolžin vektorjev $\overrightarrow{AT}$ in $\vec{a}$, kar utemeljimo takole: $|\overrightarrow{AT}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| \Rightarrow \lambda = \frac{|\overrightarrow{AT}|}{|\vec{a}|}$

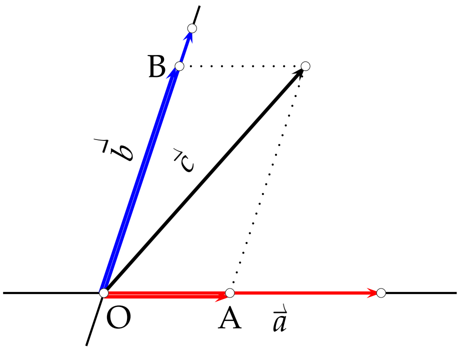


Celotena dolžina vektorja $|\vec{a}|$ je sestavljena iz $m + n$ delov, zato je dolžina enega dela $\dfrac{|\vec{a}|}{m+n}$. Dolžina $|\overrightarrow{AT}|$ vektorja meri m delov, zato je $\lambda = \dfrac{|\overrightarrow{AT}|}{|\vec{a}|} = m\dfrac{|\vec{a}|}{m+n} \cdot \dfrac{1}{|\vec{a}|} = \dfrac{m}{m+n}$ in tako $\overrightarrow{AT} = \dfrac{m}{m+n} \cdot \vec{a}$. ■

Zgled 3.2: Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna. Izračunaj število m tako, da bosta vektorja $2\vec{a} + m\vec{b}$ in $(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b}$ vzporedna.

Če naj bosta vektorja $2\vec{a} + m\vec{b}$ in $(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b}$ vzporedna, mora biti eden večkratnik drugega. Torej velja: $2\vec{a} + m\vec{b} = x \cdot \left((\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$. V zadnji enačbi odpravimo oklepaja in prenesi člene z vektorjem $\vec{a}$ na eno stran enačbe, člene z vektorjem $\vec{b}$ na drugo stran. Dobimo: $(2 - x)\vec{a} = (-\frac{3x}{2} - m)\vec{b}$. Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna (nimata enake smeri), je zadnja enačba mogoča le, če sta koeficienta $2 - x$ in $-\frac{3x}{2} - m$ oba enaka 0. Zato je $x = 2$ in $m = -3$. ■

Preselimo se k vektorjem v ravnini. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ **nekolinearna** vektorja v ravnini. Vzemimo še tretji vektor $\vec{c}$, ki leži v isti ravnini. Vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ postavimo v skupno začetno točko O. V koncu vektorja $\vec{c}$ postavimo dve vzporednici, eno vzporedno vektorju $\vec{a}$ in drugo vzporedno vektorju $\vec{b}$. Vzporednici sekata nosilki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v točkah A in B.



Vektor $\vec{c}$ je potem enak vsoti vektorjev $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$. Ker sta vektorja $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ kolinearna z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, obstajata taki števili m in n, da je $\overrightarrow{OA} = m\vec{a}$ in $\overrightarrow{OB} = n\vec{b}$.

Števili m in n sta natanko določeni, kar pokažemo takole: Naj bo $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ in $\vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$. Potem je $m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b} \Rightarrow (m - m')\vec{a} = (n' - n)\vec{b}$. Ker sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna, zadnja enačba velja le, če sta števili (koeficienta) pri $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oba enaka 0, to pa je tedaj, ko je $m = m'$ in $n = n'$.

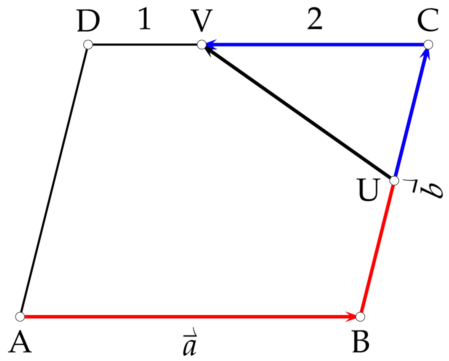
ko(m)planarni vektorji

Če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni in sta $\vec{a}$, $\vec{b}$ nekolinearna, obstajata natanko določeni realni števili m in n, da velja:

$$\boxed{\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}}$$

Zgled 3.3: Naj bo ABCD paralelogram in $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{UV}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je $|BU| : |BC| = 1 : 2$ in $|CV| : |VD| = 2 : 1$.

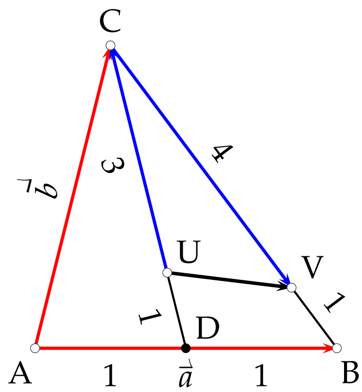
Razmerje $|BU| : |BC| = 1 : 2$ pove, da cela daljica BC meri dva dela, daljica BU pa enm del, zato je U ravno sredina stranice BC. Podobno sklepamo pri točki V: daljici CV in VD skupaj merita tri dele in skupaj sestavljata stranico CD; zato je V na tretjini daljice CD, gledano od D. Vektor $\overrightarrow{UV}$ si lahko zamislimo kot potovanje iz točke U do točke V po daljici UV.



Rezultat potovanja bo isti tudi, če potujemo iz U v V naokoli, recimo preko točke C, lahko pa tudi preko točk B, A in D. Zato je $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UC} + \overrightarrow{CV}$. Ker je $\overrightarrow{UC} = \frac{1}{2}\vec{b}$ in $\overrightarrow{CV} = -\frac{2}{3}\vec{a}$, je $\overrightarrow{UV} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Preveri, da dá potovanje $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DV}$ isti izraz. ■

Zgled 3.4: Naj bo ABC trikotnik. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, s CD pa težiščnico na ustrezno stranico. Naj bo $|CU| : |UD| = 1 : 3$ in $|BV| : |VC| = 1 : 4$. Izrazi vektor $\overrightarrow{UV}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Ker je CD težiščnica, je D sredina daljice AB. Od U se sprehodimo do V po poti U-C-V, zato je $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UC} + \overrightarrow{CV}$ (desna slika). Ker je CD težiščnica, ki jo U deli v razmerju 1 : 4, je $\overrightarrow{UC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$. Vektor $\overrightarrow{CV}$ leži na vektorju $\overrightarrow{CB} = -\vec{b} + \vec{a}$, zato je $\overrightarrow{CV} = \frac{4}{5}(-\vec{b} + \vec{a}) = -\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{a}$. Dobljeno uvrstimo v izraz $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UC} + \overrightarrow{CV}$ in dobimo:

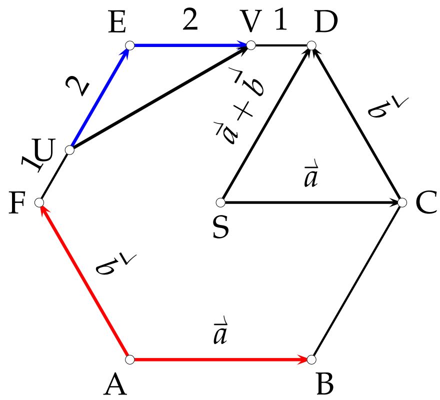


$$\overrightarrow{UV} = (-\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}) + (-\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{a}) = \frac{17}{40}\vec{a} - \frac{1}{20}\vec{b} \qquad ■$$

Zgled 3.5: Naj bo ABCDEF pravilni šestkotnik. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$. Naj bo $|EU| : |UF| = 2 : 1$ in $|EV| : |VD| = 2 : 1$. Izrazi vektor $\overrightarrow{UV}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

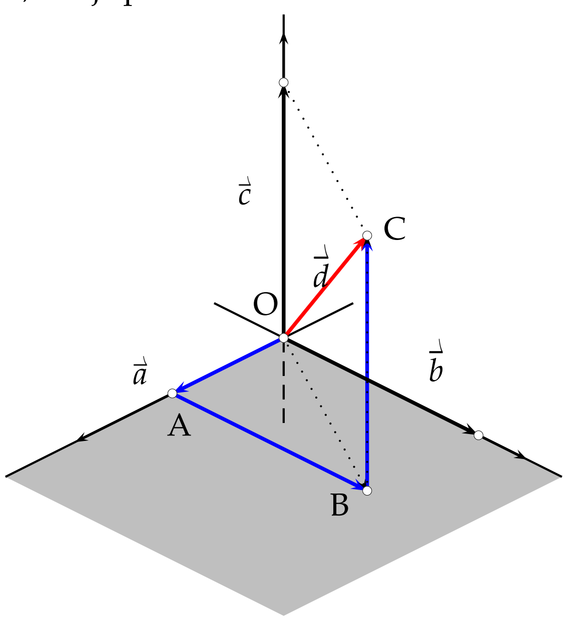
V pravilnem šestkotniku označimo s S središče šestkotniku očrtanega kroga. Ni se težko prepričati, da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$. Zato je $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{FE} = \vec{a} + \vec{b}$. Potem je $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{EV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Torej je $\overrightarrow{UV} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. ■



Nadaljujmo z vektorji v prostoru. Vzemimo v prostoru tri **nekoplanarne** vektorje, recimo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. Naj bo $\vec{d}$ poljuben vektor prostora. Vse štiri vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ postavimo v skupen začetek O tako, kot je prikazano na sliki:

neko(m)planarni vektorji



V koncu T vektorja $\vec{d}$ postavimo vzporednico k nosilki vektorja $\vec{c}$. Ta naj prebode ravnino vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v točki B. V točki B postavimo vzporednico, ki naj bo tokrat vzporedna vektorju $\vec{b}$ in seka nosilko vektorja $\vec{a}$ v točki A. Potem je: $\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ je vzporeden vektorju $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ je vzporeden vektorju $\vec{b}$, vektor $\overrightarrow{BT}$ pa je vzporeden vektorju $\vec{c}$. Zato obstajajo natanko določena števila m, n in p, da velja: $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

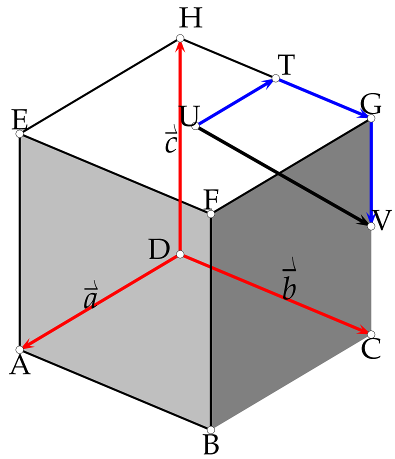
Če so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ trije nekoplanarni vektorji in $\vec{d}$ poljuben vektor v prostoru, obstajajo natanko določena realna števila m, n in p, da velja:

$$\boxed{\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}}$$

Zgled 3.6: **Naj bo $ABCDEFGH$ kocka (E je nad A) in $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{UV}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, če je U sredina ploskve $EFGH$, V pa sredina roba CG.**

Od točke U do točke V potujemo lahko tudi po poti $U - T - G - V$, kjer je točka T sredina roba GH. Zato je:

$$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TG} + \overrightarrow{GV} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$



Poglejmo ugotovitve o kolinearnih, koplanarnih in nekoplanarnih vektorjih še algebrsko. Začnimo z naslednjim opisom (definicijo):

linearna kombinacija vektorjev

Naj bodo $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ vektorji prostora, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pa realna števila. Vektor:

$$\boxed{a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n}$$

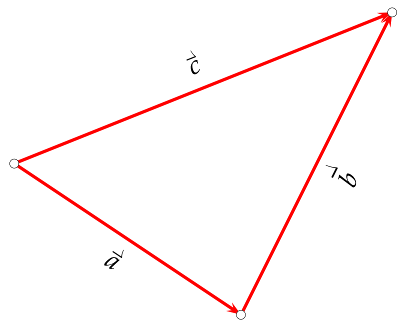
imenujemo **linearna kombinacija** vektorjev $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ s **koeficienti** $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vektor $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ s koeficienti $\frac{1}{3}$, -1, 3, vektor $2\vec{a} - \vec{c}$ pa je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ s koeficienti 2, 0, -1.

ničelna kombinacija

Če je $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$, imenujemo linearno kombinacijo $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n$ **ničelna** linearna kombinacija.

Če izberemo v linearni kombinaciji vse koeficiente enake 0, postane kombinacija ničelna. Obstajajo pa ničelne linearne kombinacije, ki nimajo vseh koeficientov enakih 0. Na desni sliki je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, zato je $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ ničelna kombinacija, ki nima vseh koeficientov enakih 0.



Ničelno linearno kombinacijo, katere vsi koeficienti so enaki 0, imenujemo **trivialna** ničelna kombinacija.

trivialna kombinacija

Vektorji $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ so **linearno neodvisni** natanko takrat, ko je le njihova trivialna kombinacija ničelna, tj.:

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$$

Če vektorji $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ niso linearno neodvisni, so **linearno odvisni**

Oglejmo si, kako je z odvisnostjo in neodvisnostjo neničelnih vektorjev v primeru različnih vrednosti za n.

- V primeru $n = 1$ imamo opraviti z enim samim vektorjem $\vec{x}_1$. Ta je očitno neodvisen, saj ima enačba $m \cdot \vec{x}_1 = \vec{0}$ pri neničelnem vektorju $\vec{x}_1$ le rešitev $m = 0$.
- Če je $n = 2$, sta vektorja $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko nista kolinearna.

  [Utemeljitev:($\Rightarrow$) Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna. Potem obstaja število λ, da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Tedaj: $\vec{b} = \lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{b} - \lambda\vec{a} = \vec{0}$. Zadnja kombinacija je ničelna, njena koeficienta pa ne oba enaka 0. Zato sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ odvisna
  ($\Leftarrow$) Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna. Potem obstaja njuna netrivialna ničelna kombinacija, npr. $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$. Vzemimo $\lambda \neq 0$. Tedaj: $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$, zato je $\vec{a}$ vzporeden (kolinearen) vektorju $\vec{b}$]
- če je $n = 3$, so vektorji $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko niso koplanarni. Utemeljitev je podobna kot v primeru dveh vektorjev.
- če je $n \geq 4$, so vektorji $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ linearno odvisni (zapisano velja za vektorje našega, trirazsežnega prostora).

Končajmo poglavje z opisom pojma **baze**:

Množica vektorjev $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ je baza, če:

- so vektorji $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ linearno neodvisni in

- poljuben vektor $\vec{x}$ lahko zapišemo z linearno kombinacijo vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$.

Primeri baz:

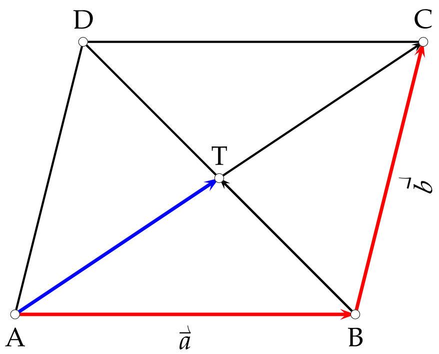
- Naj bo $\mathcal{P}$ množica vseh vektorjev, ki so vzporedni dani premici p. Potem je baza množice $\mathcal{P}$ neničelen vektor iz te množice.
- Če je $\mathcal{R}$ množica vseh vektorjev v dani ravnini Π, bazo te množice sestavljata dva nekolinearna vektorja ravnine Π. Običajno za bazna vektorja izberemo ortonormirana vektorja, to sta tak vektorja, ki sta medseboj pravokotna in imata dolžino eno enoto (enotska vektorja). V tem primeru ju običajno označimo z $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$.
- Še prostor si oglejmo. Naučili smo se, da v prostoru vsak vektor lahko izrazimo s tremi izbranimi nekoplanarnimi vektorji. Trije nekoplanarni vektorji so linearno neodvisni, zato z njimi lahko sestavimo bazo prostora. Običajno izberemo tri, medseboj pravokotne, enotske vektorje $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ in $\vec{k}$.

S pojmom baze je povezana tudi razsežnost ali dimenzija prostora. Naš običajni prostor imenujemo tridemzionalen, ker ga ureja baza iz treh vektorjev, običajna ravnina je dvodimenzionalen prostor, ki ga ustvarjata dva bazna vektorja, na premici pa vlada baza iz enega vektorja, zato jo imenujemo enodimenzionalni prostor. Pojem dimenzije lahko posplošimo tudi na več kot tridimenzionalne prostore. V takem prostoru bazo sestavlja več kot trije vektorji. Seveda, si take vektorje težko predstavljamo geometrijsko, analitično pa bomo njih spregovorili, ko bomo vektorje zapisovali v komponentah.

Še nekaj zahtevnejših zgledov:

Zgled 3.7: Pokaži, da se diagonali paralelograma razpolavljata.

Pri dokazu bomo uporabili resnico o koplanarnih vektorjih, da lahko vsak vektor ravnine na **en sam način** izrazimo z dvema "danima" **nekolinearnima** vektorjema v tej ravnini (drugače povedano: bazo ravnine sestavljata dva nevzporedna vektorja). Vzemimo paralelogram ABCD in označimo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Na dva načina izrazimo vektor $\overrightarrow{AT}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$: $\overrightarrow{AT} = x\overrightarrow{AC} = x\vec{a} + x\vec{b}$, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BD} = \vec{a} + y(\vec{b} - \vec{a}) = (1-y)\vec{a} + y\vec{b}$.

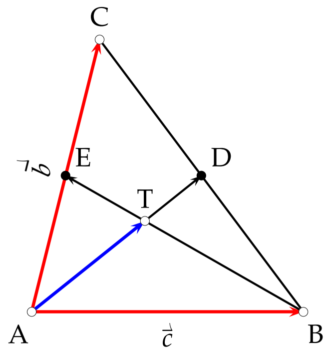


Ker je vektor $\overrightarrow{AT}$ enolično določen z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je $x = 1 - y$ in $x = y$. Nastali sistem ima rešitev $x = y = \frac{1}{2}$, torej je $\overrightarrow{AT} = x\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BT} = y\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ravno to pa smo trdili. ■

Zgled 3.8: Pokaži, da se težiščnice trikotnika:

1. **sekajo v skupni točki (težišču) , npr. T, in da**
2. **točka T razdeli poljubno težiščnico v razmerju $2:1$ za del od oglišča do težišča.**

Pokažimo najprej drugi del. Uporabili bomo dejstvo, da lahko vsak vektor ravnine na en sam način zapišemo z dvema nekolinearnima vektorjema te ravnine. Za nekolinearna vektorja bomo izbrali vektorja $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Najprej izrazimo vektorja (težiščnici) $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{BE}$ z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$:



$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BE} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

Vektor $\overrightarrow{AT}$ na dva načina izrazimo z vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{b}$:

$\overrightarrow{AT} = m\overrightarrow{AD} = m(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \underline{\frac{m}{2}\vec{c} + \frac{m}{2}\vec{b}}$ in še na drugi način $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \vec{c} + n\overrightarrow{BE} = \vec{c} + n(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}) = \underline{(1-n)\vec{c} + \frac{n}{2}\vec{b}}$.

Ustrezni števili pri $\vec{c}$ in $\vec{b}$ morata biti enaki, zato: $\frac{m}{2} = 1 - n$ in $\frac{m}{2} = \frac{n}{2}$ in $m = n = \frac{2}{3}$. Odtod:

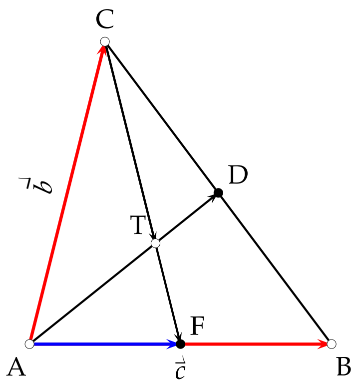
$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AT}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}| \Rightarrow |\mathrm{AT}| : |\mathrm{TD}| = 2 : 1$$

in

$$\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} \Rightarrow |\overrightarrow{BT}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{BE}| \Rightarrow |\mathrm{BT}| : |\mathrm{TE}| = 2 : 1$$

Pokažimo še prvi del. Naj premica (C,T) seka stranico AB v točki F. Pokazati moramo, da je CF težiščnica, torej, da točka F razpolavlja daljico AB. Izrazimo $\overrightarrow{AF}$ na dva načina s $\vec{c}$ in $\vec{b}$:

Najprej na prvi način: $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} = \underline{x\vec{c} + 0\vec{b}}$. Še drugi način: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}) + y\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} + y(x\vec{c} - \vec{b}) = \underline{(\frac{1}{3} + xy)\vec{c} + (\frac{1}{3} - y)\vec{b}}$.

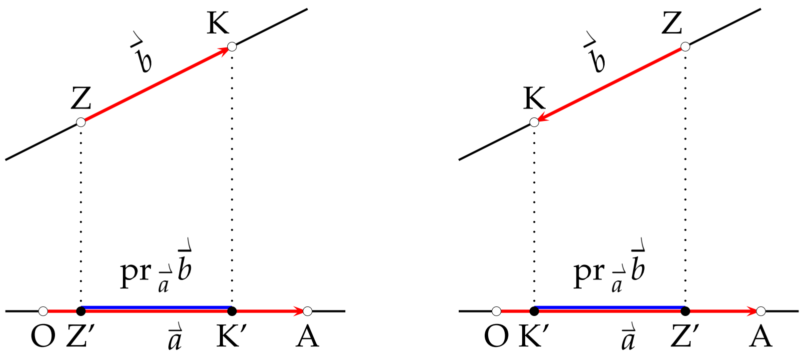


Zapišemo ustrezni sistem enačb: $x = \frac{1}{3} + xy$, $0 = \frac{1}{3} - y$, ki ima rešitev $x = \frac{1}{2}$ in $y = \frac{1}{3}$. Zato je: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{TF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$. Torej je F res sredina stranice AB in tako CF težiščnica. ■

4 Skalarni produkt vektorjev

4.1 Pravokotna projekcija vektorja

Vzemimo poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in ju premaknimo v skupno ravnino tako, da je $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{ZK}}$.



Slika 10: Pravokotna projekcija vektorjev je pozitivna ali negativna vrednost dolžine projekcije

pravokotna projekcija

Naj bo točka Z′ pravokotna projekcija začetka vektorja $\overrightarrow{\mathrm{ZK}}$ na **nosilko** vektorja $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, točka K′ pa projekcija konca. Tako, kot smo navajeni, z $|XY|$ označimo dolžino daljice s krajiščema v X in Y. Definirajmo:

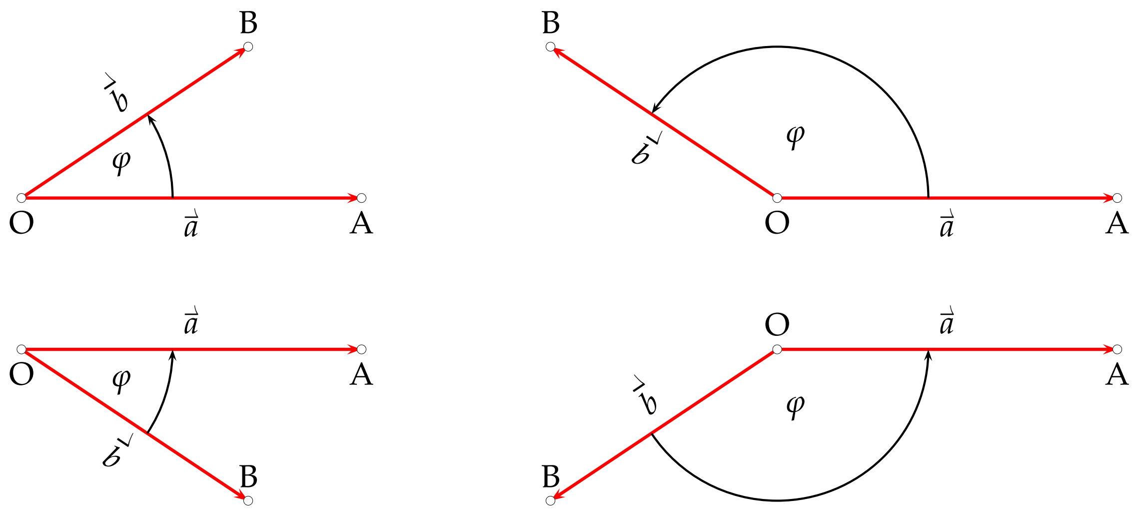
$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{cases} |\mathrm{Z'K'}| & ; \quad \overrightarrow{\mathrm{Z'K'}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ -|\mathrm{Z'K'}| & ; \quad \overrightarrow{\mathrm{Z'K'}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}. \end{cases}$$

Število $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$ imenujemo pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Pravokotna projekcija dveh vektorjev je pozitivna, če imata vektorja enak smisel, drugače je negativna.

S primernim razmislekom uženemo, da je $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$ neodvisna od položaja vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v dani ravnini. Najbolje je, če ju postavimo v skupno izhodišče. Vzemimo, da je skupno izhodišče O in $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$.

Kot med vektorjema $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, recimo φ, je:

$$\varphi = \begin{cases} \sphericalangle \mathrm{AOB} & \text{, če je } \quad 0 \le \sphericalangle \mathrm{AOB} < 180^\circ \\ \sphericalangle \mathrm{BOA} & \text{, če je } \quad 180^\circ \le \sphericalangle \mathrm{AOB} < 360^\circ \end{cases}$$



Slika 11: Kot med vektorjema

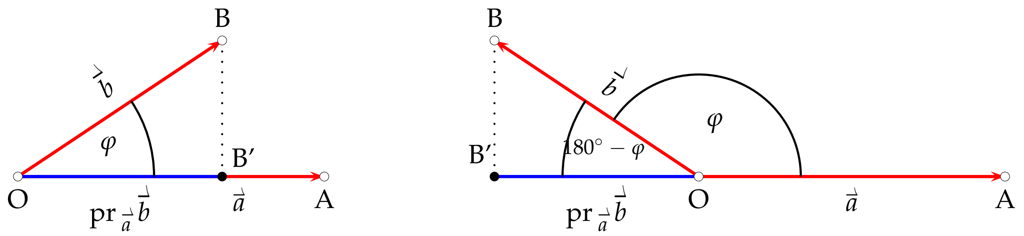
Zapišimo in utemeljimo glavne lastnosti pravokotne projekcije. **lastnosti projekcije**

Za pravokotno projekcijo veljajo naslednje lastnosti:

1. $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$
2. **aditivnost**: $\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b} + \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{c}$,
3. **homogenost**: $\mathrm{pr}_{\vec{a}}(m\vec{b}) = m \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$.

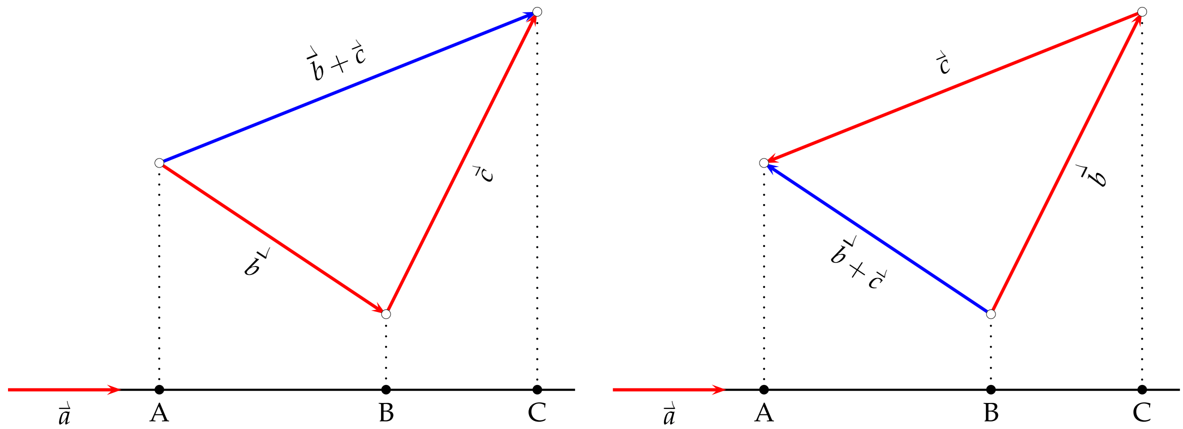
Utemeljitve

1. V pravokotnih trikotnikih OB′B na sliki je $|\mathrm{OB}| = |\vec{b}|$ hipotenuza, projekcija $|\mathrm{OB}'|$ pa priležna kateta.



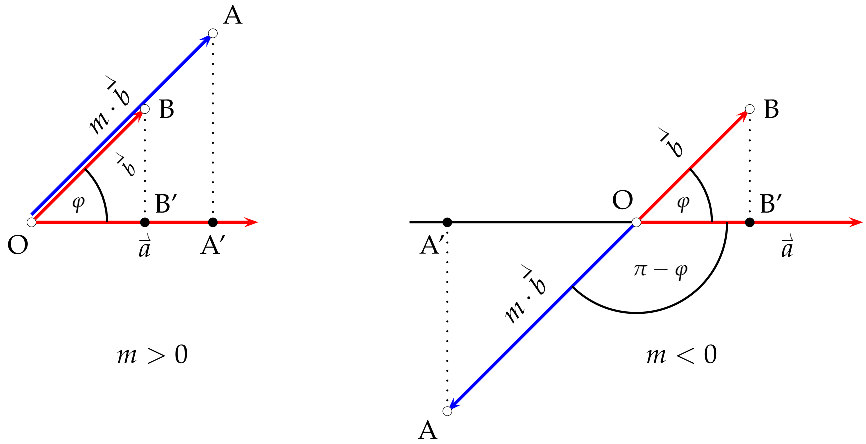
V primeru topega kota φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je v pravokotnem trikotniku OB′B ustrezni kot $180° - \varphi$, zato je $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ ter tako $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = -|OB'| = -|\vec{b}| \cdot \cos(180° - \varphi) = |\vec{b}|\cos\varphi$. Torej tudi v primeru topega kota velja enaka formula.

2. Ločimo dva primera. Prvi je prikazan na levi sliki. $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = |\text{AB}|$, $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{c} = |\text{BC}|$ in $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\text{AC}|$. Toda: $|\text{AB}| + |\text{BC}| = |\text{AC}|$, zato druga lastnost v tem primeru velja.



Pri drugem primeru (desna slika) je $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b} = |\text{BC}|$, $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{c} = -|\text{AC}|$ in $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = -|\text{AB}|$. Toda: $|\text{AB}| + |\text{BC}| = |\text{AC}|$ zato je:$-(-|\text{AB}|) + |\text{BC}| = -(-|\text{AC}|) \Rightarrow -|\text{AB}| = -|\text{AC}| + |\text{BC}|$ in tako lastnost 2 tudi v tem primeru velja.

3. Zaradi prve lastnosti projekcije je $|\text{OA}'| = \text{pr}_{\vec{a}}(m \cdot \vec{b}) = |m \cdot \vec{b}| \cdot \cos\varphi = |m||\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Če je $m > 0$, je kot med $m \cdot \vec{b}$ in $\vec{a}$ enak kotu med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (=φ), zato lastnost velja.



Če je $m < 0$, je kot med vektorjema $m \cdot \vec{b}$ in $\vec{a}$ enak $\pi - \varphi$, zato lastnost spet drži, saj: $|OA'| = \mathrm{pr}_{\vec{a}}(m \cdot \vec{b}) = |m \cdot \vec{b}| \cdot \cos\varphi = |m||\vec{b}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -m|\vec{b}| \cdot (-\cos\varphi) = m|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = m \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$.

4.2 Definicija skalarnega produkta, lastnosti in uporaba

Dosedanje računske operacije z vektorji (seštevanje, odštevanje, množenje vektorja s številom) so imele za rezultat vektor. Nova računska operacija med vektorji, ki jo bomo opisali v naslednjih vrsticah, pa bo imela za rezultat **število (skalar)**.

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki oklepata kot φ, je število :

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi}$$

Če uporabimo prvo lastnost pravokotne projekcije, dobimo še drugo definicijo skalarnega produkta, ki ni vezana kotne funkcije:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}}$$

Zapišimo in pokažimo glavne lastnosti skalarnega produkta. **lastnosti**

Za skalarni produkt veljajo naslednji zakoni:

1. **komutativnost**: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$.
2. **distributivnost**: $\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$.
3. **homogenost**: $\boxed{(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})}$.

Trditve se spodobi utemeljiti:

1. Ker je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak kotu med $\vec{b}$ in $\vec{a}$, je: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. Uporabimo drugo definicijo skalarnega produkta: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$. Tedaj:
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}+\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{c})=|\vec{a}|\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$
Pri dokazovanju smo uporabili aditivnost projekcije.
3. Uporabimo homogenost projekcije in komutativnost skalarnega produkta:
$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(m\vec{a})=|\vec{b}|\mathrm{pr}_{\vec{b}}(m\vec{a})=|\vec{b}|(m\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a})=m(|\vec{b}|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a})=m(\vec{b}\cdot\vec{a})=m(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Preprosta posledica homogenosti skalarnega produkta je naslednja uporabna enačba:

$$\boxed{(m\vec{a})\cdot(n\vec{b})=(mn)(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

Pri lastnostih nismo omenili **asociativnosti** produkta, ker $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ ni pri poljubnih vektorjih enako $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$, saj je prvi produkt vektor, ki ima smer $\vec{c}$, drugi produkt pa je vektor s smerjo vektorja $\vec{a}$. Smeri vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{c}$ pa nista nujno enaki. Zato: **Skalarni produkt ni asociativen**.

4.3 Uporaba skalarnega produkta

Skalarni produkt lahko uporabimo za:

- **Računanje kotov med vektorji**.

  Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo iz enačbe:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

- **Računanje dolžine vektorja**.

  Dolžino $|\vec{a}|$ izračunamo iz enačbe:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \;\text{ ali }\; |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}}$$

- **Ugotavljanje pravokotnosti vektorjev**.

  Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak 0:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$

- **Vzporednost vektorjev**.

  Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta vzporedna natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak produktu njunih dolžin:

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Pojasnila so enostavna. V prvem primeru samo preoblikujemo enačbo v definiciji skalarnega produkta, v drugem primeru uporabimo, da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, v tretjem primeru je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, v zadnjem primeru pa je $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Zgled 4.1: Naj bo $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunaj točno vrednost projekcije vektorja $3\vec{a} - 2\vec{b}$ na vektor $\vec{a} - \vec{b}$, torej $\mathrm{pr}_{\vec{a}-\vec{b}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

Najprej izračunajmo skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$. Upoštevajmo drugo definicijo skalarnega produkta: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\mathrm{pr}_{\vec{x}}\vec{y}$. Od tod je $\mathrm{pr}_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|}$. V naši nalogi je $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. Zato je iskana projekcija:

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}-\vec{b}}(3\vec{a} - 2\vec{b}) = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{3\vec{a}\vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\vec{a} - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{b}}} = \frac{48 - 30 + 9}{16 - 12 + 9} = \frac{27}{\sqrt{13}} = \frac{27\sqrt{13}}{13} \qquad \blacksquare$$

Zgled 4.2: Naj bo dolžina vektorja $\vec{a}$ enaka 2 ($|\vec{a}| = 2$), vektorja $\vec{b}$ enaka $\sqrt{3}$ ($|\vec{b}| = \sqrt{3}$), kot med njima pa naj bo enak 30° ($\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$). Označimo $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ in $\vec{v} = 2\vec{a} + x\vec{b}$. Izračunaj:

1. **$\vec{a} \cdot \vec{b}$ in $\vec{a} \cdot \vec{u}$.**
2. **$|\vec{u}|$.**
3. **$\omega = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{u})$.**
4. **x v vektorju $\vec{v}$ tako, da bo vektor $\vec{u}$ pravokoten na vektor $\vec{v}$.**

Rezultati naj bodo točni, le kot, če je potrebno, zaokroži na minuto natančno.

Izračunajmo najprej skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Za izračun $\vec{a} \cdot \vec{u}$ uporabimo lastnost distributivnosti skalarnega produkta in pravkar izračunani rezultat:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a}\vec{a} - 3\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$$

Dolžino vektorja izračunamo tako, da najprej izračunamo skalarni produkt vektorja s samim seboj (=skalarni kvadrat)

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 4\vec{a}\vec{a} - 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}\vec{b} = 16 - 36 + 27 = 7$$

dobljeni rezultat pa korenimo. Zato je $|\vec{u}| = \sqrt{7}$.

Kot izračunamo iz enačbe za kot, torej:

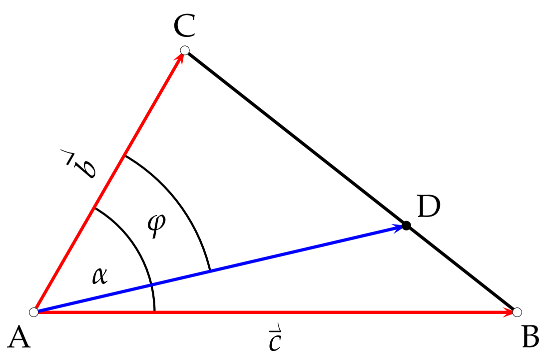
$$\cos\omega = \frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{a}||\vec{u}|} = \frac{-1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \omega = 100°54'$$

Neznanko x izračunamo iz enačbe $\vec{u}\vec{v} = 0$, ki velja za pravokotne vektorje.

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} + x\vec{b}) = 0 \Rightarrow 4\vec{a}\vec{a} - 6\vec{a}\vec{b} + 2x\vec{a}\vec{b} - 3x\vec{b}\vec{b} = 0 \Rightarrow 16 - 18 + 6x - 9x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

Zgled 4.3: V trikotniku ABC je $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|AC| = 5\,\text{cm}$ in $\sphericalangle BAC = \alpha = 60°$. Na stranici BC leži taka točka D, da je: $|BD| : |DC| = 1 : 2$. Izračunaj točno vrednost $\cos\varphi$, če je $\varphi = \sphericalangle DAC$.

Nalogo rešimo z vektorji. Označimo $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Potem je $|\vec{c}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$, $\sphericalangle(\vec{c}, \vec{b}) = \alpha$. Potrebovali bomo skalarni produkt $\vec{b}\cdot\vec{c} = 8\cdot 5\cdot \frac{1}{2} = 20$.



Načrt reševanja:

- iskani kot oklepata vektorja $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{AC}$. Zato: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|}$.
- vektorja $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{AC}$ izrazimo z baznima vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{b}$.
- izračunamo $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AD}|$ in $|\overrightarrow{AC}|$.

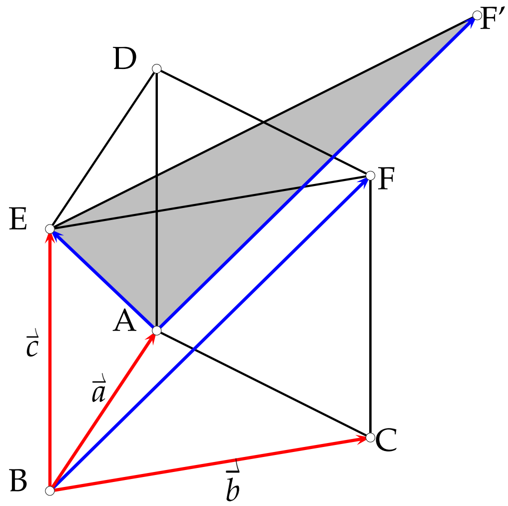
Izvedba:

- $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ in $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{b} = \frac{25}{3} + \frac{40}{3} = \frac{65}{3}$.
- $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}) \cdot (\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c})} = \sqrt{\frac{1}{9}\vec{b} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{c}} = \frac{19}{3}$.
  $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{b}| = 5$.

Torej je $\cos\varphi = \dfrac{\frac{65}{3}}{\frac{19}{3} \cdot 5} = \dfrac{13}{19}$. ■

Zgled 4.4: Naj bo ABCDEF enakorobna pokončna tristrana prizma (D je nad A, E nad B). Izračunaj na minuto točno kot, ki ga oklepata vektorja $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{BF}$.

Tudi to nalogo rešimo z vektorji. Recimo, da je iskani kot φ. Kot, ki ga izbrana vektorja oklepata, na sliki ugledamo, če začetka vektorjev prestavimo v skupno izhodišče, recimo začetek vektorja $\overrightarrow{BF}$ prestavimo v A. Potem je na sliki iskani kot $\sphericalangle F'AE$ v trikotniku $F'AE$. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{BE}$ in označimo z a rob prizme. Ker je prizma enakorobna in pokončna, je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 90°$. Zato je: $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a^2}{2}$. Izrazimo vektorja $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{BF}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$:



$\overrightarrow{AE} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BF} = \vec{b} + \vec{c}$. Potem je: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \frac{a^2}{2}$ in $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{BF}| = a\sqrt{2}$. Zato je: $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ in tako $\varphi = 75°31'$. ■

Naloge

1. Če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, izračunaj: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ in $\sphericalangle((\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} + \vec{b}))$. [$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 17$, $152°4'$]

2. Enotski vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ so paroma pravokotni. Izrazi z njimi vektor $\vec{x}$, če je $\vec{a} \cdot \vec{x} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = -2$ in $\vec{c} \cdot \vec{x} = 3$.

   [Namig: Zapiši $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, zapisano enačbo množi zapored skalarno z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, upoštevaj, da so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ paroma pravokotni, na koncu pa reši nastali sistem enačb z neznankami m, n in p. Rešitev: $\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$]

3. V enakokrakem trikotniku ABC je $|AB| = |BC| = 15$, $|AC| = 20$. Točka E deli stranico BC v razmerju 1 : 4. Izračunaj kot $\sphericalangle AEB$ na minuto točno. [$84°53'$]

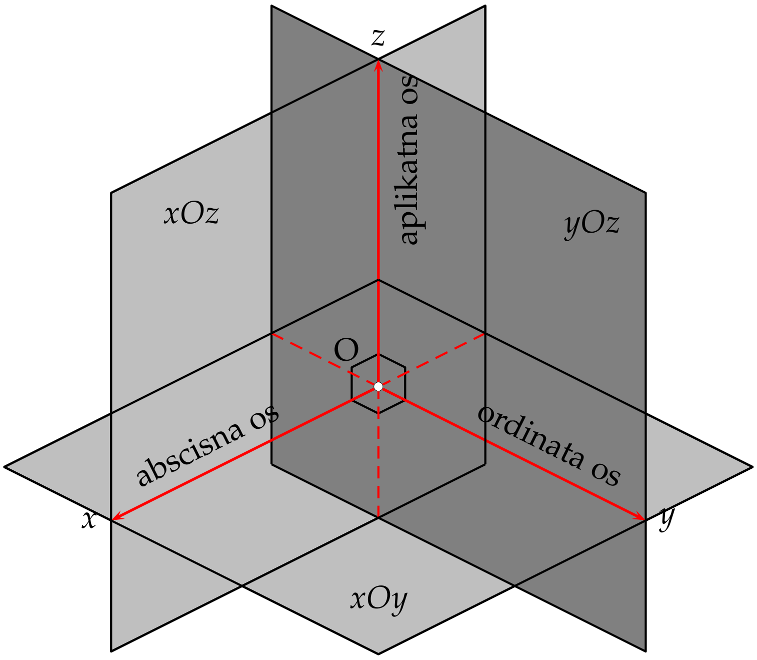
4. Vektor $2\vec{a} - \vec{b}$ je pravokoten na vektor $\vec{a} + \vec{b}$, vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$ pa je pravokoten na vektor $2\vec{a} + \vec{b}$. Izračunaj na stopinjo kot $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. [$108°$]

5 Pravokotni koordinatni sistem v prostoru

5.1 Koordinate točke

V prostoru izberimo točko O, jo imenujmo izhodišče in v njej postavimo tri paroma pravokotne premice: **abscisno** os (x), **ordinatno** os (y) in **aplikatno** os(z). Premice orientiramo, kot kaže spodnja slika. Premice tvorijo tri koordinatne ravnine xOy, yOz in xOz, ki razdelijo prostor na osem delov, **oktantov**. Vsako premico opremimo s koordinatnim sistemom na premici, s pozitivnim delom od izhodišča O v smeri puščic posamezne osi. Dobljeni koordinatni sistem imenujemo tudi trirazsežni kartezijev [1] koordinatni sistem.

prostorski sistem



Slika 12: Koordinatni sistem v prostoru

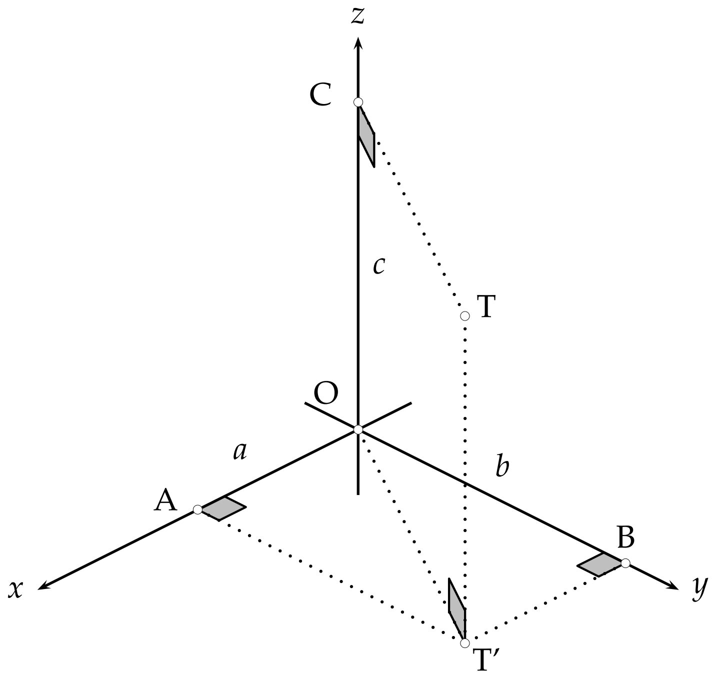
V prostorskem koordinatnem sistemu izberimo točko T.

- Naj bo T′ pravokotna projekcija točke T na ravnino xy abscisne osi x in ordinatne osi y.
- Točka T′ leži v ravnini s koordinatnim sistemom Oxy; projecirajmo jo enkrat v smeri osi y na os x, drugič pa v smeri osi x na os y. Dobimo točko A na osi x in B na osi y. Njuni razdalji od izhodišča označimo z a in b (seveda z ustreznim predznakom).

[1] Utemeljitelj pravokotnih sistemov je bil Rene Descartes (1596-1650), tudi Cartesius imenovan

- V točki T postavimo vzporednico k premici (O,T′); ta seka os z v točki C. Njeno razdaljo od izhodišča O označimo s c (z ustreznim predznakom).

Točki T smo tako priredili trojico števil a, b in c, ki jih imenujemo koordinate točke T v trirazsežnem prostoru. Točko s koordinatami zapišemo podobno kot v ravninskem sistemu, le tretjo koordinato dodamo: T(a, b, c)



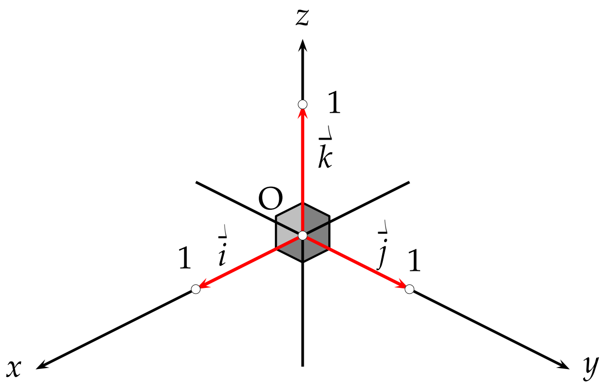
Slika 13: Koordinate točke v prostoru

Na premici položaj točke določimo z enim številom; zato množico točk na premici zapišemo $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. V ravnini položaj točke določimo z urejenim parom števil, npr. (x, y). Urejeni pari pa so elementi kartezičnih produktov dveh množic, zato množico točk ravnine zapišemo tudi z $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. S podobnim razmišljanjem točke prostora imenujemo elemente iz množice $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

5.2 Vektorji v ortonormiranem sistemu *ijk*

V poglavju o vektorjih v prostoru smo spoznali, da trije nekoplarni vektorji v prostoru natanko določajo poljuben vektor tega prostora. Izberimo na koordinatnih oseh **enotske** vektorje: $\vec{i}$ na abscisni, $\vec{j}$ na ordinatni in $\vec{k}$ na aplikatni osi. Dobljeni sistem vektorjev $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ imenujemo **desno ortonormiran sistem ali baza**. Vektorjem $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ pravimo tudi **bazni vektorji**.

Razložimo pojem "desno "ortonormirani sistem.



Slika 14: Ortonormiran sistem vektorjev

- **desno**: sistem vektorjev $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se ravna po pravilu desnega vijaka. [2]

  To pomeni: če $\vec{i}$ zavrtimo v ravnini xy v pozitivni smeri v $\vec{j}$, desni vijak odvijamo - to smer in smisel ima vektor $\vec{k}$. Podobno: če $\vec{j}$ zavrtimo v ravnini yz v pozitivni smeri v vektor $\vec{k}$, desni vijak zavijamo v smeri in smislu vektorja $\vec{i}$. Podobno preverimo vrtenje vektorja $\vec{k}$ v vektor $\vec{i}$.

- **orto**: vektorji $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ so paroma pravokotni.

- **normiran**: vektorji $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ imajo vsi dolžino 1, torej: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Pravokotnost in normiranost povzročita naslednjo "poštevanko" za skalarni produkt:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

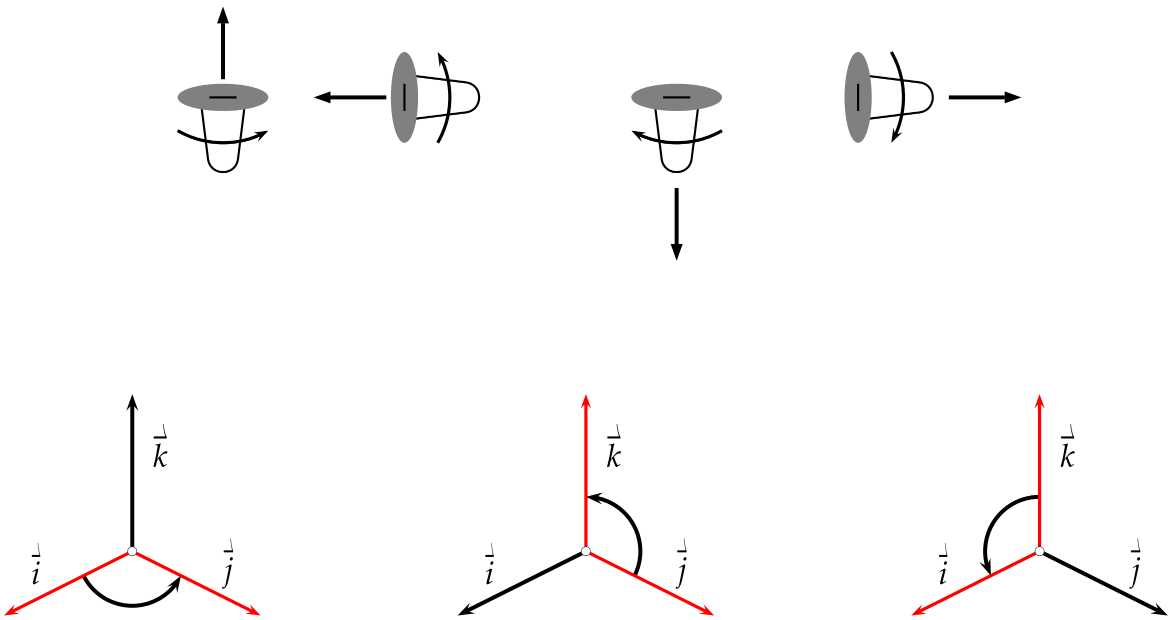
sistem v ravnini

V ravnini ortonormiran sistem sestavljata pravokotna, enotska vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$, ki kažeta od izhodišča do točk $(1, 0)$ na abscisni osi in $(0, 1)$ na ordinatni osi.

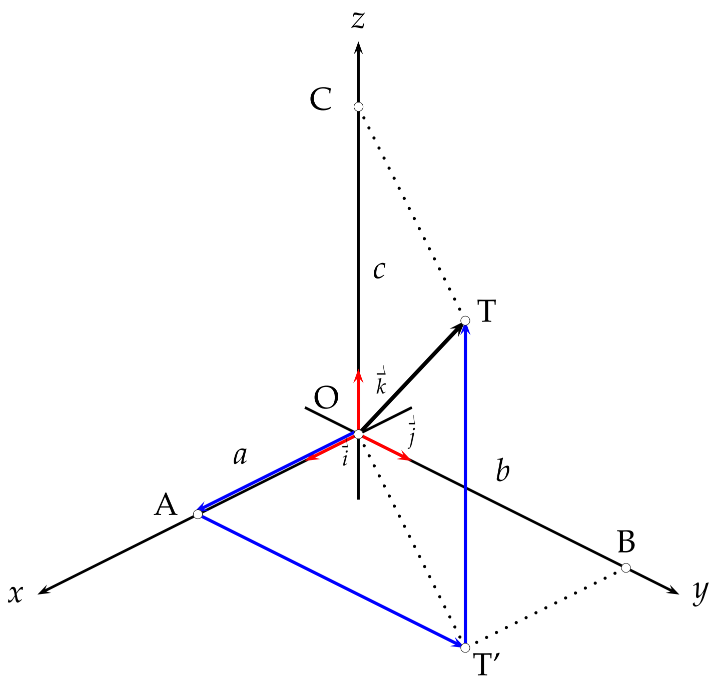
Vzemimo v prostoru točko $T(a, b, c)$ in ji priredimo krajevni vektor $\overrightarrow{OT} = \vec{r}_T$.

Na sliki 5 preberemo: $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT'} + \overrightarrow{T'T}$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ ima dolžino a in smer ter v primeru pozitivnega a smisel enotskega vektorja $\vec{i}$, v primeru negativnega a pa nasprotnega. Zato je $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$. Podobno je $\overrightarrow{AT'} = b\vec{j}$ in $\overrightarrow{T'T} = c\vec{k}$. Potem je $\overrightarrow{OT} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

[2] Večina vijakov v vsakdanjem življenju je desnih. To pomeni, da vijak privijamo, ko ga vrtimo v negativni smeri (↻) in odvijamo, ko ga vrtimo v pozitivni smeri (↺). Temu dejstvu pravimo pravilo desnega vijaka.



Slika 15: Pravilo desnega vijaka



Slika 16: Komponente krajevnega vektorja

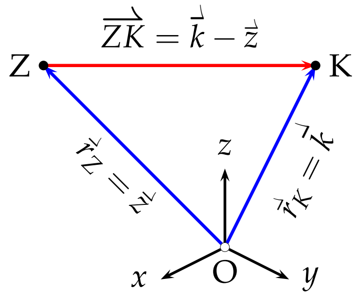
Zadnjo enačbo okrajšano zapišemo $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a, b, c)$ in števila $a,\ b$ in c pomenijo "velikost

"vektorja $\overrightarrow{\text{OT}}$ v smeri vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$. Ta števila imenujemo komponente krajevnega vektorja $\overrightarrow{\text{OT}}$.
Povzemimo: Če ima točka T v prostoru **koordinate** T(a,b,c), ima njen krajevni vektor **komponente** (a,b,c). Zapišemo ga lahko na:

- daljši način: $\boxed{\overrightarrow{\text{OT}} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}$
- krajši način: $\boxed{\overrightarrow{\text{OT}} = (a,b,c)}$

Bazni vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ imajo komponente $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, v ravnini pa so komponente baznih vektorjev $\vec{i} = (1,0)$ in $\vec{j} = (0,1)$.

Tudi proste vektorje lahko zapišemo v komponentah. Naj bo $\overrightarrow{\text{ZK}}$ prosti vektor z začetkom Z in koncem K. Točki Z in K naj imata koordinate: Z(x_1,y_1,z_1) in K(x_2,y_2,z_2).[3]



Slika 17: Prosti vektor je razlika dveh krajevnih vektorjev

Potem je:
$\overrightarrow{\text{ZK}} = \overrightarrow{\text{OK}} - \overrightarrow{\text{OZ}} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$
Zato prosti vektor lahko zapišemo s komponentami, ki jih dobimo tako, da od ustrezne komponente krajevnega vektorja konca $\overrightarrow{OK}$ odštejemo ustrezno komponento krajevnega vektorja začetka $\overrightarrow{OZ}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\text{ZK}} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)}$$

Tako ima (prostorski) vektor $\overrightarrow{AB}$, kjer je $A(-2,1,0)$ in $B(1,-2,-1)$, komponente $\overrightarrow{AB} = (1-(-2), -2-1, -1-0) = (3,-3,-1)$, (ravninski) vektor $\overrightarrow{CD}$ pa ima komponenti $\overrightarrow{CD} = (2-(-3), 0-(-1))$, če je $C(-3,-1)$ in $D(2,0)$.

[3]V bodoče bomo uporabljali poenostavljene slike; ortonormirani sistem bomo postavili v izhodišče O, osi in smeri vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ pa ne bomo risali.

5.3 Računske operacije v sistemu ijk

V prejšnem poglavju smo spoznali, da lahko poljubni vektor $\vec{a}$ prikažemo s komponentami, npr. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Spoznali smo tudi: če je $\vec{a}$ krajevni vektor, so njegove komponente tudi koordinate točke, ki jo kaže iz danega izhodišča O.
V tem poglavju bomo spoznali, kako računamo z vektorji, ki so podani s komponentami. Pri vseh preoblikovanjih bomo uporabljali naslednje lastnosti računskih operacij: **komutativnost** (seštevanje vektorjev, skalarni produkt), **homogenost** (množenje s številom, skalarni produkt), **distributivnost** (množenje s številom, skalarni produkt).
Vse nastale formule veljajo tudi za **ravninske** vektorje, le tretjo komponento, tisto v smeri vektorja $\vec{k}$, **izberemo 0**.

Vzemimo vektorja:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \qquad \text{in} \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

- **Seštevanje in odštevanje**

  $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \pm (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = (a_1 \pm b_1)\vec{i} + (a_2 \pm b_2)\vec{j} + (a_3 \pm b_1)\vec{k} =$
  $= (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)$.

  Komponente vsote ali razlike dveh vektorjev dobimo tako, da enakoležni komponenti (a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3) seštejemo ali odštejemo:

  $$\boxed{\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)}$$

  Tako je, npr. za $\vec{a} = (2, -3, 2)$ in $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k} = (2, 0, -3)$, vsota $\vec{a} + \vec{b} = (4, -3, -1)$, razlika pa $\vec{a} - \vec{b} = (0, -3, 5)$.

- **Množenje s številom**

  $m\vec{a} = m(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) = (ma_1)\vec{i} + (ma_2)\vec{j} + (ma_3)\vec{k} = (ma_1, ma_2, ma_3)$.

  Komponente množenja vektorja $\vec{a}$ s številom m dobimo tako, da vsako komponento pomnožimo s številom m:

  $$\boxed{m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)}$$

  Če je $\vec{a} = (2, -3, 2)$, je $\frac{1}{2}\vec{a} = (1, -\frac{3}{2}, 1)$.

- **Skalarni produkt**

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = (a_1b_1)\vec{i}\cdot\vec{i}+(a_1b_2)\vec{i}\cdot\vec{j}+\ldots+(a_3b_3)\vec{k}\cdot\vec{k} == a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

  Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo tako da, istoležni komponenti zmnožimo, dobljene zmnožke pa seštejemo:

  $$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

  Za $\vec{a}=(2,-3,2)$ in $\vec{b}=(2,0,-3)$, je $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2+(-3)\cdot 0+2\cdot(-3) = -2$.

- **Dolžina vektorja**

  V poglavju o skalarnem produktu smo za dolžino vektorja pridelali enačbo: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. Če je $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, je $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3}$, zato:

  $$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

- **Enotski vektor**

  Za dani vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ima njegov enotski vektor $\vec{a}_0$ enako smer in enak smisel, njegova dolžina pa je 1. Zato je $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_1,a_2,a_3)$ in:

  $$\boxed{\vec{a}_0 = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\frac{a_2}{|\vec{a}|},\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right)}$$

  Enotski vektor $\vec{a}_0$ vektorja $\vec{a}=(2,-3,2)$ je enak $(\frac{2\sqrt{17}}{17},-\frac{3\sqrt{17}}{17},\frac{2\sqrt{17}}{17})$, saj je $|\vec{a}| = \sqrt{17}$.

Zgledi

Zgled 5.1: Naj bo $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$. Izračunaj: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}+\vec{b}|-(|\vec{a}|+|\vec{b}|)$.

$\vec{a}+\vec{b}=(1,2,1)+(1,-1,2)=(1+1,2+(-1),1+2)=(2,1,3)$

$\vec{a}-2\vec{b} = (1,2,1)-2(1,-1,2) = (1,2,1)-(2,-2,4) = (1-2,2-(-2),1-4) = (-1,4,-3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,2,1)\cdot(1,-1,2)=1\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 2=1-2+2=1$

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}=1\cdot(1,2,1)=(1,2,1)$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=(2,1,3)\cdot(1,-1,2)=2-1+6=7$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} = (1,2,1)\cdot(1,-1,2)+(1,-1,2)\cdot(1,-1,2) = (1-2+2)+(1+1+4) = 1+6=7$

$|\vec{a}+\vec{b}|-(|\vec{a}|+|\vec{b}|)=|(2,1,3)|-(|(1,2,1)|+|(1,-1,2)|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}-(\sqrt{1^2+2^2+1^2}+\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2})=\sqrt{14}-2\sqrt{6}$ ■

Zgled 5.2: Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri $60°$. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak 15, skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{a}+\vec{b}$ pa 51. Izračunaj dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Označimo $|\vec{a}|=x$ in $|\vec{b}|=y$. Za dve neznanki potrebujemo dve enačbi. Prva je skrita v povedi "Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri $60°$", ki dá enačbo $\frac{1}{2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{x\cdot y}$, drugo enačbo pa dobimo v povedi "skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{a}+\vec{b}$ je enak 51", ki nam dá enačbo $x^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=51$. Ker je $\vec{a}\cdot\vec{b}=15$, je $x^2=36$ in $x\cdot y=30$. Ker je dolžina nenegativno število, je $x=6$ in $y=5$. ■

Zgled 5.3:

1. **Zapis vektorja s komponentami v bazi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ je natanko določen, je enoličen. Utemelji!**
2. **Zapiši vektor $\vec{c}=(5,-4)$ z linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}=(-2,1)$ in $\vec{b}=(1,-2)$.**

Vzemimo, da ima vektor $\vec{a}$ dva različna zapisa: $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)=(x_2,y_2,z_2)$. Potem je $x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$ in zato $(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}=\vec{0}$. Zadnji enačba je ničelna linearna kombinacija linearno neodvisnih vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, zato so koeficienti kombinacije vsi enaki 0, torej je: $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ in zato $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

V drugi nalogi moramo poiskati taki števili x in y, da bo veljalo $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ali v komponentah $(5, -4) = x(-2, 1) + y(1, -2)$. Zato je $(-2x + y, x - 2y) = (5, -4)$ in zaradi enoličnosti zapisa vektorja v komponentah $-2x + y = 5$ in $x - 2y = -4$. Dobljeni sistem ima rešitev $x = -2$ in $y = 1$ in tako je $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$. ■

Zgled 5.4: Za katera realna števila x sta vektorja $(2x + 1, 2x - 1)$ in $(3, -1)$ kolinearna in za katera pravokotna?

Vektorja sta kolinearna, če je eden "večkratnik" drugega, torej obstaja tako število y, da velja $(2x + 1, 2x - 1) = y(3, -1)$. Zato je $2x + 1 = 3y$ in $2x - 1 = -y$. Rešitev sistema sta števili $x = 1/4$ in $y = 1/2$.
Kolinearnost uženimo še na drug način. Kolinearna vektorja oklepata kot $0°$, zato je $(2x + 1, 2x - 1) \cdot (3, -1) = |(2x + 1, 2x - 1)||(3, -1)|$ in tako $6x + 3 - 2x + 1 = \sqrt{(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2}\sqrt{10}$. Dobljeno iracionalno enačbo uredimo ($4x + 4 = \sqrt{10(8x^2 + 2)}$), kvadriramo in spet uredimo do enačbe $16x^2 - 8x + 1 = 0$. Zadnjo enačbo razstavimo v $(4x - 1)^2 = 0$ in uzremo rešitev $x = 1/4$.

Vektorja sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0. Zato je $(2x + 1, 2x - 1) \cdot (3, -1) = 6x + 3 - 2x + 1 = 0$ in tako $x = -1$. ■

Zgled 5.5: Določi x in y tako, da bo za vektorje $\vec{a} = (x, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 3)$ in $\vec{c} = (1, y, 2)$ veljalo: $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Če naj bo $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{a} \perp \vec{c}$, je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Zato je $(x, 2, 3) \cdot (1, 0, 3) = x + 9 = 0$ in $(x, 2, 3) \cdot (1, y, 2) = x + 2y + 6 = 0$. Odtod je $x = -9$ in $y = 3/2$. ■

Zgled 5.6: Dane so točke $A(2, -3, 0)$, $B(-1, 0, 4)$ in $C(2, 6, 5)$.

1. **Pokaži, da so v trikotniku koordinate njegovega težišča enake aritmetični sredini ustreznih koordinat oglišč trikotnika, torej, da je $x_T = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_T = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$, $z_T = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$**

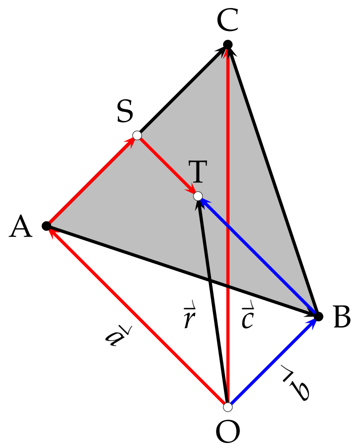
2. **Poišči koordinate težišča T trikotnika ABC.**

3. **Določi koordinate točke D, da bo T težišče trikotnika OCD.**

Začnimo z drugo nalogo. Pri reševanju upoštevamo rezultat prve naloge, ki pravi, da je $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Zato je $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}((2, -3, 0) + (-1, 0, 4) + (2, 6, 5)) = \frac{1}{3}(3, 3, 9) = (1, 1, 3)$ in tako ima težišče T koordinate $T(1, 1, 3)$.

Nadaljujmo z zadnjo nalogo, kjer bomo spet upoštevali zaključek prve naloge. Vzemimo, da ima točka D koordinate (x, y, z). Ker so koordinate izhodišča O vse 0, koordinate točke C trojka $(2, 6, 5)$ in pravkar izračunane koordinate težišča trojka $(1, 1, 3)$, dobimo enačbe: $1 = \dfrac{0+2+x}{3}$, $1 = \dfrac{0+6+y}{3}$, $3 = \dfrac{0+5+z}{3}$. Odtod je $2 + x = 3 \Rightarrow x = 1$ in podobno $y = -3$ ter $z = 4$.

Označimo krajevne vektorje oglišč A, B in C zapored z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, krajevni vektor težišča T pa z $\vec{r}$. Iz izhodišča se do sprehodimo po poti $O - A - S - T$ ali pa po poti $O - B - T$. Pri tem je točka S sredina stranice AC. Izberimo drugo pot. Potem je $\vec{r} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$. Iz klasične geometrije si sposodimo dejstvo, da težišče razdeli težiščnico v razmerju 2:1 za del od oglišča. V našem primeru to pomeni, da je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OS} - \vec{b}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}$. Zato je $\vec{r} = \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Ravno to pa smo morali utemeljiti. ■



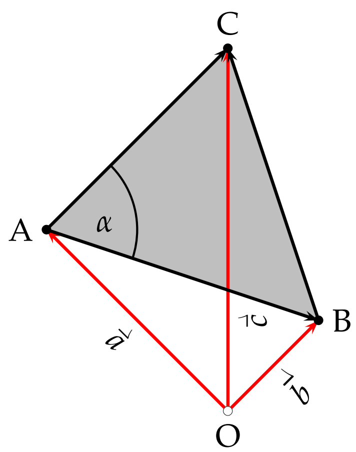
Zgled 5.7: Pokaži, da sta lahko vektorja $\vec{a} = (7, 6, -6)$ in $\vec{b} = (6, 2, 9)$ roba iste kocke. Poišči še vektorja, ki sta možni tretji rob te kocke.

Robovi kocke so enakih dolžin in bodisi vzporedni bodisi pravokotni. Dolžini danih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta ($|\vec{a}| = \sqrt{49 + 36 + 36} = 11$, $|\vec{B}| = \sqrt{36 + 4 + 81} = 11$) enaki, vektorja pa sta pravokotna, sa je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 42 + 12 - 54 = 0$. Zato sta dana vektorja lahko rob kocke, poleg njiju pa še po trije vzporedni vektorji. Poiščimo še tretji vektor, ki je lahko skupaj z danima vektorjema rob kocke. Vzemimo, da ima iskani vektor $\vec{c}$ komponente (x, y, z). Tri neznanke, x, y in z, zahtevajo tri enačbe, ki jih dobimo v pogojih $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ in $|\vec{c}| = 11$. Enačbe uredimo v $7x + 6y - 6z = 0$, $6x + 2y + 9z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 121$. Iz prvih dveh enačb izrazimo x in y z z, in sicer tako, da zapišemo sistem dveh linearnih enačb z neznankama x in y $\left.\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 6y & = & 6z \\ 6x & + & 2y & = & -9z \end{array}\right|$. Sistem rešimo z eno od metod in dobimo: $x = -3z$ in $y = \frac{9z}{2}$. Izraza uvrstimo v tretjo enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 121$ in jo uredimo. Dobimo: $z^2 = 4$ in odtod $z_1 = 2, x_1 = -6, y_1 = 9$ in $z_2 = -2, x_2 = 6, y_2 = -9$. Torej je tretji iskani rob bodisi $\vec{c}_1 = (-6, 9, 2)$ bodisi $\vec{c}_2 = (6, -9, -2)$. ■

Zgled 5.8: Naj bo $A(11, 4, 7)$, $B(9, 2, 6)$ in $C(11, 0, 7)$.

1. **Poišči notranje kote in obseg $\triangle ABC$.**
2. **Kolika je ploščina danega trikotnika ?**
3. **Koliko je oglišče C oddaljeno od nosilke stranice AB ?**

Najprej prikažimo poenostavljeno sliko podatkov. Na sliki označimo z $\vec{a} = (11, 4, 7)$, $\vec{b} = (9, 2, 6)$ in $\vec{c} = (11, 0, 7)$ krajevne vektorje oglišč trikotnika ABC. Potem so vektorji stranic: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-2, -2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (0, -4, 0)$ in $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (2, -2, 1)$. Če želimo izračunati obseg trikotnika, moramo izračunati dolžine njegovih stranic: $|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$, $|AC| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$ in $|BC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.



Izračunane stranice povedo, da je trikotnik enakokrak, njegov obseg pa meri $o = 3 + 4 + 3 = 10$ enot. Izračunajmo notranji kot α pri oglišču A, ki ga oklepata vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$. Ker je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 = 8$ in $|AB| = 3$, $|AC| = 4$, je $\cos\alpha = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ in tako $\alpha = 48,19°$. Ker je trikotnik enakokrak s krakoma AB in BC, je tudi kot v oglišču C ($= \gamma$) enak $48,19°$. Tretji kot (β) je potem $180° - 2 \cdot 48,19° = 83,62°$.

Ploščino p izračunamo kar s formulo $p = \dfrac{1}{2}|AB||AC| \sin\alpha$. Sinus kota α izračunamo iz

Pitagorovega izreka za sin in sin: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Zato je $p = 2\sqrt{5}$.

Iskana razdalja je kar višina na stranico AB trikotnika ABC. Višino izračunamo s ploščino $v_{AB} = \frac{2p}{|AB|} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$. ■

6 Povzetki in naloge

Vsi koordinatni zapisi vektorjev in točk v prostoru so zapisani v običajni desno ortonormirani bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, v ravinini pa v bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Povzetki

1. Ponovi definicije osnovnih računskih operacij z vektorji:
   - vsote (razlike),
   - množenje s skalarjem,
   - skalarni produkt,
   - vektorski produkt.

   Skiciraj 'logotipe' računskih operacij in zapiši, kako jih izvedeš v koordinatnem zapisu vektorjev.
2. Definiraj kolinearne, komplanarne in pravokotne vektorje.
3. Definiraj enotski vektor in opiši kako ga izračunš v koordinatnem zapisu.
4. Definiraj krajevni in prosti vektor. Kako prosti vektor zapišeš s krajevnimi vektorji?
5. * Definiraj linearno kombinacijo vektorjev. Kaj je ničelna linearna kombinacija in kaj trivialna ničelna kombinacija.
6. * Linearno odvisni in neodvisni vektorji. Baza premice, ravnine in prostora.

Naloge

1. V ravnini imamo točke $A(3,1)$, $B(2,-3)$ in $C(-2,2)$.

   (a) Določi koordinati točke D, da bo $ABCD$ paralelogram.

   (b) Določi koordinati presečišča diagonal paralelograma $ABCD$.

   [$D(-1,6)$; $S(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$]

2. Določi koordinate točk A, B in C, če veš, da je $\overrightarrow{OA} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{AB} = (2,0,-1)$ in $\overrightarrow{BC} = (3,-2,0)$, kjer je O koordinatno izhodišče. [$B(1,2,-2)$; $C(4,0,-2)$]

3. Izračunaj notranje kote in ploščino štirikotnika ABCD, če je $A(-4,-2)$, $B(5,-5)$, $C(1,3)$ in $D(-5$
   [$135°$, $45°$, $90°$, $90°$; $37{,}5$]

4. Naj bo $A(11,4,7)$, $B(9,2,6)$ in $C(11,0,7)$.

   (a) Poišči notranje kote in obseg $\triangle ABC$.

   (b) Kolika je ploščina danega trikotnika ?

   (c) Koliko je oglišče C oddaljeno od nosilke stranice AB ?

   [$\alpha = \gamma = 48°11'$; $\beta = 83°38'$; $2\sqrt{5}$; $\frac{4\sqrt{5}}{3}$]

5. Pokaži, da sta lahko vektorja $\vec{a} = (7,6,-6)$ in $\vec{b} = (6,2,9)$ roba iste kocke. Poišči še vektorja, ki sta možni tretji rob te kocke. [$(\pm 6, \mp 9, \mp 2)$]

6. Določi število n tako, da bo vektor $\vec{a} = 2n\vec{i} + \vec{j}$ oklepal enaka kota z vektorjema $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{c} = (3,-1)$. [$\frac{1}{2}$]

7. Poišči projekcijo vektorja $\vec{a} = (5,2,5)$ na vektor $\vec{b} = (2,-1,2)$. [6]

8. Z vektorji izračunaj ostri kot med težiščnicama na kraka enakokrakega trikotnika s kotom $30°$ ob vrhu. [$\cos\varphi = \frac{5\sqrt{3}-8}{10-4\sqrt{3}}$]

9. Določi $m \in \mathbb{R}$ tako, da bodo vektorji $\vec{a} = (1,3,-2)$, $\vec{b} = (2,-4,5)$ in $\vec{c} = (1,-3,m)$ komplanarni. [$\frac{17}{5}$]

10. V pravilnem šestkotniku ABCDEF je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Izrazi vektorja $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{AC}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{AC}$ in skalarni produkt $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$.

11. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ imata enaki dolžini $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ in oklepata kot $120°$. Nariši vektor $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ in izračunaj skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

12. Naj bo ABCD kvadrat s stranico dolžine 3 enote. Nariši vektor $\vec{x} = 2\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Izračunaj natančno dolžino vektorja $\vec{x}$ in na minuto natančno kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\overrightarrow{AB}$.

13. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-3, 1)$ in $\vec{b} = (2, 4)$. Zapiši vektor $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, izračunaj skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na stotinko stopinje.

14. Dana sta vektorja $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (1, -2, 5)$. Izračunaj njun skalarni produkt. Izračunaj komponente vektorja $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ in točno vrednost njegove dolžine.

15. Dan je vektor $\vec{a} = (-2, 1)$. Izračunaj njegovo dolžino. Zapiši komponenti vektorja $\vec{b}$, če je $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$ in $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$.

16. V enakostraničnem trikotniku ABC s stranico dolžine 4 naj bosta vektorja $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Točka D naj leži na stranici BC tako, da je $|BD| : |DC| = 1 : 3$.

    (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter izračunajte njegovo dolžino. Rezultat naj bo točen.

    (b) Izračunaj kot med vektorjema $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{AC}$. Kot zapiši na minuto natančno.

    (c) Izračunaj število x tako, da bo vektor $x\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ vzporeden vektorju $2\vec{a} - \vec{b}$.

    (d) Izračunaj število y tako, da bo vektor $\vec{a} + y\vec{b}$ pravokoten na vektor $5\vec{a} - \vec{b}$.

17. V pravokotnem koordinatnem sistemu imamo točke $A(3,\ t,\ -5)$, $B(2t,\ 4,\ -1)$ in $C(6,\ 8,\ 7)$. Krajevne vektorje točk A, B in C označimo zapored z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

    (a) Za katere vrednosti parametra t je dolžina vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ enaka 11?

    (b) Izračunaj realno število t tako, da bo trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri oglišču C.

    (c) Naj bo $t = 2$. Pokaži, da ležijo v tem primeru vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.

18. Dana sta vektorja $\vec{a} = (x,\ x+1,\ -6)$ in $\vec{b} = (2x^2 + 10x + 11,\ x - 2,\ 1)$.

    (a) Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je $x = -1$.

    (b) Izračunaj realno število x tako, da bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ t pravokotna.

    (c) Za katera realna števila x je $|\vec{a}| = 7$?

    (d) Naj bo $t = 2$. Pokaži, da ležijo v tem primeru vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.