KOMPLEKSNA STEVILA

(INTERNO GRADIVO)

Sestavil I.K.

2016

Kazalo

1 Uvod

Že iz naslova gradiva (Kompleksna števila) sklepamo, da se bomo ukvarjali s števili. Zato se najprej spomnimo, kaj (naj bi) o številih že vemo (vedeli).

naravna števila $\mathbb{N}$

Že v prvem razredu osnovne šole, pa tudi že prej, spoznamo **naravna števila** $1, 2, 3, \ldots$. To so števila, s katerimi štejemo. Množico naravnih števil označimo z $\mathbb{N}$. Poleg štetja, so naravna števila uporabna tudi za računanje. Z naravnimi števili **seštevamo** in **množimo**. Pri **seštevanju (adicija)** števil a in b je rezultat **vsota (seštevek, suma)** $a + b$, ki je tudi naravno število, števili a in b pa imenujemo **člena (seštevanca, sumanda)** vsote. Pri **množenju (multiplikacija)** je rezultat **produkt (zmnožek)** $a \cdot b$ (ab), ki je prav tako naravno število, števili a in b pa tu imenujemo **faktorja (množenec, množitelj)** produkta.

Za seštevanje in množenje veljajo računski zakoni. Pri zapisu so $a, b, c \in \mathbb{N}$ poljubna naravna števila.

- **zamenljivost, komutativnost**: $a + b = b + a$ in $a \cdot b = b \cdot$,
- **združljivost, asociativnost**: $(a + b) + c = a + (b + c)$ in $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- **razdružljivost, distributivnost**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pri seštevanju dveh naravnih števil a in b moramo poiskati vsoto x, torej rešujemo enačbo $a + b = x$. Pri obratni operaciji, pa bi radi iz vsote v in enega znanega člena a, dobili neznani drugi člen, torej je naša naloga rešiti enačbo $a + x = v$. Obratni operaciji, ki reši zadnjo enačbo, pravimo odštevanje. Rešitev zadnje enačbe je tedaj $x = v - a$ (**razlika** = **zmanjševanec** - **odštevanec**). Žal pa odštevanje za poljubni naravni števili a in v ni vedno izvedljivo, recimo v enačbi $8 + x = 5$ ne najdemo rešitev v množici naravnih števil, torej razlika $5 - 8$ ni naravno število.

cela števila $\mathbb{Z}$

Iz zagate se rešimo tako, da "ustvarimo" nova števila, ki bodo vsebovala vsa naravna števila, z novimi števili lahko seštevamo in množimo z enakimi računskimi zakoni kot v naravnih številih, pa tudi odštevanje je izvedljivo. Nova števila imenujemo **cela števila**, njih množico označimo z $\mathbb{Z}$. Najpreprosteje jih vpeljemo tako, da vsakemu naravnemu številu n priredimo nasprotno naravno število $-n$, njuno vsoto pa označimo z novim številom 0 (nič).

Problem odštevanja zadovoljimo rešimo s celimi števili. Toda obratna operacija množenja (**deljenje**) tudi v celih številih ni izvedljiva. To pomeni, da enačba $a \cdot x = b$, katero rešitev zapišemo z deljenjem $x = b : a$ (**količnik** ali **kvocient** = **deljenec** : **delitelj**), ni vedno rešljiva v množici $\mathbb{Z}$.

Da bi tudi deljenje bilo vedno izvedljivo (razen deljenja z 0), si omislimo nova števila, ki jih poimenujemo **racionalna**, njih množico pa označimo s $\mathbb{Q}$. Racionalna števila vpeljemo tako, da definiramo ulomke, njihovo enakost ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$) in vpeljemo računske operacije $+$, $\cdot$, $-$, $:$ za katere veljajo osnovni računski zakoni. Racionalna števila vsebujejo tudi vsa cela števila, recimo celo število a si predstavljamo z ulomkom $\frac{a}{1}$.

racionalna števila $\mathbb{Q}$

Vsako racionalno število si lahko predstavimo tudi z decimalno obliko (celi in decimalni del bomo ločili z decimalno piko, recimo 3.14). To storimo tako, da števec delimo z imenovalcem.Spomnimo se, da se lahko pri tem zgodi dvoje:

- decimalno število je **končno**, recimo $\frac{23}{40} = 0.575$ (decimalni ulomki),
- decimalno število ima **neskončen**, a **periodičen** zapis, recimo $\frac{3}{11} = 0.272727\ldots = 0.\overline{27}$.

realna števila $\mathbb{R}$

Decimalna števila, ki imajo neskončen, a neperiodičen zapis, recimo $0.1011011101110\ldots$ (po ničli sledi ena enica več kot pri prejšnji ničli) niso ulomki, kljub temu pa predstavljajo neko vrednost. Že v stari Grčiji so opazili, da diagonala kvadrata ni soizmerljiva s stranico, torej, da razmerje "diagonala : stranica" ni ulomek. Iz geometrije vemo, da je to razmerje enako $\sqrt{2}$, pokazali pa smo, da to ni ulomek. Torej obstajajo konkretne količine, ki niso racionalna števila. So neskončna neperiodična decimalna števila, npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π, itd. Taka števila imenujemo **iracionalna**. Skupaj z racionalnimi števili sestavljajo novo številsko množico, ki jo imenujemo **realna števila**. Množico realnih števil označimo z $\mathbb{R}$.

Kvadratno enačbo $ax^2 + bx + c = 0$ v skrajni sili rešimo s formulo $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kjer je je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta kvadratne enačbe. Toda lahko se zgodi, da je diskriminanta negativna. V tem primeru $\sqrt{D}$ nemoremo izračunati, zato v te primeru enačba nima realnih rešitev. Da bi tudi v primeru negativne diskriminante kvadratna enačba imela rešitev, je eden od razlogov za izdelavo novih števil.

2 Definicija kompleksnih števil

Nova števila bomo definirali tako, da bodo stara, torej realna, v njih vsebovana, pa tudi računske operacije bomo prilagodili tako, da bodo imele enake lastnosti kot jih imajo v realnih številih.

Ker kvadrat realnega števila nemore biti negativno število, torej posledično nemoremo izračunati korenov negativnih realnih števil, vpeljemo oznako za novo število:

imaginarna enota i

$$i = \sqrt{-1} \text{ ali } i^2 = -1$$

Novo število i imenujemo **imaginarna enota**. Z novim številom i računamo kot z realnimi števili. Recimo: $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$. Nova množica, ki jo sestavljamo, mora vsebovati izraze bi, $b \in \mathbb{R}$ (množenje z realnim številom), $a + bi$, $a \in \mathbb{R}$. Izraz $a + bi$ predstavlja dvočlenik. Z dvočleniki oblike $a + bx$ znamo računati. Pa se dogovorimo, da tudi z dvočleniki $a + bi$ računamo enako. Recimo vsoto $(1 + 2i) + (3i - 1)$ izračunamo tako, da združimo člene enake oblike, torej tiste, ki ne vsebujejo i in tiste, ki vsebujejo i. Zato je $(1 + 2i) + (3i - 1) = 5i$. Tudi produkt računamo podobno $(1 - 2i) \cdot (3 - i) = 3 - 6i - i + 2i^2 = 3 - 7i + 2i^2$. Ker je $i^2 = -1$, je $(1 - 2i) \cdot (3 - i) = 3 - 7i + 2i^2 = 3 - 7i - 2 = 1 - 7i$, torej iste oblike kot začetna dvočlenika.

definicije

- Naj bosta a, b realni števili. Izraz $z = a + b \cdot i$ imenujemo algebrska oblika kompleksnega števila z. Število a imenujemo **realni del** ($a = Re(z)$), število b pa **imaginarni del** ($b = Im(z)$). Kompleksna števila običajno označujemo z, w ali pa uporabimo grške črke $\alpha, \beta, \ldots$.
- Vzemimo dve kompleksni števili: $z = a + b \cdot i$ in $w = c + d \cdot i$. Potem velja: Kompleksni števili sta enaki, če se hkrati ujemata v realnem in imaginarnem delu, torej velja: $z = w \Leftrightarrow a = Re(z) = Re(w) = c$ in $b = Im(z) = Im(w) = d$
- Realno število a zapišemo v kompleksni obliki $a = a + 0 \cdot i$.
- Kompleksna števila, katerih realni del je enak 0, torej števila oblike $b \cdot i$, imenujemo **imaginarna** števila.
- Naj bo $z = a + b \cdot i$. Število $\overline{z} = a - b \cdot i$ imenujemo **konjugirano** kompleksno število števila z. Konjugirano število dobimo tako, da imaginarnemu delu spremenimo predznak, realni del pa ohranimo.

S kompleksnimi števili računamo kot z običajnimi dvočleniki.

seštevanje odštevanje

$$\boxed{z \pm w = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i}$$

Pri množenju upoštevamo, da je $i^2 = -1$.

množenje

$$\boxed{z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Zgled 2.1: Izračunaj $i^{201620152018}$.

Naloge se lotimo splošneje. Izračunajmo i^n, kjer je n naravno število. Nekaj začetnih potenc izračunajmo: $i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$. Opazimo, da se ponavlja vzorec $\boxed{1,\ \text{i},\ \text{-1},\ \text{-i}}$
Pojasnimo:
Osnovni izrek o deljenju celih števil nam pove, da eksponent n lahko zapišemo v obliki $n = 4 \cdot k + r$, kjer ostanek r zasede le vrednosti 0, 1, 2, 3. Potem je:

$$i^n = i^{4 \cdot k + r} = i^{4 \cdot k} \cdot i^r = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r$$

Torej je $i^n = i^r$ in zato:

potenca i^n

$$\boxed{i^n = i^r = \begin{cases} 1 & ; \quad r = 0 \\ i & ; \quad r = 1 \\ -1 & ; \quad r = 2 \\ -i & ; \quad r = 3 \end{cases}}$$

Rezultat uporabimo na potenci iz zgleda. Pri deljenju s 4 ostanek določa dvoštevilčni konec, v našem primeru 18. Zato je $201620152018 = 4 \cdot m + 2$ in je tako $i^{201620152018} = i^2 = -1$. ■

Zgled 2.2: Dano je kompleksno število $z = \sqrt{5} - 2i$. Izračunaj:

1. $z \cdot \overline{z}$.

2. $z^2 + i^{2018}$.

$z \cdot \overline{z} = (\sqrt{5} - 2i)(\sqrt{5} + 2i) = (\sqrt{5})^2 - (2i)^2 = 5 + 4 = 9$ in $z^2 + i^{18} = (\sqrt{5} - 2i)^2 + i^1 = 5 - 2i\sqrt{5} - 4 - 1 = -2i\sqrt{5}$. ■

Z deljenjem imamo nekoliko več dela. Do postopka (algoritma) deljenja se bomo dokopali v več fazah. V prvi fazi bomo izračunali produkt kompleksnega števila in njegovega konjugiranega števila: $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$. Torej je:

$$\boxed{z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2}$$

Spomnimo se, da je deljenje obratna operacija k množenju, torej velja: $z : w = \frac{z}{w} = \alpha$ natanko tedaj, ko je $z = \alpha \cdot w$ Vzemimo najprej, da je delitelj w realno število, deljenec $z = a + bi$ kompleksno število, količnik α pa iščemo v obliki $x + yi$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Tedaj:

$$z = \alpha \cdot w \Rightarrow a + bi = (x + yi)(w + 0 \cdot i) = xw + ywi$$

Upoštevamo, da sta kompleksni števili enaki natanko tedaj, kos ta hkrati enaka realna dela in imaginarna dela, v našem primeru $a = xw$ in $b = yw$, zato je $x = \frac{a}{w}$ in $y = \frac{b}{w}$. Tako je $\alpha = z : w = \frac{z}{w} = \frac{a}{w} + \frac{b}{w} \cdot i$. Tako smo ugotovili, da z realnim številom delimo kompleksno število tako, da delimo njegova realni in imaginarni del, recimo $\frac{3-2i}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$.

Naj bo sedaj delitelj $w = c + di$. Prej smo opazili, da je produkt kompleksnega števila in njegove konjugirane vrednosti $\overline{w} = c - di$ realno število $c^2 + d^2$. To dejstvo izkoristimo zato, da pri deljenju delitelj s primernim razširjanjem spremenimo v realno število, kajti deljenje predstavlja ulomek, ulomke pa lahko v števcu in imenovalcu razširimo z isto vrednostjo: **deljenje**

$$\boxed{z : w = \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

Zgled 2.3: Kompleksno število $(5+10i)^2 \cdot (2-i)^{-1}$ zapiši v obliki $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Izračunajmo vsak faktor posebej: $(5+10i)^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 10i + 100i^2 = 25 + 100i - 100 = -75 + 100i$ in

$$(2-i)^{-1} = \frac{1}{2-i} = \frac{1| \cdot 2+i}{2-i| \cdot 2+i} = \frac{2+i}{5}$$

Izračunano medsoboj zmnožimo:

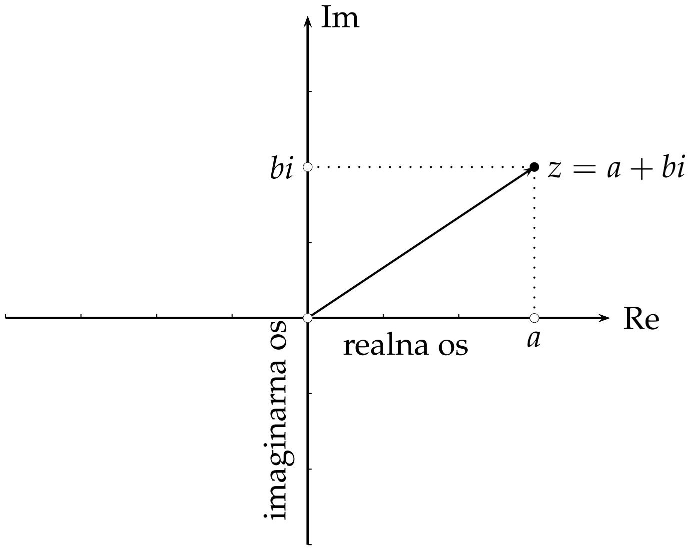
$$(-75+100i) \cdot \frac{2+i}{5} = \frac{(-75+100i)(2+i)}{5} = \frac{-150+200i-75i-100}{5} = \frac{-250+125i}{5} = -50+25i$$

Iskana vrednost je tako $-50 + 25i$. ■

3 Grafični prikaz kompleksnih števil

Realna števila smo grafično prikazali na številski premici. Kompleksno število z je določeno z urejenim parom realnih števil: $z = (a, b) = a + bi$. Urejene pare pa smo grafično prikazovali kot točke v ravninskem koordinatnem sistemu. Zato bomo tudi kompleksna števila prikazali v koordinatni ravnini, le da ji bomo pravili **kompleksna ravnina** (uporablja se tudi ime Gaussova ravnina), abscisno os imenujemo **realna os** in nanjo nanašamo realne dele $a = \mathrm{Re}(z)$, ordinatno os pa imenujemo **imaginarna os**, nanjo pa nanašamo imaginarne dele $b = \mathrm{Im}(z)$.

grafični prikaz kompleksnega števila



Slika 1: Kompleksna ravnina

Kompleksno ravnino imenujemo tudi Gaussova ali Argandova ravnina. [1]
Kompleksno število $z = a + bi$ v kompleksni ravnini (KR) prikažemo bodisi s **točko** $z = (a, b)$, bodisi s **krajevnim vektorjem** te točke.

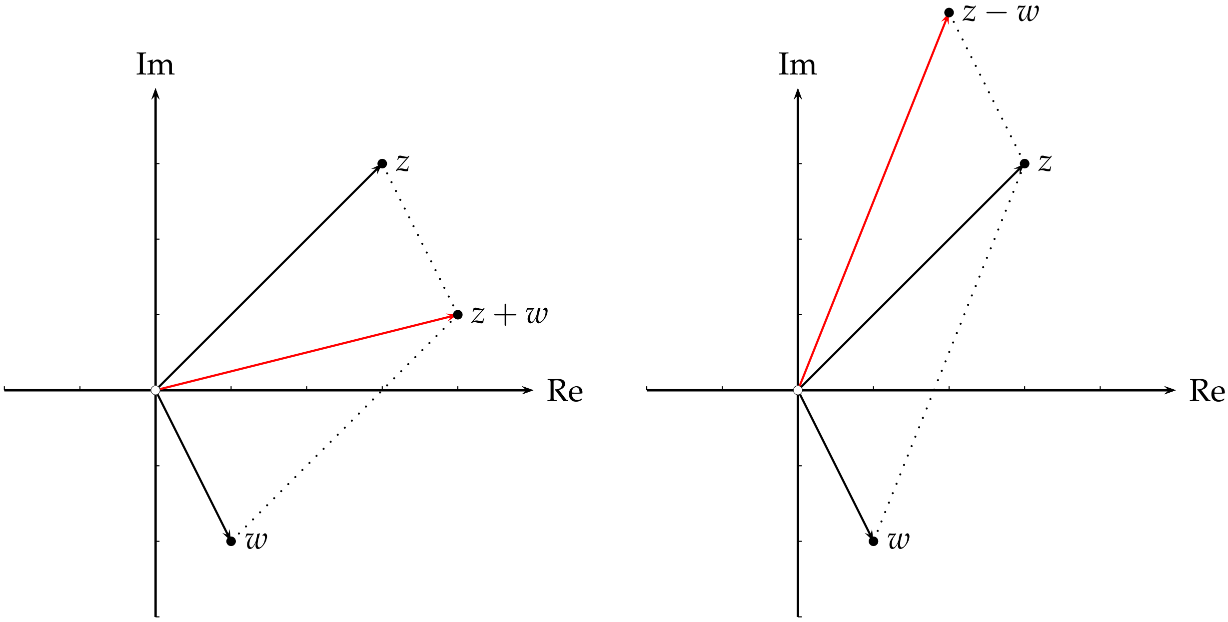
Prikaz kompleksnih števil s krajevnimi vektorji omogoča enostavno grafično seštevanje in odštevanje kompleksnih števil. Če je $z = (a, b) = a + bi$ in $w = (c, d)c + di$, je:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d)$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i = (a - c, b - d)$$

Na enak način pa seštevamo in odštevamo z ravninskimi vektorji v komponentah. Zato lahko kompleksna števila seštevamo in odštevamo kot kaže slika 2.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemški matematik; Jean-Robert Argand 1768-1822), švicarski matematik



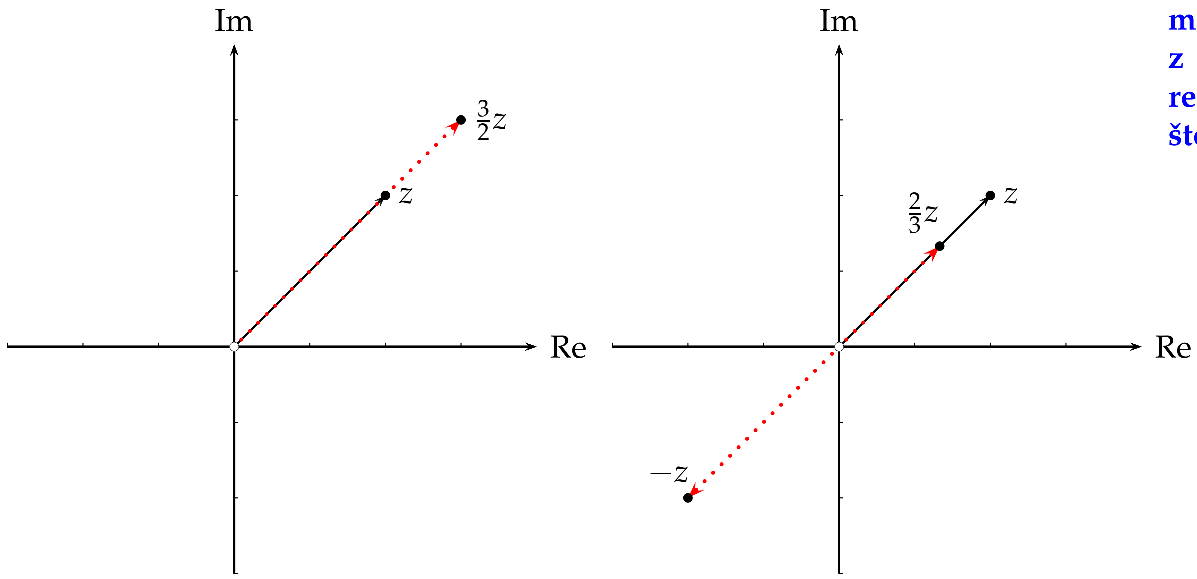
Slika 2: Grafično seštevanje in odštevanje

Tudi množenje kompleksnega števila z realnim številom lahko prikažemo kot množenje vektorja s številom. Če je $m \in \mathbb{R}$, torej $m = m + 0 \cdot i$ in $z \in \mathbb{C}$, recimo $z = a + b \cdot i$, je:

$$m \cdot z = (m + 0 \cdot i)(a + bi) = ma + mb \cdot i$$

Ravno tako pa množimo ravninski vektor, ki je podan s komponentama.

množenje z realnim številom



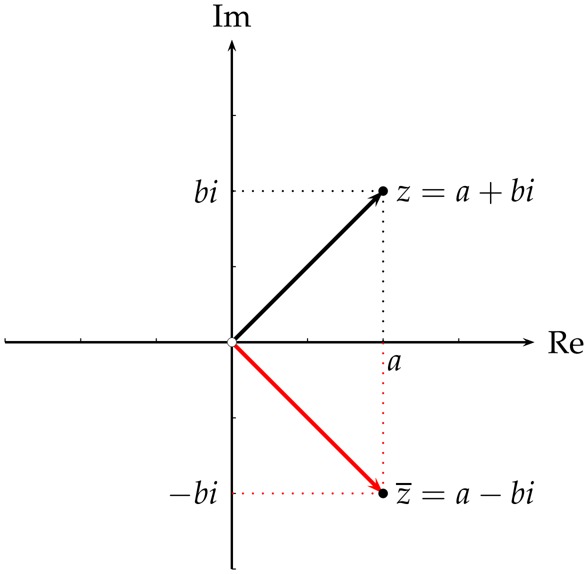
Slika 3: Grafično prikaz števila $\frac{3}{2}z$, števila $\frac{2}{3}z$ in nasprotnega števila $-z$

Tudi množenje ima geometrijski pomen. Utemeljitev presega naše trenutno znanje, zato samo izdajmo, da sta v množenje vključeni rotacija in razteg.

4 Konjugirana in absolutna vrednost

konjugirana vrednost

Naj bo $z = a + bi$. Število $\overline{z} = a - bi$ imenujemo **konjugirana** vrednost števila z.



Slika 4: Grafično prikaz konjugiranega števila $\overline{z}$

Kompleksno število in njegova konjugirana vrednost se ločita le v predznaku imaginarnega dela.

lastnosti konjugirane vrednosti

Naj bo $z = a + bi$ in $w = c + di$. Potem za konjugirano vrednost veljajo naslednja pravila:

$\overline{\overline{z}} = z$ (konjugirana vrednost konjugirane vrednosti je enaka začetni vrednosti)

$\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{a + bi})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$ ■

Število z je realno natanko tedaj, ko je $\overline{z} = z$

Če je z realno, je $b = 0$, zato $\overline{z} = a = z$. Če je $\overline{z} = z$, je $a - bi = a + bi \Rightarrow b = 0$, zato $z \in \mathbb{R}$. ■

$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ (konjugirana vrednost vsote je enaka vsoti konjugiranih vrednosti)

Res, le verigi naslednjih enačb sledimo:

$$\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} =$$
$$= (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z}+\overline{w}$$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ (konjugirana vrednost produkta je enaka produktu konjugiranih vrednosti)

Spet sledimo verigi enačb: $\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i = (ac-bci)+(bdi^2-adi) = (a-bi)c-(a-bi)di = (a-bi)(c-di) = \overline{z}\cdot\overline{w}$ ■

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$$

Če enačbo $z \cdot \dfrac{1}{z} = 1$ konjugiramo in upoštevamo prejšni izsledek, dobimo: $1 = \overline{1} = \overline{z \cdot \frac{1}{z}} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Rightarrow 1 = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Rightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ ■

Enostavna posledica prejšne enačbe je pravilo:

$$\boxed{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}}$$

Posledica zadnjih lastnosti je trditev:

$$\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Vsota in produkt dveh sebi konjugiranih števil sta realni števili, in sicer:

$$\boxed{z+\overline{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z) \quad z\cdot\overline{z} = a^2+b^2}$$

Zgled 4.1: Če je $z = \dfrac{1-2i}{1+2i}$, pokaži enakost: $z^{-1} = \overline{z}$.

Enakost najenostavneje pokažemo z naslednjo verigo enakosti:

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)} = \frac{\overline{1-2i}}{\overline{1+2i}} = \frac{1+2i}{1-2i} = z^{-1}$$

Na drugi način enakost pokažemo tako, da preoblikujemo $\overline{z}$ in z^{-1} ter ju primerjamo. Najprej zapišemo število z v običajni algebrski obliki:

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{1-2i| \cdot (1-2i)}{1+2i| \cdot (1-2i)} = \frac{1-4i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z} = -\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Preoblikujmo še z^{-1}:

$$z^{-1} = \left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^{-1} = \frac{1+2i| \cdot (1+2i)}{1-2i| \cdot (1+2i)} = \frac{1+4i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-3+4i}{5} = -\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i \Rightarrow z^{-1} = -\frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i$$

Ker smo $\overline{z}$ in z^{-1} preoblikovali do enakega dvočlenika, je res $\overline{z} = z^{-1}$. ■

Zgled 4.2: Izračunaj realno število a tako, da bo število $\dfrac{\sqrt{3}+ai}{1+i\sqrt{3}}$ realno.

Nalogo rešimo na dva načina. V prevem načinu uporabimo dejstvo, da je kompleksno število realno, če je njegov imaginaren del enak 0. Število $\frac{\sqrt{3}+ai}{1+i\sqrt{3}}$ preoblikujemo v algebrsko obliko:

$$\frac{\sqrt{3}+ai}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+ai)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3}+a\sqrt{3})+ai-3i}{4} = \frac{\sqrt{3}(1+a)}{4} + \frac{a-3}{4}i$$

Torej je $\frac{a-3}{4} = 0$ in zato je $a = 3$.

Za drugi način reševanja uporabimo pravilo, da je z realno število, če je $\overline{z} = z$:

$$\overline{z} = z \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-ai}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+ai}{1+i\sqrt{3}} \Rightarrow (\sqrt{3}-ai)(1+i\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+ai)(1-i\sqrt{3})$$

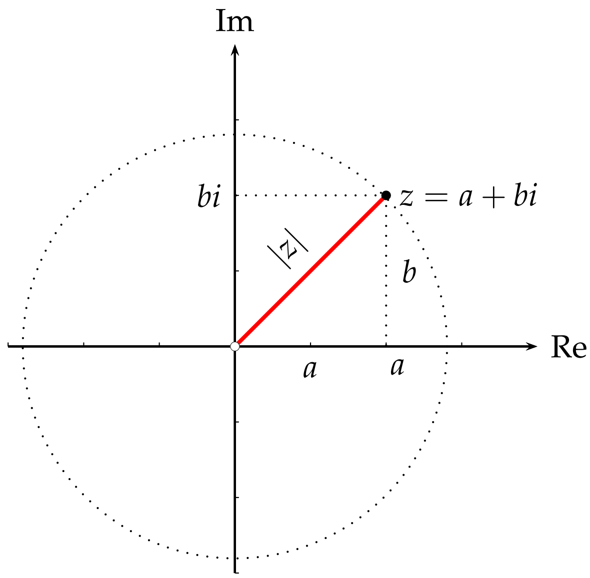
Preoblikovanje zadnje zapisane enačbe nam dá:

$$\sqrt{3} - ai + 3i + 3a = \sqrt{3} + ai - 3i + 3a \Rightarrow 2(3-a)i = 0 \Rightarrow a = 3$$

V obeh primerih smo ugotovili, da je $a = 3$. Pri takem a je vrednost kompleksnega števila $\dfrac{\sqrt{3}+ai}{1+i\sqrt{3}}$ enaka $\sqrt{3}$. ■

Naj bo $z = a + bi$. Dolžino krajevnega vektorja, ki predstavlja število z, imenujemo absolutna vrednost kompleksnega števila z. Absolutno vrednost označimo $|z|$. Drugače povedano: število $|z|$ je oddaljenost točke (a, b), ki predstavlja kompleksno število z, od izhodišča kompleksne ravnine.

absolutna vrednost



Slika 5: Grafični prikaz absolutne vrednosti $|z|$ kompleksnega števila z

Na sliki je skrit tudi način, kako izračunamo absolutno vrednost števila $z = a + bi$. Uporabimo Pitagorov izrek in ugotovimo, da je:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ker je $a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$, lahko absolutno vrednost izračunamo tudi iz enačbe:

$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$$

Zapišimo nekaj lastnosti absolutne vrenosti. V izpeljavah uporabljamo, da je $z = a + bi$ in $w = c + di$.

lastnosti absolutne vrednosti

$$\boxed{|z \cdot w| = |z| \cdot |w|}$$

Res: $|z \cdot w|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 = a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$.

Podobno izpeljemo enačbo

$$\boxed{\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}}$$

Če uporabimo formulo $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ na večih faktorjih, dobimo formulo

$$\boxed{|z^n| = |z|^n}$$

Zadnja formula velja za poljuben eksponent n.

Zgled 4.3: Izračunaj $|z|$, če je $z = (1-2i)^{-2}$.

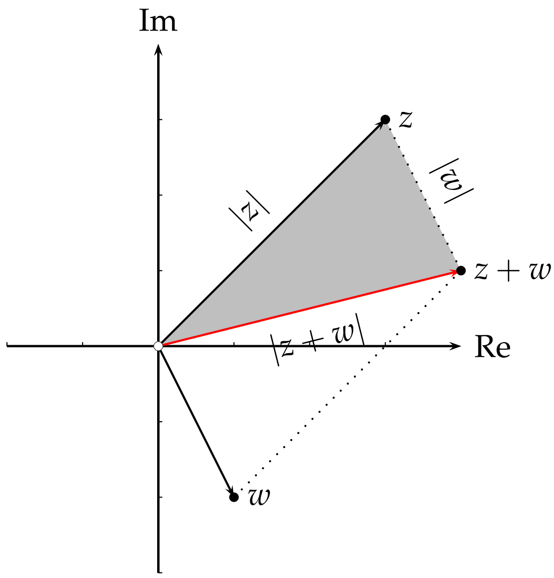
Število z preoblikujemo v algebrsko obliko:

$$z = \frac{1}{(1-2i)^2} = \frac{1}{1-4i+4i^2} = \frac{1}{-3-4i} = \frac{-3+4i}{25}$$

in izračunamo: $|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$.

Nalogo še enostavneje rešimo, če upoštevamo zadnjo lastnost absolutne vrednosti: $|z| = |(1-2i)^{-2}| = |1-2i|^{-2} = \left(\sqrt{1^2+(-2)^2}\right)^{-2} = \sqrt{5}^{-2} = \frac{1}{5}$ ■

trikotniška neenakost



Slika 6: Trikotniška neenakost za absolutno vrednost $|z+w| \leq |z| + |w|$

Za absolutno vrednost vsote dveh kompleksnih števil velja trikotniška neenakost

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$$

Utemeljimo jo dejstvom, da je vsota dolžin dveh stranic trikotnika večja od dolžine tretje stranice trikotnika.

5 Kompleksna števila in polinomi z realnimi koeficienti

V tem razdelku se bomo ukvarjali s polinomi, bolj natačno z njihovimi ničlami, vsi polinomi pa bodo imeli za **koeficiente realna števila**.

Oglejmo si najprej primer kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ničli x_1 in x_2 izračunamo z enačbama

kompleksne ničle kvadratne funkcije

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}}$$

Količina $D = b^2 - 4ac$ je **diskriminanta** kvadratne funkcije. Spomnimo se, da ima v primeru $D > 0$ kvadratna funkcija dve realni ničli, v primeru $D = 0$ eno (dvojno, dvakratno) realno ničlo, v primeru $D < 0$ pa nima realnih ničel, ima pa kompleksne ničle.

Zgled 5.1: Izračunaj diskriminante in rešitve naslednjih kvadratnih enačb : $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x^2 - 3x - 10 = 0$ in $16x^2 - 24x + 25$.

Ničli funkcije $f(x)$ in rešitve (koreni) enačbe $f(x) = 0$ so ista števila. Zato kvadratno enačbo rešimo kar s formulo za ničli. V prvem primeru je $D = 0$ in $x_1 = x_2 = 3$, v drugem primeru je $D = 49$ in rešitvi $x_1 = 5$ ter $x_2 = -2$, ki ju lahko poiščemo tudi z razcepom $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$. V zadnjem primeru je $D = -1024$. Zato je $\sqrt{D} = \sqrt{-1024} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1024} = i \cdot 32 = 32i$. Zato sta rešitvi $x_1 = \dfrac{24+32i}{32} = \dfrac{3}{4} + i$ in $x_2 = \dfrac{24-32i}{32} = \dfrac{3}{4} - i$. ■

V zgledu opazimo, da ima zadnja enačba negativno diskriminanto in dve konjugirani kompleksni rešitvi. To opažanje velja tudi za druge kvadratne enačbe ali funkcije z negativnimi diskriminantami.

Poljubna kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ali ustrezna enačba $ax^2 + bx + c = 0$) z **realnimi** koeficienti in **negativno** diskriminanto ima dve **konjugirani** kompleksni ničli (enačba rešitvi), ki ju izračunamo z običajnima formulama in pri tem upoštevamo, da je $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$.

Zgled 5.2: Zapiši kvadratno enačbo z realnimi koeficienti, ki ima eno rešitev $x_1 = 2 - 3i$ in vodilni koeficient 2.

Ker ima enačba realne koeficiente, kompleksni ničli nastopata v konjugiranem paru, torej, če je $x_1 = 2 - 3i$, je $x_2 = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$. Kvadratno funkcijo in tako tudi enačbo z danima ničlama (rešitvama) zapišemo v ničelni obliki $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$; v našem primeru:

$$2(x-(2-3i))(x-(2+3i)) = 0 \Rightarrow 2((x-2)+3i)((x-2)-3i) = 0 \Rightarrow 2((x-2)^2-9i^2) = 0$$

Zadnjo enačbo z malo truda preuredimo v enačbo: $2x^2 - 8x + 26 = 0$. ■

Spomnimo se nekaj trditev o ničlah polinomov. Tako kot je pri poljubni funkciji število, recimo a, ničla funkcije, je tudi pri polinomu $p(x)$ **ničla** tako število a, da je $p(a) = 0$.

Konec 18.stoletja je nemški matematik Karl Friedrich Gauss dokazal, da ima vsak nekonstanen polinom ničlo, ki je lahko realna ali kompleksna. Iskanje ničel polinomov, ki imajo večjo stopnjo od 2, je zahtevno opravilo. Običajno ničle takih polinomov poiščemo s katero od numeričnih metod (ena med njimi je tudi bisekcija).

Po Gaussu vemo, da ima vsak nekonstantni polinom ničlo (lahko je tudi kompleksna). Z naslednjim postopkom poažemo, da ima polinom toliko ničel kot je njegova stopnja, če upoštevamo, da se lahko ena in ista ničla pojavi večkrat.

Vzemimo, da je število x_1 ničla polinoma $p(x)$. Torej je $p(x_1) = 0$. Polinom p delimo z linearnim polinomom $x - x_1$. Naj bo količnik deljenja polinom $k(x)$, ostanek deljenja pa število o. Potem je:

$$p(x) = k(x) \cdot (x - x_1) + o, \ st(k) = st(p) - 1$$

Očitno je $o = p(x_1)$. Ker pa je $p(x_1) = 0$, je zato $o = 0$ in tako:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot k(x), \ st(k) = st(p) - 1$$

Polinom p smo tako razstavili na produkt dveh polinomov. Ni se težko prepričati, da imata polinoma p in k enaka vodilna koeficienta, recimo.

Gornji postopek ponovimo na polinomu k. Recimo, da smo našli ničlo x_2 polinoma $k(x)$. Potem je:

$$k(x) = (x - x_2) \cdot k_1(x), \ st(k_1) = st(k) - 1$$

Upoštevajmo še razstavljeno obliko polinoma p, pa imamo:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot k_1(x), \ st(k_1) = st(p) - 2$$

Postopek nadaljujemo tako, da poiščemo ničlo x_3 količnika k_1. Ker se stopnje nastalih količnikov $k, k_1, \ldots$ v vsakem koraku zmanjšajo za 1, se postopek v končno korakih konča. Korakov je toliko, kot je stopnja polinoma p. Zadnji količnik je tako konstantni polinom, ki je kar enak vodilnemu koeficientu polinoma p, ker kot smo opazili zgoraj, imajo polinom p in vsi količniki $k, k_1, \ldots$ enake vodilne koeficiente. Z ugotovljenim zapišemo polinom $p(x)$ v **ničelni obliki** ali v **obliki za ničle**:

$$\boxed{p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

V zapisu smo privzeli, da je stopnja polinoma p enaka n, njegov vodilni koeficient pa a. Če se ničla x_1 pojavi večkrat, recimo n_1 krat, združimo vse linearne faktorje $x - x_1$ v obliko $(x - x_1)^{n_1}$. Če tudi za ostale ničle napravimo enako, dobimo drugo ničelno obliko:

$$\boxed{p(x) = a \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{n_m},\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n = st(p)}$$

Vzemimo, da ima polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ realne koeficiente in kompleksno ničlo z. Ker so koeficienti $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_1,\ a_0$ realna števila, so kar enaki svojim konjugiranim vrednostim, torej $\overline{a_k} = a_k$ za poljuben ustrezen indeks k. Ker je z ničla polinoma p, je $p(z) = 0$ in zato $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$. Zadnjo enačbo "konjugiramo";. Upoštevamo lastnosti operacije konjugiranja in dobimo:

$$p(z) = 0 \Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a_n}\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Rightarrow p(\overline{z}) = 0$$

Ker je tudi $p(\overline{z}) = 0$, če je $p(z) = 0$, lahko zapišemo

kompleksne ničle polinoma

Kompleksne ničle polinoma z **realnimi koeficienti** nastopajo v **konjugiranih parih**, torej, če je $a + bi$ kompleksna ničla polinoma, je ničla tudi število $a - bi$.

Preprosta posledica gornje ugotovitve je, da ima jo polinomi lihe stopnje vsaj eno realno ničlo.

Zgled 5.3: Dana je enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Izračunaj koeficiente a, b in c tako, da bosta števili $z_1 = -2 + 3i$ in $z_2 = 1$ rešitvi te enačbe.

Ker ima enačba realne koeficiente, je njena tretja ničla $z_3 = -2 - 3i$. Najenostavneje koeficiente izračunamo tako, da enačbo zapišemo v ničelni obliki, ki jo potem spremenimo v splošno obliko in iz nje preberemo koeficiente a, b in c. Ker je vodilni koeficient enačbe enak 1, je ničelna oblika enačbe $(x - z_2)(x - z_1)(x - z_3) = 0$. Potem je:

$$0 = (x-1)(x-(-2+3i))(x-(-2-3i)) = (x-1)((x+2)-3i)((x+2)+3i) = (x-1)(x^2+4x+13) = x^3+3x^2+9x-13$$

Zato je $a = 3$, $b = 9$ in $c = -13$. ■

6 Nekaj značilnih množic v kompleksni ravnini

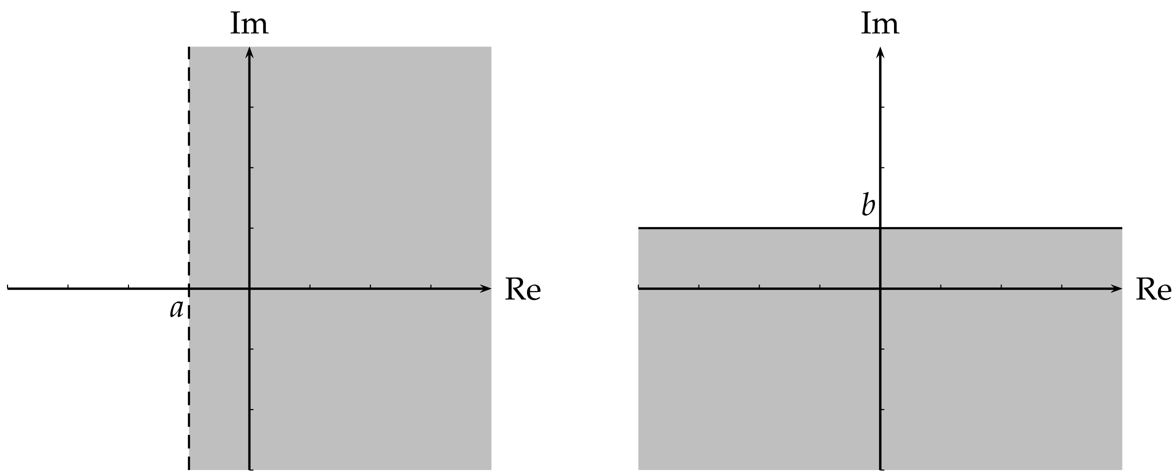
V tem poglavju bomo v kompleksni ravnini predstavili nekaj podmnožic kompleksnih števil. Običajno množico, recimo A, predstavimo v obliki:

$$A = \{z; \text{ pogoj, ki mu ustrezajo števila } z\}$$

Včasih si bomo pri predstavljanju množic kompleksnih števil v kompleksni ravnini pomagamo z običajnim koordinatnim sistemom xy tako, da zamenjamo $\mathrm{Re}(z)$ s koordinato x, $\mathrm{Im}(z)$ pa s koordinato y. Recimo, za množico $A = \{z; \mathrm{Re}(z) > -1\}$ opisana zamenjava pove, da narišemo v koordinatni ravnini vse točke, katerih abscisa x je večja od -1, za množico točk $B = \{z; 2\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > -1\}$ pa opisana zamenjava pravi, da v koordinatni ravnini narišemo vse točke, za katere je $2x + y > -1$ (spodnja polravnina z mejno premico $y = -2x - 1$).

Črte, ki omejujejo množico bomo risali s polno črto, če mejna črta pripada množici, če pa mejne črte ni v množici, jo bomo narisali črtkano.

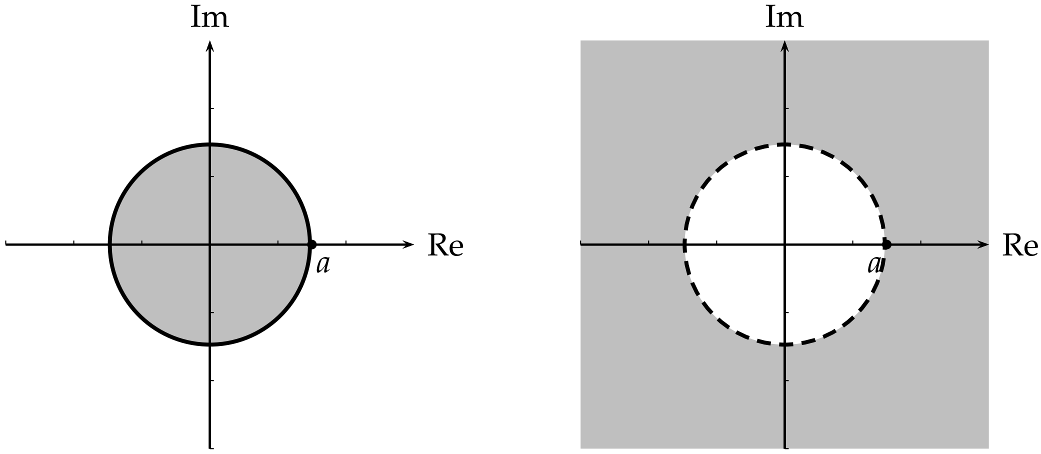
polravnine



Slika 7: Množici $A = \{z; \mathrm{Re}(z) > a\}$ in $B = \{z; \mathrm{Im}(z) \leq b\}$

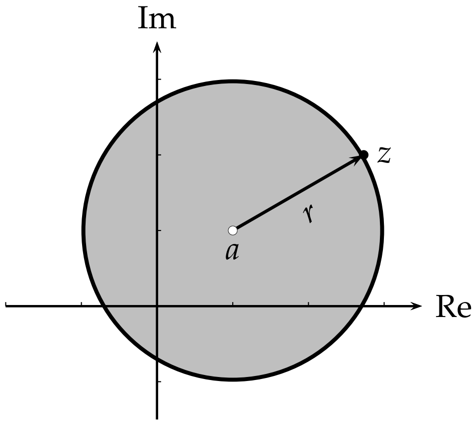
krogi

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je dolžina krajevnega vektorja točke, ki predstavlja to kompleksnoštevilo. Zato kompleksna števila z enako absolutno vrednostjo a ležijo na krožnici s polmerom a in središčem v izhodišču kompleksne ravnine, tista kompleksna števila, ki imajo absolutno vrednost manjšo od a, ležijo v krogu s polmerom a, tista z absolutno vrednostjo večjo od a pa izven kroga s polmerom a.



Slika 8: Množici $\{z;\ |z| \leq a\}$ in $\{z;\ |z| > a\}$

Oglejmo si še kroge, ki imajo središče izven izhodišča. Razliko $z - a$ predstavlja vektor z začetkom v a in koncem v z. Če dolžina $|z - a|$ ne presega velikosti nekega pozitivnega realnega števila r, sestavljajo vse točke, ki predstavljajo z, notranjost kroga s središčem v a in polmerom r, torej množico $\{z; |z - a| < r\}$

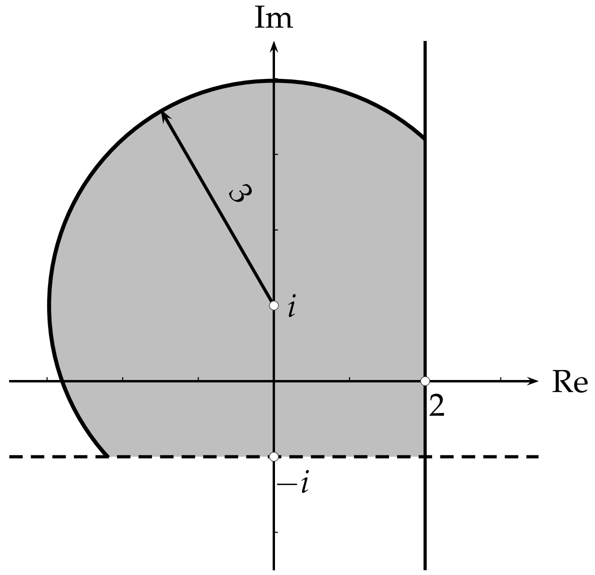


Slika 9: Množica $\{z;\ |z - a| \leq r\}$

Zgled 6.1: Nariši v kompleksni ravnini množico točk (znak $\wedge$ pomeni veznik "in").

$$C = \{z; |z - i| < 3 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) > -1 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$$

Množica je presek treh že poznanih množic: $\{z; |z-i| \leq 3\}$ je krog (z mejo), ki ima središče v točki i (torej v točki $(0,1)$) in polmer 3, množica $\{z; \mathrm{Im}(z) > -1\}$ je polravnina točk, ki imajo imaginarni del ($= y$) večji od -1, zadnja množica, $\{z; \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$ pa je polravnina točk, ki imajo realni del ($= x$) kvečjemu enak 2.



Slika 10: Slika množice $C = \{z; |z-i| < 3 \wedge \mathrm{Im}(z) > -1 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$

■

7 Preproste kompleksne enačbe z eno neznanko

Enačbi, v kateri nastopa kot neznanka kompleksno število, pravimo kompleksna enačba. V tem razdelku bomo reševali preproste primere, ki jih preoblikujemo v sistem dveh realnih enačb. Postopek bo bolj ali manj enak: neznanko z bomo zapisali z dvema realnima neznankama x in y ter potem uporabili definicijo enakosti dveh kompleksnih števil.

Zgled 7.1: Reši enačbo $(2+\imath)z - \overline{z} = 3 - 5i$

Neznanko z zamenjamo z $z = x + yi$. Dobimo : $(2+i)(x+yi) - (x-yi) = 3-5i$. Enačbo uredimo : $(x-y) + (x+3y)i = 3-5i$. Izenačimo realna in imaginarna dela. Pridelamo sistem: $x - y = 3$, $x + 3y = -5$, ki ima rešitev $x = 1, y = -2$. Zato je $z = 1 - 2i$. ■

Zgled 7.2: Reši enačbo $z + |z|^2 = 1 + i$

Spet: $z = x + yi \Rightarrow (x + x^2 + y^2) + yi = 1 + i \Rightarrow y = 1 \wedge x^2 + y^2 + x = 1$. Nastali sistem ima dve rešitvi: $x = 0,\ y = 1$ in $x = -1,\ y = 1$. Zato: $z_1 = -1 + i$ in $z_2 = i$. ■

Zgled 7.3: Reši enačbo $z^2 = \overline{z}$

$z = x + yi \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi \Rightarrow x^2 - y^2 - x = 0 \wedge 2xy = -y$. Drugo enačbo faktoriziramo v $y(2x+1) = 0$. Ločimo dva primera:

1. $y = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 1 \Rightarrow z_1 = 0$ in $z_2 = 1$.
2. $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

■

Zgled 7.4: Reši enačbo $z^2 = 3 - 4i$

$z = x + yi \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i \Rightarrow x^2 - y^2 = 3 \wedge 2xy = -4$.
Obe zadnji enačbi kvadriramo in seštejemo. Pridelamo enačbo:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 25$$

Zadnja enačba ima edino možnost: $x^2 + y^2 = 5$. Skupaj z enačbo $x^2 - y^2 = 3$ sestavlja lahko rešljiv sistem. Njegove rešitve so: $x = \pm 2, y = \pm 1$. Enačba $2xy = -4$ zahteva, da sta x in y nasprotnega znaka. Zato sta rešitvi dve: $x = \pm 2$, $y = \mp 1$ in $z_1 = 2 - i$ ter $z_2 = -2 + i$.
Enačbo $z^2 = 3 - 4i$ lahko preoblikujemo v $z = \sqrt{3 - 4i}$. Rešitvi z_1 in z_2 sta tako kvadratna korena števila $3 - 4i$.