Polinomi in racionalna funkcija

(Interno gradivo)

Sestavil I.K.

2017

Kazalo

Polinomi

1 Definicija polinoma, stopnja, koeficienti, enakost

Vzemimo število $n \in N \cup \{0\}$ (torej je n naravno število ali 0). Izberimo **zaporedje** realnih števil $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Zaporedje števil pomeni, da števila, ki jih izbiramo oštevilčimo, tj., vemo katero je prvo, katero drugo in tako dalje do zadnjega. Običajno pri zaporedjih tistega, ki smo ga izbrali prvega označimo z a_1, tistega, ki smo ga izbrali drugega označimo z a_2 in tako naprej; pri polinomih bo začeli številčili z 0, torej bo prvi člen a_0, drugi a_1 in tako dalje. Zahtevamo, da je zadnje izbrano število različno od 0, torej $a_n \neq 0$. Z izbranimi števili sestavimo funkcijo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x + a_1x + a_0$$

Funkcijo $y = p(x)$ imenujemo **polinom** (polinom = veččlenik, monom = enočlenik ali člen) spremenljivke x. Polinome bomo običajno označevali s črkami p, q, r, o, po potrebi pa še s kako drugo oznako. Števila $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ imenujemo **koeficienti** polinoma, največjo stopnjo v potencah spremenljivke x, torej n, pa imenujemo **stopnja** polinoma. Stopnjo polinoma bomo označevali z **st(p)**, če bomo imeli v mislih polinom p. Med koeficienti imenujemo tistega, ki stoji pri najvišji potenci x, **vodilni koeficient**, tistega, ki je brez potence spremenljivke x $(= x^0 = 1)$, pa imenujemo **prosti člen**, torej:

$$p(x) = \underbrace{a_n}_{\text{vodilni koeficient}} x^{\overset{\text{stopnja}}{n}} + \underbrace{a_{n-1}}_{\text{koeficient}} x^{n-1} + \ldots + \underbrace{a_2}_{\text{koeficient}} x + \underbrace{a_1}_{\text{koeficient}} x + \underbrace{a_0}_{\text{prosti člen}}$$

Zgled 1: **Zapiši stopnjo in koeficiente polinomov $p(x) = -3x^4 - 2x^2 + 2x - 3$ in $q(x) = x^{2013} - 2013x$.**

Polinom p je četrte stopnje in ima od vodilnega do prostega 5 koeficientov: $-3, 0, -2, 2, -3$. Polinom q je 2013 stopnje in ima 2014 koeficientov, ki so od vodilnega do prostega: $1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ -2013,\ 0$. ∎

Nekaj vrst polinomov že poznamo. Polinom stopnje 0 imenujemo **konstantni** polinom, polinom stopnje 1 je **linearni** polinom, polinom stopnje 2 pa **kvadratni** polinom.

Enakost dveh polinomov definiramo takole:

Polinoma $p(x)$ in $q(x)$ sta enaka, če:

1. imata enako stopnjo, torej st(p) = st(q),
2. imata enake enakoležne koeficiente.

"Enakoležna koeficienta" pomeni koeficienta, ki ležita pri enakih potencah spremenljivke.

Zgled 2: Izračunaj števila a, b, c in d tako, da bosta polinoma $h(x) = bx^3 - cx^2 + dx - e$ in $p(x) = ax^4 - 5x^2 + 2x - 3$ enaka.

Ker morata polinoma imeti isto stopnjo, je $a = 0$ in $b = 0$(koeficienta pri x^3). Zaradi enakosti enakoležnih koeficientov je potem $c = 5$(koeficienta pri x^2), $d = 2$ (koeficienta pri x), $e = 3$ (prosta člena). ■

2 Osnovne računske operacije s polinomi

Seštevamo, odštevamo in množimo polinome tako, kot smo to počeli z večleniki v nižjih letnikih.

Zgled 3: Vzemimo, da je $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ in $q(x) = 3x^2 - 5x + 6$. Izračunaj $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$ in $p(x) \cdot q(x)$.

Uporabimo definicije seštevanja, odštevanja in množenja veččlenikov:

$$p(x) + q(x) = 2x^3 - \underline{3x^2} + \underline{\underline{4x}} - 5 + \underline{3x^2} - \underline{\underline{5x}} + 6 = 2x^3 - x + 1$$

$$p(x) - q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 - (3x^2 - 5x + 6) = 2x^3 - \underline{3x^2} + \underline{\underline{4x}} - 5 - \underline{3x^2} + \underline{\underline{5x}} - 6 = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 11$$

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) \cdot (3x^2 - 5x + 6) = 6x^5 - \underline{9x^4} + \underline{\underline{12x^3}} - \overline{15x^2} - \underline{10x^4} + \underline{\underline{15x^3}} - \overline{20x^2} + \overline{\overline{25x}} + \underline{\underline{12x^3}} - \overline{18x^2} + \overline{\overline{24x}} - 30 =$$

$$= 6x^5 - 19x^4 + 39x^3 - 53x^2 + 49x - 30$$

Množenje lahko izvedemo tudi tako, kot je prikazano v naslednji tabeli:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(\ 2x^3 & - & 3x^2 & + & 4x & - & 5\ ) & \cdot & (\ 3x^2 & -\ 5x & +\ 6\ ) \\ \hline
6x^5 & - & 9x^4 & + & 12x^3 & - & 15x^2 & & & & \\
 & - & 10x^4 & + & 15x^3 & - & 20x^2 & + & 25x & & \\
 & & & + & 12x^3 & - & 18x^2 & + & 24x & - & 30 \\ \hline
6x^5 & - & 19x^4 & + & 39x^3 & - & 53x^2 & + & 49x & - & 30
\end{array}$$

■

Zgled 4: Razstavi polinom $p(x) = x^4+4x^3-7x^2-34x-24$ na produkt dveh kvadratnih polinomov tako, da bo eden oblike $x^2 + 6x + a$.

Če naj bo $p(x) = (x^2+6x+a)\cdot q(x)$, mora biti $q(x)$ oblike x^2+bx+c (zakaj?). Potem je

$$p(x) = (x^2 + 6x + a) \cdot (x^2 + bx + c) = x^4 + (b + 6)x^3 + (a + 6b + c)x^2 + (ab + 6c)x + ac$$

Primerjava enakoležnih koeficientov pripelje do naslednjega sistema enačb:

$$b + 6 = 4,\ \ a + 6b + c = -7,\ \ ab + 6c = -34,\ \ ac = -24$$

Sistem ima štiri enačbe in le tri neznanke. Tak sistem pa je rešljiv le, če ustrezna števila za neznanke a, b in c ustrezajo vsem štirim enačbam. Iz prve enačbe ugotovimo, da je $b = -2$. Ostale enačbe postanejo $a + c = 5$, $-a + 3c = -17$, $ac = -24$. Prvi dve enačbi sestavljata navaden sistem dveh linearnih enačb, ki ima rešitev $a = 8$ in $c = -3$. Rešitev ustreza tudi tretji enačbi $ac = -24$. Zato je

$$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24 = (x^2 + 6x + 8) \cdot (x^2 - 2x - 3) \qquad ■$$

Ne preveč težki razmisleki nas pripeljejo do naslednjih ugotovitev:

1. Če imata polinoma, ki ju seštevamo različne stopnje, je vodilni člen vsote enak vodilnemu členu polinoma večje stopnje, če pa imata enako stopnjo, je vodilni člen vsote enak vsoti vodilnih členov. Stopnja vsote ali razlike polinomov torej ne presega večje stopnje seštevancev, torej za polinoma p in q velja: $st(p \pm q) \leq \max\{st(p), st(q)\}$.

2. Prosti člen vsote ali razlike polinomov je enak vsoti ali razliki prostih členov.

3. Vodilni člen produkta je enak produktu vodilni členov, prosti člen produkta pa je enak produktu prostih členov. Stopnja produkta je enaka vsoti stopenj posameznih faktorjev, torej $st(p \cdot q) = st(p) + st(q)$.

Zgled 5: **Naj bo $p(x)$ polinom stopnje 3 z vodilnim koeficientom 2, $q(x)$ pa polinom stopnje 4 z vodilnim koeficientom -3. Če je**

$$k(x) = (2p^2(x) - 3q(x)) \cdot (p(x)q(x) + x + 1)^2$$

poišči stopnjo in vodilni koeficient polinoma $k(x)$.

Uporabimo gornje ugotovitve. Polinom $p^2(x)$ ima vodilni člen $(2x^3)^2 = 4x^6$, zato je vodilni člen polinoma v prvem oklepaju $2 \cdot 4x^6 = 8x^6$. V drugem oklepaju je vodilni člen produkta polinomov $p(x)q(x)$ enak $(2x^3) \cdot (-3x^4) = -6x^7$. To je tudi vodilni člen v oklepaju. Zato je vodilni člen polinoma $(p(x)q(x)+x+1)^2$ enak $(-6x^7)^2 = 36x^{14}$. Vodilni člen polinoma $k(x)$ je potem $(8x^6)\cdot(36x^{14}) = 288x^{20}$. Tako je vodilni koeficient polinoma $k(x)$ enak 288, njegova stopnja pa je enaka 20. ■

3 Deljenje polinomov

Tako kot pri številih, je tudi pri polinomih deljenje obratna operacija množenja. Tudi poimenovanja privzemimo taka, kot pri deljenju števil. Če torej polinom $p(x)$ (**deljenec**) delimo s polinomom $q(x)$ (**delitelj**) in je rezultat deljenja polinom $k(x)$ (**količnik**), velja:

$$p(x) : q(x) = k(x) \Leftrightarrow p(x) = k(x) \cdot q(x)$$

Kako poiskati količnik deljenja? Ena od poti je pokazana na naslednjem primeru.

Zgled 6: Izračunaj količnik pri deljenju polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ s polinomom $q(x) = x^2 - 4x + 4$.

Če naj bo $p(x) : q(x) = k(x)$, je $p(x) = k(x) \cdot q(x)$. Zato ima $k(x)$ obliko $x + a$. Množenje $(x + a) \cdot (x^2 - 4x + 4)$ in primerjava enakoležnih koeficientov nam dá predimenzioniran sistem enačb (preveč enačb glede na število neznank):

$$a - 4 = -6, \; -4a + 4 = 12, \; 4a = -8$$

Spomnimo se, da je sistem rešljiv, če izračunane neznanke ustrezajo vsem enačbam sistema. V našem primeru je sistem rešljiv z vrednostjo neznanke $a = -2$. Zato je polinom $p(x)$ deljiv s polinomom $x^2 - 4x + 4$ in je količnik $x - 2$. ■

Pri reševanju zadnjega primera opazimo, da deljenje dveh polinomov ni vedno izvedljivo. Če na zgoraj opisani način delimo polinom $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ s polinomom $x^2 - 4x + 4$, dobimo za količnik $x + a$ sistem enačb

$$a - 4 = -6, \; -4a + 4 = 12, \; 4a = -9,$$

ki pa ni rešljiv. Prvima dvema enačbama sicer ustreza $a = -2$, ne ustreza pa zadnji enačbi. Na podoben problem smo naleteli pri deljenju celih števil. Tudi tam deljenje ni vedno izvedljivo. Problem smo rešili tako, da smo dodali ostanek in zapisali osnovni izrek o deljenju celih števil: Za poljubni celi števili a in $b \neq 0$ obstajata natanko določeni celi števili k (količnik) in o (ostanek), da velja:

$$a = k \cdot b + o, \; o < b \quad \text{ali} \quad a : b = k, \text{ ost.} o, \; o < b$$

Podoben izrek velja tudi za polinome. Pravimo mu **osnovni izrek o deljenju polinomov**:

Za poljubna polinoma $p(x)$ in $q(x)$ obstajata natanko določena polinoma $k(x)$ (količnik) in $o(x)$ (ostanek), da velja:

1. $p(x) = k(x) \cdot q(x) + o(x)$,
2. $st(o) < st(q)$.

Kako poiščemo količnik in ostanek, bomo pokazali na primeru deljenja

$$(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x^2 - 2x - 2)$$

1. Ker je vodilni člen produkta enak produktu vodilnih členov, v prvem koraku deljenja delimo vodilni člen deljenca z vodilnim členom delitelja, torej:

$$\overbrace{(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8)}^{p} \quad : \quad \overbrace{(x^2 - 2x - 2)}^{q} \quad = \quad \overbrace{2x^2 + \ldots}^{trenutni\ k}$$

2. V naslednjem koraku izračunamo razliko polinoma p in produkta delitelja s trenutnim količnikom, torej $p - k \cdot q$ (v zapisu smo dejansko računali $p + (-k \cdot q)$):

$$\begin{array}{rcccl}
(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8) & : & (x^2 - 2x - 2) & = & 2x^2 + \ldots \\
\underline{-2x^4 + 4x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & & & & \\
\underbrace{x^3 + 8x^2 - 6x + 8}_{razlika\ p-k\cdot q} & & & &
\end{array}$$

3. Razlika $p - k \cdot q$ postane novi deljenec. Na njem ponovimo postopek iz prvega koraka, torej izračunamo količnik vodilnega člena novega deljenca in vodilnega člena delitelja; dobljeni količnik dodamo k prejšnjemu količniku:

$$\begin{array}{rcccl}
(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8) & : & (x^2 - 2x - 2) & = & 2x^2 + x \ldots \\
\underline{-2x^4 + 4x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & & & & \\
x^3 + 8x^2 - 6x + 8 & & & &
\end{array}$$

4. Ponovimo drugi korak. Z dobljenim količnikom ($=x$) pomnožimo delitelj in dobljeni produkt odštejemo od trenutnega deljenca:

$$\begin{array}{rcccl}
(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8) & : & (x^2 - 2x - 2) & = & 2x^2 + x \ldots \\
\underline{-2x^4 + 4x^3 + 4x^2 \qquad\qquad} & & & & \\
x^3 + 8x^2 - 6x + 8 & & & & \\
\underline{-x^3 + 2x^2 + 2x \qquad} & & & & \\
10x^2 - 4x + 8 & & & &
\end{array}$$

5. Postopek ponovimo na novem deljencu ($= 10x^2 - 4x + 8$). Na koncu je novi deljenec ($= 16x + 28$) nižje stopnje od delitelja, zato se deljenje konča. Količnik deljenja je polinom $k(x) = 2x^2 + x + 10$, ostanek $o(x)$ pa je polinom $16x + 28$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8) \quad : \quad (x^2 - 2x - 2) \quad = \quad 2x^2 + x + 10, \; ost.\; 16x + 28 \\
\underline{-2x^4 + 4x^3 + 4x^2} \\
\qquad\quad x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \\
\qquad\; \underline{-x^3 + 2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad 10x^2 - 4x + 8 \\
\qquad\quad \underline{-10x^2 + 20x + 20} \\
\qquad\qquad\qquad 16x + 28
\end{array}
$$

Zgoraj opisani postopek (=algoritem) ponavljamo, dokler je stopnja trenutnega deljenca vsaj enaka stopnji delitelja. Ker pa se v vsakem koraku stopnja trenutnega deljenca zmanjša vsaj za 1, se postopek konča v končno korakih.

4 Hornerjev algoritem

Vzemimo polinom $p(x) = 3x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 13$. Recimo, da moramo izračunati vrednost polinoma za $x = 2$, torej $p(2)$. Pri računanju vrednosti $p(2)$ preštejmo število računskih operacij, ki jih pri tem opravimo:

1. Za izračun člena $3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ uporabimo 5 množenj, za izračun člena $6 \cdot 2^4 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$ uporabimo 4 množenja, za člen $5 \cdot 2^3 = \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$ so potrebna 3 množenja, za člen $11 \cdot 2^2 = 11 \cdot 2 \cdot 2 = 44$ porabimo 2 množenji, za člen $12 \cdot 2 = 24$ pa le eno množenje. Skupno je vseh množenj $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

2. Seštevanj je 5: $3 \cdot 2^5 - 6 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 11 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 13 = 96 - 96 - 40 + 44 - 24 + 13 = -7$

Skupno je vseh računskih operacij $15 + 5 = 20$. Premislek nam pove, da je pri računanju vrednosti polinoma 100 stopnje potrebujemo

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + \ldots + (51 + 50) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

množenj in še 100 seštevanj ali odštevanj. S podobnim sklepanjem bi ugotovili, da v primeru polinoma, ki ima stopnjo n, za izračun vrednosti polinoma pri dani vrednosti spremenljivke x potrebujemo $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2} + n = \dfrac{n \cdot (n+3)}{2}$ računskih operacij.

Če dodamo še, da elektronski računalnik za vsako množenje porabi "nekaj" seštevanj, je računanje vrednosti polinoma na tak način (vstavljanje vrednosti spremenljivke v enačbo polinoma) zelo zamudno (kvadratna časovna zahtevnost). Zato se bomo omislili drugačnega načina računanja vrednosti polinoma. Za začetek naš polinom $p(x)$ preoblikujmo z zaporednim izpostavljanjem:

$$p(x) = 3x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 13 = x \cdot (3x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 11x - 12) + 13 =$$
$$= x \cdot (x \cdot (3x^3 - 6x^2 - 5x + 11) - 12) + 13 = x \cdot (x \cdot (x \cdot (3x^2 - 6x - 5) + 11) - 12) + 13 =$$
$$= x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot (3 \cdot x - 6) - 5) + 11) - 12) + 13$$

V tako zapisanem polinomu porabimo za izračun vrednosti $p(2)$ le 5 množenj (prej 15) in 5 seštevanj ali odštevanj:

$$p(2) = 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(3\cdot2-6)-5)+11)-12)+13 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot(2\cdot(6-6)-5)+11)-12)+13 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot(-5)+11)-12)+13 = 2\cdot(2\cdot(-10+11)-12)+13 =$$
$$= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 12) + 13 = 2 \cdot (2 - 12) + 13 = 2 \cdot (-10) + 13 = -20 + 13 = -7$$

Zadnji račun lepše zapišemo s tabelo, ki jo imenujemo **Hornerjeva shema** (po angleškem matematiku W. G. Hornerju). Shema je sestavljena iz treh vrstic in dveh stolpcev, od katerih je prvi ožji od drugega:

Računski postopek, ki nas pripelje do izračuna vrednosti $p(2)$ v Hornerjevi shemi, imenujemo **Hornerjev algoritem**. V drugi stolpec prve vrstice zapišemo koeficienta polinoma od vodilnega proti prostemu, tudi tiste, ki so enaki 0. V prvi stolpec druge vrstice zapišemo število pri katerem računamo vrednost polinoma. Na začetek drugega stolpca tretje vrstice pripišemo vodilni koeficient polinoma. V našem primeru dobimo naslednjo shemo:

	3	-6	-5	11	-12	13
2						
	3					

V zadnjem računanju vrednosti $p(2)$ smo najprej pomnožili vodilni koefiecient z vrednostjo spremenljivke x, torej $3 \cdot 2 = 6$, dobljenemu produktu pa smo prišteli naslednji koeficient polinoma, to je -6. V tabeli izračunan produkt zapišemo v srednjo vrstico pod ustrezen koeficient in obe števili seštejemo. Vsoto zapišemo pod njiju v tretjo vrstico.

	3	-6	-5	11	-12	13
2		6				
	3	0				

Postopek ponovimo, torej dobljeno vsoto pomnožimo z 2, ustrezen zmnožek podpišemo pod naslednji koeficient polinoma in podpisani števili seštejemo in vsoto spet zapišemo po njima v tretji vrstici. Vsoto spet pomnožimo z 2 in nadaljujemo po enakem vzorcu do konca tabele.

	3	-6	-5	11	-12	13
2		6	0	-10	2	-20
	3	0	-5	1	-10	-7

Zadnje število v tabeli je vrednost polinoma pri $x = 2$. Seveda v Hornerjevo shemo zapisujemo le števila, brez puščic. Prečiščena shema je v našem primeru:

	3	-6	-5	11	-12	13
2		6	0	-10	2	-20
	3	0	-5	1	-10	$\Vert -7$

Oglejmo si še eno uporabo Hornerjevega algoritma. V prejšnjem poglavju smo se naučili deliti polinome. Z naučenim postopkom delimo polinom $p(x) = 3x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 13$ s polinomom $q(x) = x - 2$. Po kratkem računu dobimo:

$$p(x) : q(x) = (3x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 13) : (x - 2) = 3x^4 - 5x^2 + x - 10,\ ost. -7$$

Torej je količnik deljenje polinom $k(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 10$ in ostanek konstanten polinom $o(x) = -7$. Če pogledamo v tretjo vrstico naše Hornerjeve sheme opazimo, da je zadnje število v shemi ($= -7$) ostanek deljenja, števila pred njim pa so po vrsti koeficienti količnika. Kar smo ugotovili v posebnem primeru velja tudi v splošnem:
Če delimo polinom $p(x)$ z linearnim polinomom $x - a$, lahko količnik in ostanek izračunamo s Hornerjevim algoritmom tako, kot je prikazano v spodnji tabeli:

	koeficienti polinoma $p(x)$, deljenec								
$\boxed{a}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\dots$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	koeficienti polinoma $k(x)$, količnik							$\Vert$	$p(a)$, ostanek

Povzemimo:

Hornerjev algoritem lahko uporabljamo za izračun vrednosti polinoma pri dani vrednosti spremenljivke, torej za izračun $p(a)$, lahko pa ga uporabljamo tudi za deljenje polinoma $p(x)$ z linearnim polinomom $x - a$.

Zgled 7: Izračunaj količnik in ostanek pri deljenju $(x^8 + 2x + 1) : (x + 1)$.

Deljenje napravimo s Hornerjevim algoritmom:

	1	0	0	0	0	0	0	2	1
-1		-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	$\Vert 0$

Iz tabele preberemo, da je količnik $k(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$ in ostanek $o = 0$. ■

5 Ničle polinomov

Tako kot je pri poljubni funkciji število, recimo a, ničla funkcije, je tudi pri polinomu $p(x)$ **ničla** tako število a, da je $p(a) = 0$.

Konstantni polinom nima ničel razen, če je konstanta enaka 0. Linearni polinom $p(x) = ax + b$ ima ničlo $-\frac{b}{a}$, kvadratni polinom $p(x) = ax^2 + bx + c$ ima ničli $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, če je diskriminanta $D \geq 0$, če pa je $D < 0$, ima polinom kompleksne ničle.Mi se bomo ukvarjali le z realnimi ničlami, kompleksnih ničel ne bomo upoštevali.

Konec 18.stoletja je nemški matematik Karl Friedrich Gauss dokazal, da ima vsak nekonstanen polinom ničlo, ki je lahko realna ali kompleksna. Iskanje ničel polinomov, ki imajo večjo stopnjo od 2, je zahtevno opravilo. Običajno ničle takih polinomov poiščemo s katero od numeričnih metod (ena med njimi je tudi bisekcija).

Po Gaussu vemo, da ima vsak nekonstantni polinom ničlo (lahko je tudi kompleksno število). Z naslednjim postopkom bomo pokazali, da ima polinom toliko ničel kot je njegova stopnja, če upoštevamo, da se lahko ena in ista ničla pojavi večkrat.

Vzemimo, da je število x_1 ničla polinoma $p(x)$. Torej je $p(x_1) = 0$. Polinom p delimo z linearnim polinomom $x - x_1$. Naj bo količnik deljenja polinom $k(x)$, ostanek deljenja pa število o. Potem je:

$$p(x) = k(x) \cdot (x - x_1) + o, \ st(k) = st(p) - 1$$

Očitno je $o = p(x_1)$. Ker pa je $p(x_1) = 0$, je zato $o = 0$ in tako:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot k(x), \ st(k) = st(p) - 1$$

Polinom p smo tako razstavili na produkt dveh polinomov. Ni se težko prepričati, da imata polinoma p in k enaka vodilna koeficienta, recimo.

Gornji postopek ponovimo na polinomu k. Recimo, da smo našli ničlo x_2 polinoma $k(x)$. Potem je:

$$k(x) = (x - x_2) \cdot k_1(x), \ st(k_1) = st(k) - 1$$

Upoštevajmo še razstavljeno obliko polinoma p, pa imamo:

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot k_1(x), \ st(k_1) = st(p) - 2$$

Postopek nadaljujemo tako, da poiščemo ničlo x_3 količnika k_1. Ker se stopnje nastalih količnikov $k, k_1, \ldots$ v vsakem koraku zmanjšajo za 1, se postopek v končno korakih konča. Korakov je toliko, kot je stopnja polinoma p. Zadnji količnik je tako konstantni polinom, ki je kar enak vodilnemu koeficientu polinoma p, ker kot smo opazili zgoraj, imajo polinom p in vsi količniki $k, k_1, \ldots$ enake vodilne koeficiente. Z ugotovljenim zapišemo polinom $p(x)$ v **ničelni obliki** ali v **obliki za ničle**:

$$\boxed{p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}$$

V zapisu smo privzeli, da je stopnja polinoma p enaka n, njegov vodilni koeficient pa a. Če se ničla x_1 pojavi večkrat, recimo n_1 krat, združimo vse linearne faktorje $x - x_1$ v obliko $(x - x_1)^{n_1}$. Če tudi za ostale ničle napravimo enako, dobimo drugo ničelno obliko:

$$\boxed{p(x) = a \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{n_m},\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n = st(p)}$$

Zgled 8: Zapiši polinom $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 2x + 12$ v ničelni obliki, če veš, da so tri njegove ničle $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ in $x_3 = -3$.

Količnike deljenj, ki so opisana v zgornjem razmišljanju, poiščemo s Hornerjevim algoritmom. Najprej deljenje s polinomom $x - 1$:

	1	2	−5	−8	−2	12
1		1	3	−2	−10	−12
	1	3	−2	−10	−12	$\|0$

Torej je $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 2x + 1 = (x - 1) \cdot (x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12)$. V drugem koraku upoštevamo, da je $x_2 = 2$ tudi ničla količnika $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$. Spet uporabimo Hornerjev algoritem:

	1	3	−2	−10	−12
2		2	10	16	12
	1	5	8	6	$\|0$

Postopek ponovimo z ničlo $x_3 = -3$ na polinomu $x^3 + 5x^2 + 8x + 6$:

	1	5	8	6
−3		−3	−6	−6
	1	2	2	$\|0$

Torej je: $p(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 2x + 2)$. ■

Kvadratni polinom $x^2 + 2x + 2$ ima negativno diskriminanto ($D = -4$), zato nima realnih ničel, ima pa dve kompleksni ničli. Zapis gornjem primeru je podlaga za tretjo obliko ničelno obliko polinoma. V njej so zapisane samo realne ničle, kompleksne pa so skrite v kvadratnih polinomih z negativnimi diskriminantami:

$$\boxed{p(x) = a \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_1 x + b_1))^{k_1} \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^{k_2}}$$

Vsota vseh eksponentov, ki nastopajo v zapisu, je enaka stopnji polinoma, torej

$$n_1 + n_2 + \ldots + k_1 + k_2 + \ldots = n = st(p)$$

Zgled 9: Zapiši polinom četrte stopnje, ki ima ničlo pri $x = -1$, pri $x = 2$ pa ima ničlo tretje stopnje. Za $x = 1$ ima polinom vrednost 1.

Uporabimo ničelno obliko: $p(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^3$ Izračunati moramo še vodilni koeficient a. Ker je $p(1) = 1$, je

$$1 = a \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 2)^3 \Rightarrow 1 = -2a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Torej je $p(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^3$, v splošni obliki (odpravimo oklepaje) pa je $p(x) = -\frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{2} - 3x^2 - 2x + 4$. ■

Skoraj vsi polinomi, ki nas bodo zanimali, imajo cele koeficiente. Oglejmo si, kako lahko poiščemo njihove **"lepe" ničle**, torej **cele ničle** ali **racionalne ničle** (ulomke).

Zgled 10: Poišči cele ničle polinoma $p(x) = 6x^3 - 25x^2 + 2x + 8$.

Recimo, da je celo število n njegova ničla. Torej je

$$6n^3 - 25n^2 + 2n + 8 = 0 \Rightarrow 8 = n \cdot (-6n^2 + 25n - 2)$$

Desna stran zadnje enačbe je večkratnik števila n. Zato, in ker je enaka 8, je število n delitelj števila 8. Torej so možne cele ničle našega polinoma števila $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Z malo truda s Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da je ničla $x_1 = 4$.

	6	−25	2	8
4		24	−4	−8
	6	−1	−2	‖0

Ostali ničli, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, poiščemo v enačbi $6x^2 - x - 2 = 0$. ■

Zgled 11: **Poišči racionalne ničle polinoma $p(x) = 24x^3 + 10x^2 - 13x - 6$.**

Recimo, da je $\frac{m}{n}$ racionalna ničla tega polinoma. Privzemimo, da je ulomek okrajšan, torej je $D(m,n) = 1$. Potem je

$$24\frac{m^3}{n^3} + 10\frac{m^2}{n^2} - 13\frac{m}{n} - 6 = 0 \;\Rightarrow\; 24m^3 + 10m^2n - 13mn^2 - 6n^3 = 0$$

Prvi trije členi zadnje enačbe so deljivi z m, zato mora biti tudi zadnji člen $6n^3$ deljiv z m. Ker z n ni deljiv z m ($D(m,n) = 1$), mora biti z m (števec) delitelj števila 6, torej prostega člena polinoma. Podobno pokažemo, da mora biti n (imenovalec) delitelj vodilnega koeficienta polinoma, torej števila 24. Zapišimo možne "lepe" ničle:

cele ničle (množica $\mathbb{Z}$): $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

racionalne ničle (množica $\mathbb{Q}$): $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{1}{12},$

Ničle bomo spet ugotavljali s Hornerjevim algoritmom. Preizkus s celimi ničlami ne prinese uspeha, zato poskusimo z racionalnimi ničlami, začnimo z $\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 24 & 10 & -13 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & & 12 & 11 & -1 \\ \hline & 24 & 22 & -2 & \| -7 \end{array}$$

Torej $\frac{1}{2}$ ni ničla. Pri velikem številu možnih ničel moramo imeti malce sreče z ugibanjem. Poskusimo s $\frac{3}{4}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 24 & 10 & -13 & -6 \\ \hline \frac{3}{4} & & 18 & 21 & 6 \\ \hline & 24 & 28 & 8 & \| 0 \end{array}$$

Ugotovili smo, da je $x_1 = \frac{3}{4}$. Ostale ničli, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$ dobimo v enačbi $24x^2 + 28x + 8 = 0$, še lažje pa v okrajšani enačbi $6x^2 + 7x + 2 = 0$. ■

Če ima polinom $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ celoštevilčne koeficiente, so kandidati za

- **celoštevilčne** ničle **delitelji prostega člena** $(x_i | a_0)$,
- **racionalne ničle**, tisti okrajšani ulomki katerih **števec deli prosti člen**, **imenovalec** pa **deli vodilni koeficient** (za ničlo $\frac{m}{n}$ velja: $m|a_0$ in $n|a_n$).

6 Kompleksna števila in polinomi z realnimi koeficienti

V tem razdelku se bomo ukvarjali s polinomi, bolj natačno z njihovimi ničlami, vsi polinomi pa bodo imeli za **koeficiente realna števila**.
Oglejmo si najprej primer kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ničli x_1 in x_2 izračunamo z enačbama

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}}$$

Količina $D = b^2 - 4ac$ je **diskriminanta** kvadratne funkcije. Spomnimo se, da ima v primeru $D > 0$ kvadratna funkcija dve realni ničli, v primeru $D = 0$ eno (dvojno, dvakratno) realno ničlo, v primeru $D < 0$ pa nima realnih ničel, ima pa kompleksne ničle.

Zgled 12: Izračunaj diskriminante in rešitve naslednjih kvadratnih enačb : $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x^2 - 3x - 10 = 0$ **in** $16x^2 - 24x + 25$.

Ničli funkcije $f(x)$ in rešitve (koreni) enačbe $f(x) = 0$ so ista števila. Zato kvadratno enačbo rešimo kar s formulo za ničli. V prvem primeru je $D = 0$ in $x_1 = x_2 = 3$, v drugem primeru je $D = 49$ in rešitvi $x_1 = 5$ ter $x_2 = -2$, ki ju lahko poiščemo tudi z razcepom $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$. V zadnjem primeru je $D = -1024$. Zato je $\sqrt{D} = \sqrt{-1024} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1024} = i \cdot 32 = 32i$. Zato sta rešitvi $x_1 = \dfrac{24+32i}{32} = \dfrac{3}{4} + i$ in $x_2 = \dfrac{24-32i}{32} = \dfrac{3}{4} - i$. ■

V zgledu opazimo, da ima zadnja enačba negativno diskriminanto in dve konjugirani kompleksni rešitvi. To opažanje velja tudi za druge kvadratne enačbe ali funkcije z negativnimi diskriminantami.

Poljubna kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ali ustrezna enačba $ax^2 + bx + c = 0$) z **realnimi** koeficienti in **negativno** diskriminanto ima dve **konjugirani** kompleksni ničli (enačba rešitvi), ki ju izračunamo z običajnima formulama in pri tem upoštevamo, da je $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$.

Zgled 13: **Zapiši kvadratno enačbo z realnimi koeficienti, ki ima eno rešitev $x_1 = 2 - 3i$ in vodilni koeficient 2.**

Ker ima enačba realne koeficiente, kompleksni ničli nastopata v konjugiranem paru, torej, če je $x_1 = 2 - 3i$, je $x_2 = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$. Kvadratno funkcijo in tako tudi enačbo z danima ničlama (rešitvama) zapišemo v ničelni obliki $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$; v našem primeru:

$$2(x-(2-3i))(x-(2+3i)) = 0 \Rightarrow 2((x-2)+3i)((x-2)-3i) = 0 \Rightarrow 2((x-2)^2-9i^2) = 0$$

Zadnjo enačbo z malo truda preuredimo v enačbo: $2x^2 - 8x + 26 = 0$. ■

Spomnimo se nekaj trditev o ničlah polinomov. Tako kot je pri poljubni funkciji število, recimo a, ničla funkcije, je tudi pri polinomu $p(x)$ **ničla** tako število a, da je $p(a) = 0$.

Vzemimo, da ima polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ realne koeficiente in kompleksno ničlo z. Ker so koeficienti a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 realna števila, so kar enaki svojim konjugiranim vrednostim, torej $\overline{a_k} = a_k$ za poljuben ustrezen indeks k. Ker je z ničla polinoma p, je $p(z) = 0$ in zato $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$. Zadnjo enačbo "konjugiramo". Upoštevamo lastnosti operacije konjugiranja in dobimo:

$$p(z) = 0 \Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a_n z}^n + \overline{a_{n-1} z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0 \Rightarrow p(\overline{z}) = 0$$

Ker je tudi $p(\overline{z}) = 0$, če je $p(z) = 0$, lahko zapišemo

Kompleksne ničle polinoma z **realnimi koeficienti** nastopajo v **konjugiranih parih**, torej, če je $a + bi$ kompleksna ničla polinoma, je ničla tudi število $a - bi$.

Preprosta posledica gornje ugotovitve je, da ima jo polinomi lihe stopnje z realnimi koeficienti vsaj eno realno ničlo.

Zgled 14: **Dana je enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$. Izračunaj koeficiente a, b in c tako, da bosta števili $z_1 = -2 + 3i$ in $z_2 = 1$ rešitvi te enačbe.**

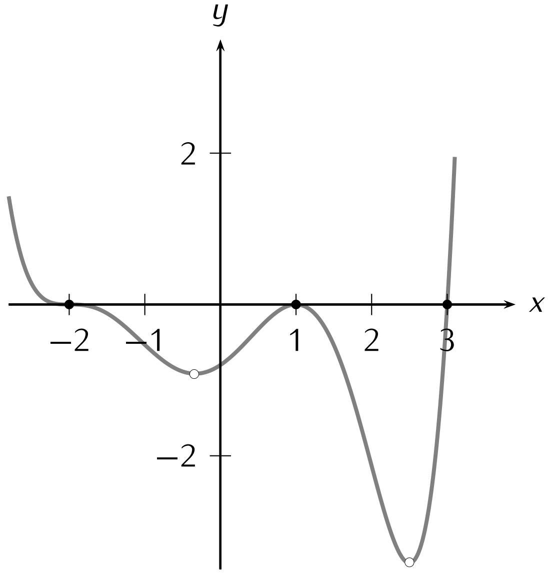
Ker ima enačba realne koeficiente, je njena tretja ničla $z_3 = -2 - 3i$. Najenostavneje koeficiente izračunamo tako, da enačbo zapišemo v ničelni obliki, ki jo potem spremenimo v splošno obliko in iz nje preberemo koeficiente a, b in c. Ker je vodilni koeficient enačbe enak 1, je ničelna oblika enačbe $(x - z_2)(x - z_1)(x - z_3) = 0$. Potem je:

$$0 = (x-1)(x-(-2+3i))(x-(-2-3i)) = (x-1)((x+2)-3i)((x+2)+3i) = (x-1)(x^2+4x+13) = x^3+3x^2+9x-13$$

Zato je $a = 3$, $b = 9$ in $c = -13$. ■

7 Graf polinoma

Spodnjo sliko smo narisali s pomočjo računalnika. Prikazuje graf polinoma in njegove značilne točke.



Slika 1: Graf polinoma $p(x) = \frac{1}{30}(x-1)^2(x+2)^3(x-3)$

Seveda nam bo natančne grafe narisal kakšen računalniški program, mi pa se bomo v tem poglavju naučili narisati približen graf danega polinoma. Graf polinoma bomo risali tako, da bomo:

1. Poiskali **značilne točke** polinoma:
   (a) ničle,
   (b) **stacionarne točke**: minimum, maksimum, sedlo,
   (c) **začetna vrednost**.
2. Raziskali obnašanje polinoma na **robu definicijskega območja**, kar je pri polinomih pri zelo velikih pozitivnih in zelo velikih negativnih vrednostih spremenljivke x.

Tipi ničel

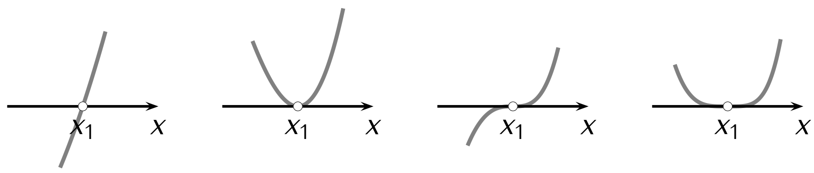
Realne ničle polinoma poiščemo s katero od metod, ki so opisane v prejšnjih poglavjih. Polinom zapišimo v ničelni obliki:

$$p(x) = a \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{n_m}$$

Oglejmo si dogajanje v bli"nji okolici ničle x_1. V taki okolici je razlika $x - x_1$ zelo majhna. Če je $x < x_1$, je razlika $x - x_1$ negativna, če je $x > x_1$, je razlika $x - x_1$ pozitivna. Pravimo tudi, da se je pri prehodu prek ničle x_1 vrednost razlike $x - x_1$ spremenila.

Pri ničli **lihe stopnje** ($n_1 = 1, 3, , 5, \ldots$), se pri prehodu iz ene strani ničle na drugo stran ničle predznak izraza $(x - x_1)^{n_1}$ spremeni, zato graf polinoma pri taki ničli **seka** abscisno os.

Pri prehodu prek ničle **sode stopnje** $n_1 = 2, 4, , 6, \ldots$) se predznak izraza $(x - x_1)^{n_1}$ ne spremeni, zato se v taki ničli graf polinoma **dotakne** abscisne osi (pravimo tudi, da se odbije od abscisne osi).



1. stopnja 2. stopnja 3. stopnja 4. stopnja

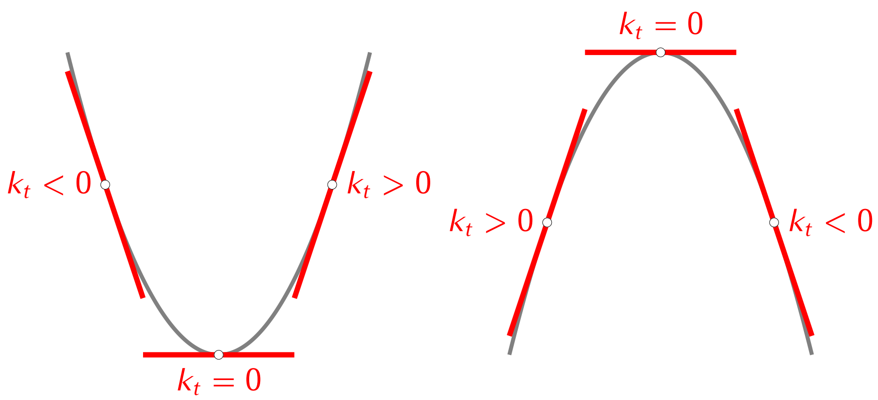
Stacionarne točke

Stacionarne točke bomo podrobneje obravnavali pri poglavju o odvodu, zaenkrat jih samo opišimo. Prvi dve vrsti imenujemo **ekstrema**:

1. **Maksimum** je točka, v kateri polinom doseže lokalno (v bližnji okolici) **največjo vrednost**.
2. **Minimum**je točka, v kateri polinom doseže lokalno (v bližnji okolici) **najmanjšo vrednost**.

Spomnimo se, da je tangenta na krožnico premica, ki se dotika krožnice v točki, ki jo imenujemo dotikališče. Podobno imenujemo **tangenta na graf polinoma** premico, ki se **"dotika"** grafa v točki, ki jo tudi v tem primeru imenujemo **dotikališče**.

V četrtem letniku bomo pokazali, da je **smerni koeficient tangente** (k_t) v dotikališču enak odvodu funkcije v dotikališču. Pri polinomih je odvod polinoma $p(x)$ nov polinom, ki ga označimo z $p'(x)$. Odvod izračunamo tako, da prosti člen polinoma $p(x)$ izbrišemo, poljuben drug člen, recimo $a_k x^k$, pa postane člen $k a_k x^{k-1}$. Tako je odvod polinoma $p(x) = x^4 - 2x^2 - 8x + 2$ enak polinomu $p'(x) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} - 8 \cdot x^{1-1} = 4x^3 - 4x - 8$.



Slika 2: Obnašanje smernega koeficienta k_t okoli minimuma in maksimuma

Če dotikališče tangente premikamo po grafu polinoma opazimo, da je tangenta v nekaterih točkah grafa **vzporedna** abscisni osi. Take točke na grafu imenujemo **stacionarne točke**. V njih je smerni koeficient tangente k_t **enak 0**.
V zadni trditvi pa je že skrit recept za iskanje stacionarnih točk: izračunamo odvod polinoma, ga izenačimo z 0 in rešimo nastalo polinomsko enačbo.

Zgled 15: Poiščimo stacionarne točke polinoma $p(x) = x^3 - 3x - 2$.

Po gornjih navodilih izračunamo odvod polinoma: $p'(x) = 3x^2 - 3$. Nato rešimo enačbo $p'(x) = 0$, torej $3x^2 - 3 = 0$. Rešitvi sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Ustrezni vrednosti ordinat (y) izračunamo tako, da izračunani vrednosti vstavimo v enačbo polinoma; dobimo $y_1 = -4$ in $y_2 = 0$. Stacionarni točki sta tako $S_1(1, -4)$ in $S_2(-1, 0)$. ■

Obnašanje polinoma na robu definicijskega območja

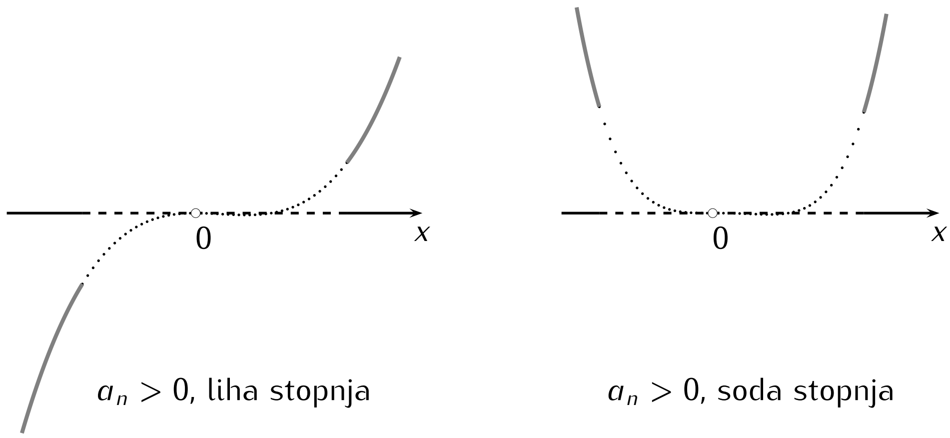
Vzemimo polinom $p(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 3$ in na njegovi desni izpostavimo vodilni člen. Dobimo:

$$p(x) = 4x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^4}\right)$$

Za velike absolutne vrednosti spremenljivke x, torej za velike vrednosti $|x|$, se vrednost izraza v oklepaju zelo malo razlikuje od 1, zato se za velike vrednosti $|x|$ vrednost polinoma $p(x)$ zelo malo razlikuje od vodilnega člena $4x^4$. Ugotovljeno velja tudi v splošnem:

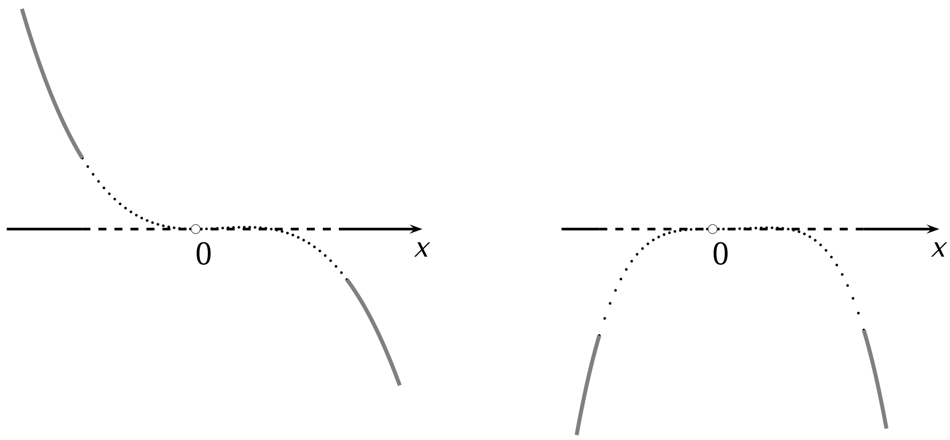
Za velike absolutne vrednosti spremenljivke x se vrednost polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ zelo malo razlikuje od vrednosti vodilnega člena $a_n x^n$, torej je za velike vrednosti $|x|$: $p(x) \approx a_n x^n$

Graf polinoma $y = a_n x^n$ je odvisen od vodilnega koeficienta in stopnje polinoma. Ločimo štiri različne oblike. Prvi dve nastaneta pri pozitivnem vodilnem koeficientu. Na sliki je s prekinjeno črto označen del polinoma v okolici izhodišča:



$a_n > 0$, liha stopnja $\qquad$ $a_n > 0$, soda stopnja

Naslednji sliki nastaneta pri negativnem eksponentu:



$a_n < 0$, liha stopnja $\qquad$ $a_n < 0$, soda stopnja

Graf polinoma bomo narisali tako, da bomo:

1. Izračunali **ničle** in njih stopnjo.

2. Izračunali **stacionarne točke** in določili vrsto (v četrtem letniku).
3. Izračunali **začetno vrednost** in po potrebi tabelirali še kako dodatno točko.
4. S pomočjo vodilnega koeficienta in stopnje raziskali obnašanje na robu definicijskega območja, torej za velike vrednosti $|x|$.

Zgled 16: Narišimo polinom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Ničle poiščimo kar s Hornerjevim algoritmom. Med "lepimi" kandidati za ničle $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ hitro najdemo ničlo $x_1 = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \|0 \end{array}$$

Ostali ničli sta skriti v polinomu $x^2 - 4x + 4$. Ničli našega polinoma sta torej:

$$\boxed{x_1 = -1, x_2 = 2\,(II)}$$

Če želimo izračunati stacionarne točke, potrebujemo odvod: $p'(x) = 3x^2 - 6x$. Odvod enačimo z 0: $3x^2 - 6x = 0$ in izračunamo abscise stacionarnih točk $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ in še sami stacionarni točki: $S_1(0, 4)$ in $S_2(1, 0)$.

Za konec izračunamo še začetno vrednost je $p(0) = 4$.

Zgled 17: V drugem primeru narišimo graf polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Ugotovimo, da je $x_1 = 1$, s Hornerjevim algoritmom znižamo stopnjo

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 9 & -4 \\ \hline 1 & & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \|0 \end{array}$$

Ostali ničli sta skriti v polinomu $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$. Ničli našega polinoma sta torej:

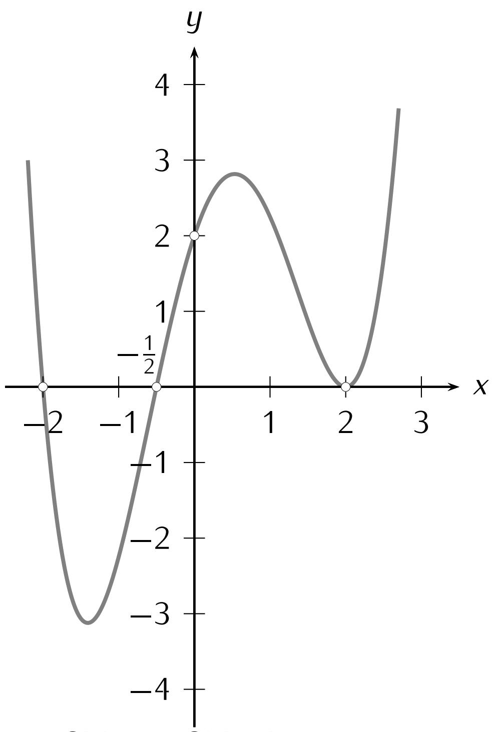
$$\boxed{x_1 = 4, x_2 = 1\ (II)}$$

Izračunajmo odvod $p'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, ga izenačimo z 0 in izračunamo abscise stacionarnih točk $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ in še sami stacionarni točki: $S_1(1, 0)$ in $S_2(3, -4)$.

Še začetna vrednost: $p(0) = -4$. Grafa obeh primerov sta prikazana na koncu.

V naslednjem primeru se lotimo obratne naloge.

Zgled 18: Zapiši v splošni obliki enačbo polinoma četrte stopnje, katere graf prikazuje naslednja slika:



Slika 3: Slika k primeru

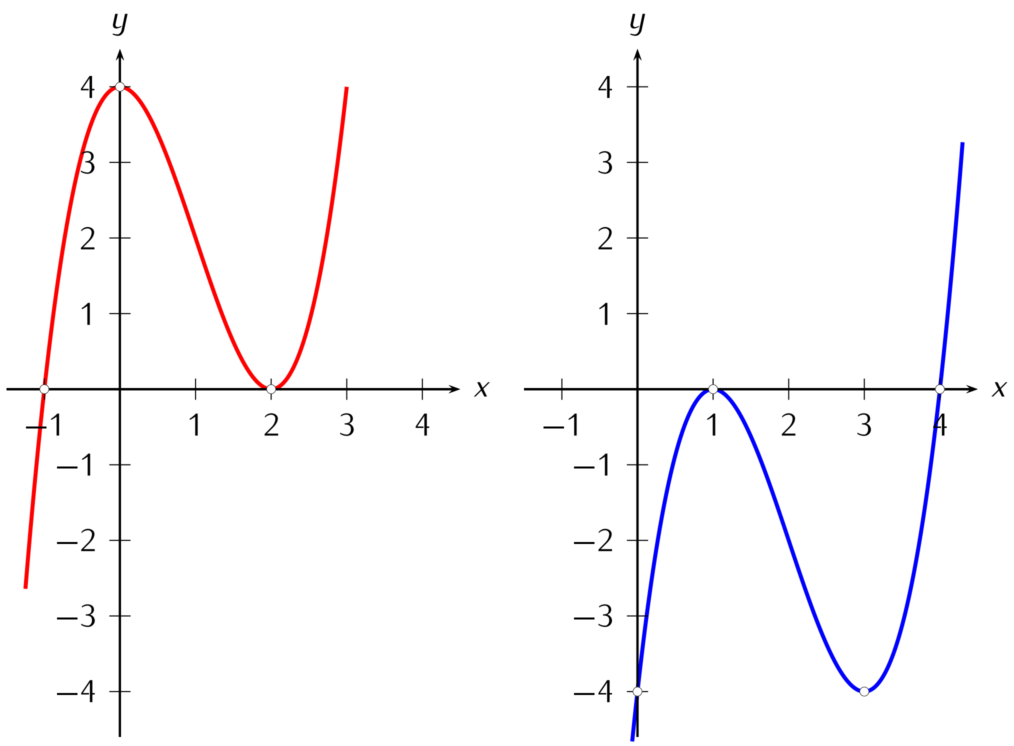
Iz slike preberemo ničle: $x_1 = 2\,(II)$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$ in začetno vrednost $(0, 2)$. Zato je

$$y = a(x-2)^2(x+\frac{1}{2})(x+2) \Rightarrow 2 = a \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$$

Tako je $a = \frac{1}{2}$. Z malo računanja dobimo:

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + 2$$

Še obljubljeni sliki za prejšnja zgleda:



Slika 4: Grafa polinomov $y = x^3 - 3x^2 + 4$ in $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

8 Racionalna funkcija

Definicija in značilne točke racionalne funkcije

Vzemimo polinoma $p(x)$ in $q(x)$, ki v svoji ničelni obliki **nimata** skupnega niti **linearnega**, niti **kvadratnega** faktorja. Sestavimo novo funkcijo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Nastalo funkcijo imenujemo **racionalna** funkcija. Množica vseh racionalnih funkcij je **zaprta** za osnovne računske operacije, kar pomeni, da je vsota ali razlika ali zmnožek ali količnik dveh racionalnih funkcij spet racionalna funkcija.

Vrednosti racionalne funkcije so ulomki, ti pa niso definirani za vsako vrednost spremenljivke x, zato definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ racionalne funkcije v splošnem niso vsa realna števila. Iz množice vseh realnih vrednosti spremenljivke x moramo izvzeti tiste vrednosti x, pri katerih je polinom v imenovalcu ($= q(x)$) enak 0, ali drugače povedano, racionalna funkcija ni definirana v ničlah polinoma v njenem imenovalcu.

Zgled 19: **Poiščimo definicijsko območje funkcije** $y = \dfrac{2x-1}{2x^2-3x-2}$.

Poiščemo ničle polinoma v imenovalcu: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$. Potem je definicijsko območje funkcije iz primera: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ ■

Kritične točke

K kritičnim točkam racionalne štejemo **ničle** in **pole**.

Ničle racionalne funkcije so, tako kot ničle poljubne funkcije, take vrednosti spremenljivke x, pri katerih je vrednost funkcije $y = f(x)$ enaka 0. Ker je racionalna funkcija ulomek, ulomek pa ima vrednost 0 le v primeru, ko je števec enak 0, imenovalec pa ne, so ničle racionalne funkcije enake ničlam polinoma v števcu.

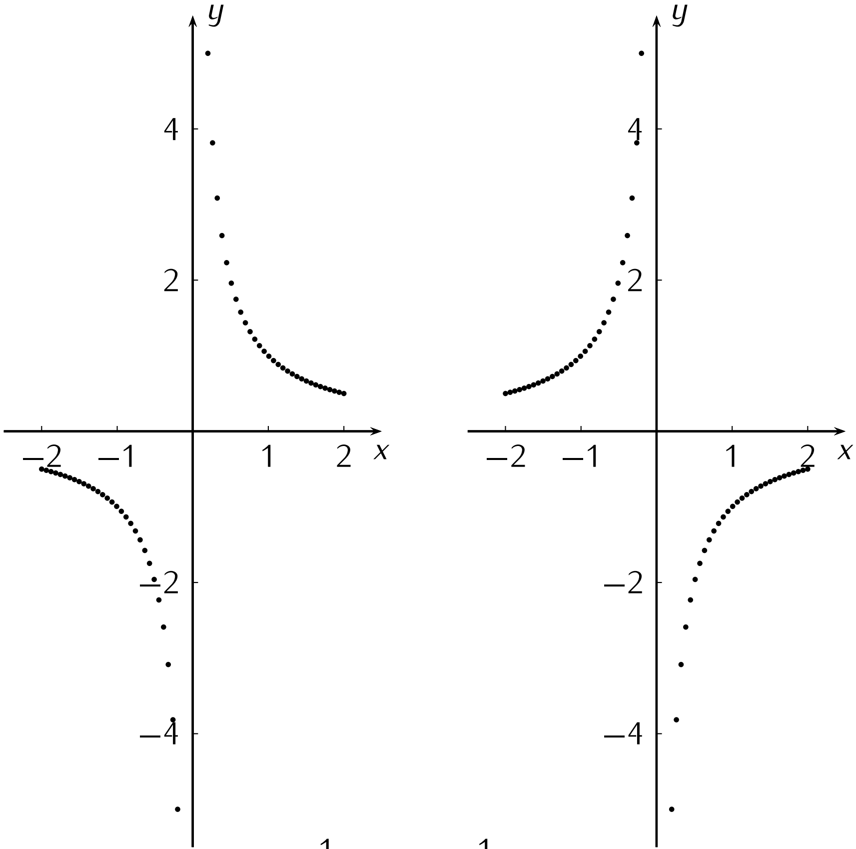
Poli racionalne funkcije so vrednosti spremenljivke x v katerih funkcija ni definirana, torej ničle polinoma v imenovalcu.

V definiciji racionalne funkcije odkrijemo, da množica ničel in množica polov nimata skupnega elementa, ker polinoma števcu in imenovalcu racionalne funkcije v ničelni obliki nimata skupnega faktorja.

Kritične točke ločimo tudi glede na njihovo **večkratnost** na točke prve stopnje, druge stopnje, tretje stopnje in tako dalje. Včasih nam bo zadostovala le ločitev na točke **lihe** in **sode** stopnje.

Pri kritičnih točkah nas bo zanimalo predvsem obnašanje grafa v njihovi okolici. Pri ničlah se graf racionalne funkcije obnaša tako, kot se graf polinoma obnaša pri ničli ustrezni stopnje.

V polih racionalna funkcija ni definirana, je pa definirana v bližnji okolici polov. Tam se obnaša približno tako, kot se obnaša potenčna funkcija $y = x^{-n} = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ali $y = -x^{-n} = -1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$ v okolici izhodišča. Seveda sta obe potenčni funkciji tudi racionalni funkciji s polom v izhodišču $x = 0$.

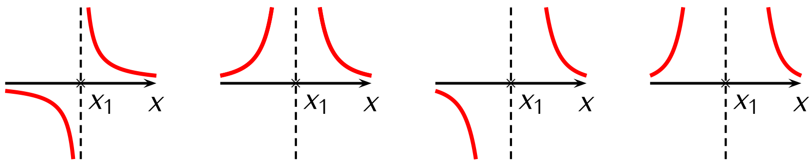


Slika 5: Obnašanje funkcij $y = \dfrac{1}{x}$ in $y = -\dfrac{1}{x}$ na intervalih $(-2, -0.2)$ in $(0.2, 2)$

Obnašanje je najbolje raziskati s kakšnim od programov dinamične geometrije. Na gornjih slikah sta prikazana grafa funkcij $y = 1/x$ in $y = -1/x$ na intervalih $(-2, -0.2)$ in $(0.2, 2)$ s 60 točkami.

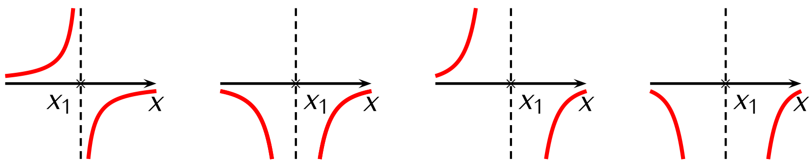
Kaj opazimo? Ko se bližamo z vrednostjo spremenljivke x proti polu x_1 (na sliki je $x_1 = 0$), vrednosti racionalne funkcije presežejo še tako veliko pozitivno ali negativno vrednost, pravimo, da gredo vrednosti funkcije v neskončnost (v $+\infty$ ali v $-\infty$). Na grafu to prikažemo tako, da v polu x_1 narišemo premico $x = x_1$, ki jo imenujemo **navpična** asimptota. Navpično asimptoto narišemom črtkano, kot smo to že počeli z asimptotami pri grafu eksponentne in logaritemske funkcije. Graf funkcije se vedno bolj približuje navpični asimptoti, ko se približujemo polu z leve ali desne.

Glede na večkratnost polov ločimo naslednje možnosti obnašanja okoli asimptote:



1. stopnja 2. stopnja 3. stopnja 4. stopnja

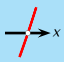
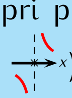
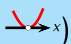
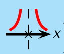
Možne so tudi naslednje oblike:



1. stopnja 2. stopnja 3. stopnja 4. stopnja

Povzemimo:

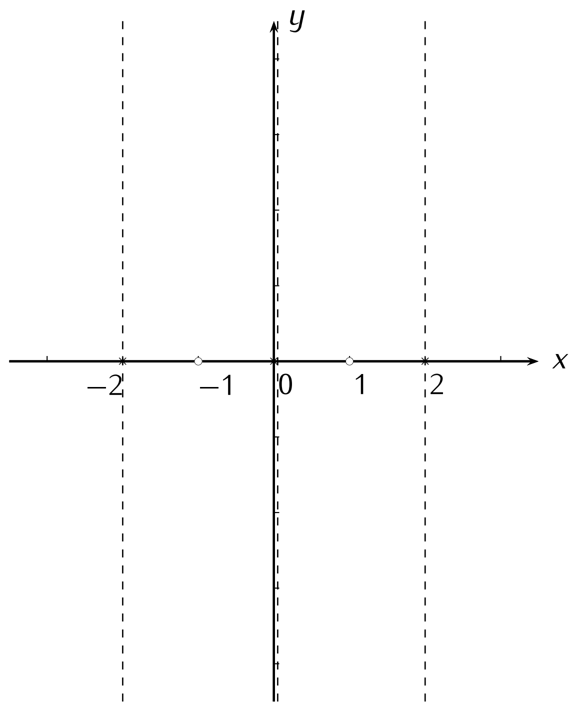
V okolici kritične točke:

- **lihe** stopnje graf racionalne funkcije **spremeni** predznak, pri ničli **seka** abscisno os (), pri polu pa se graf približuje navpični asimptoti na različnih koncih asimptote ().
- **sode** stopnje graf racionalne funkcije **ohrani** predznak, pri ničli se **dotakne** abscisne osi (), pri polu pa se graf približuje navpični asimptoti na istem koncu asimptote ().

Zgled 20: Skicirajmo graf funkcije $y = \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2(x-2)(x+2)}$.

Funkcija ima v $x = 1$ ničlo 2. stopnje, kar označimo z $x_1 = 1\ (II)$, in enojno (=ničla 1. stopnje) ničlo $x_2 = -1$. Poli in njihove večkratnosti so: $x_1 = 0\ (II)$, $x_2 = 2$ in $x_3 = -2$.

V koordinatni sistem narišemo ničle, pole (dogovorimo se, da ničle označujemo s krogci, pole s križcem), v polih narišemo še navpične asimptote.



Kje v koordinatnem sistemu začeti risanje? Na desni, na levi ali na sredini? Mi se odločimo, da začnemo desno. V naslednjem razdelku bomo bolj natančno pojasnili, kje "desno" bomo začeli.

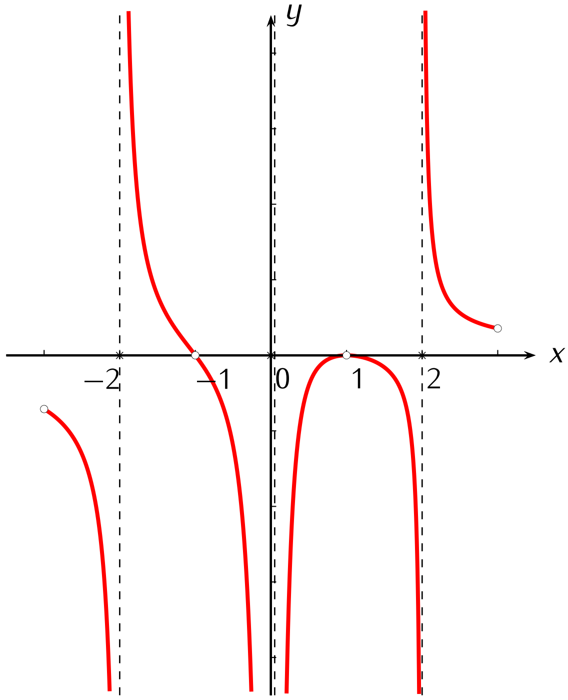
Skrajno desna kritična točka je pol $x = 2$. Izračunajmo vrednost funkcije pri večji spremenljivki, recimo pri $x = 3$. Dobimo točko $(3, 16/45)$. Ker med $x = 3$ in polom $x = 2$ ni kritičnih točk, se graf začne približevati navpični asimptoti po pozitivnih vrednostih spremenljivke y. Pol $x = 2$ je prve stopnje, zato se graf funkcije na drugi strani navpični asimptoti približuje asimptoti po negativnih vrednostih spremenljivke y.

Naslednja kritična točka, gledano z desne, je dvojna ničla $x = 1$. Zato se v njej graf funkcije odbije in se približuje navpični asimptoti v polu $x = 0$ po negativnih vrednostih spremenljivke y.

Ker je pol $x = 0$ druge stopnje, se graf tudi na drugi strani navpične asimptote približuje po negativnih vrednostih spremenljivke y. Od tam graf potuje k enojni ničli v $x = -1$, jo seka in se po pozitivnih vrednostih y približuje asimptoti v polu $x = -2$.

Pol v $x = -2$, ki je skrajno leva kritična točka, je prve stopnje, zato se graf funkcije z leve približuje asimptoti po negativnih vrednostih spremenljivke y. Od tam graf potuje proti točki $(-2, -32/45)$.

Še slika opisanega:



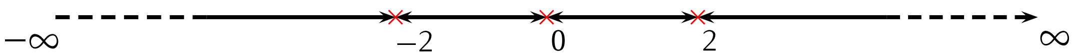
Kaj se dogaja z grafom za vrednosti $x < -3$ in vrednosti $x > 3$, bomo ugotovili v naslednjem razdelku.

Asimptota racionalne funkcije

V tem razdelku nas bo zanimalo obnašanje racionalne funkcije na **robu** definicijskega območja. Kaj je rob definicijskega območja?
Spomnimo se, da definicijsko območje racionalne funkcije dobimo tako, da iz množice realnih števil odstranimo nekaj števil, polov. Z odstranitvijo polov "zmanjšana" množica realnih števil razpade na unijo nekaj intervalov. Recimo, funkcija $y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2(x-2)(x+2)}$ ima pole v množici $\{-2, 0, 2\}$, zato je

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$$

Definicijsko območje prikažimo še na številski premici:



Rob definicijskega območja so krajišča intervalov, torej **poli** in **levi** ter **desni** konec številske premice, ki ju označimo z $-\infty$ ("- neskončno") in ∞ ("neskončno").

Obnašanje okoli polov smo že raziskali, torej nam ostane raziskati obnašanje racionalne funkcije v $-\infty$ in ∞.

Vzemimo racionalno funkcijo

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \; a_m \neq 0, \; b_n \neq 0$$

Glede na stopnjo polinomov v števcu ($= m$) in imenovalcu ($= n$)bomo ločili naslednje primere:

1. stopnja v števcu je manjša od stopnje v imenovalcu ($m < n$),
2. stopnja v števcu je enaka stopnji v imenovalcu ($m = n$),
3. stopnja v števcu je večja od stopnje v imenovalcu ($m > n$).

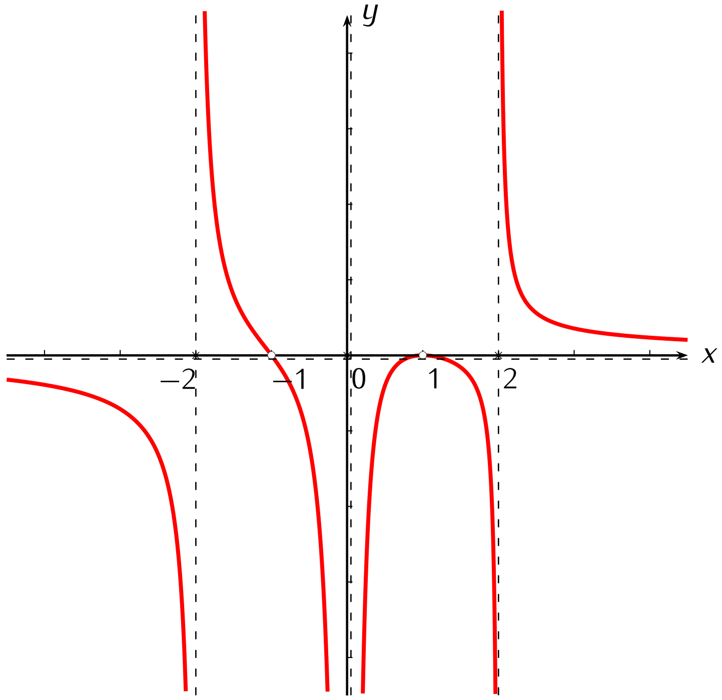
Primer $m < n$: Preoblikujmo racionalno funkcijo f tako, da števec in imenovalec delimo z največjo stopnjo spremenljivke x, torej z x^n:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid : x^n}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \mid : x^n} = \frac{\frac{a_m}{x^{n-m}} + \frac{a_{m-1}}{x^{n-m-1}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}} \to \frac{0}{1} = 0$$

Vrednost izraza $\frac{c}{x^r}$, $r \in \mathbb{N}$ postaja vedno manjša, ko vrednost spremenljivke x potuje k $-\infty$ ali k ∞. Zato postaja tudi vrednost racionalne funkcije vedno manjša, saj vrednost v števcu potuje proti 0, vrednost v imenovalcu pa proti 1.

Tako smo ugotovili, da se pri **velikih pozitivnih** in **velikih negativnih** vrednostih spremenljivke x vrednost funkcije približuje 0, grafično to pomeni, da je abscisna os **asimptota** funkcije f.

Ⓟ V funkciji $y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2(x-2)(x+2)}$ je stopnja števca 3, stopnja imenovalca pa 4, zato je abscisna os asimptota funkcije. Še slika:



■

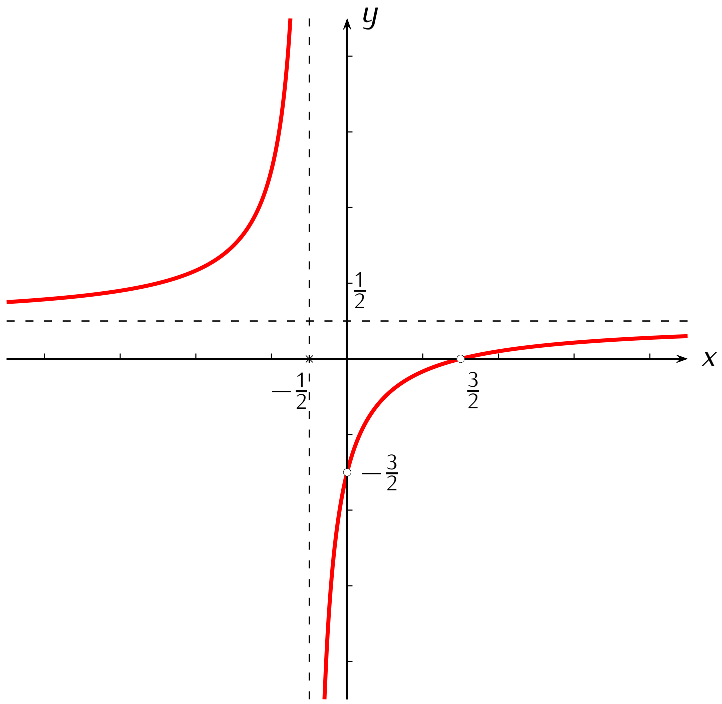
Primer $m = n$: Funkcijo f preoblikujemo podobno kot v prvem primeru:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid : x^n}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \mid : x^n} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}} \to \frac{a_n}{b_n}$$

S podobnim razmišljanjem kot v prejšnjem primeru ugotovimo, da se za velike pozitivne in negativne vrednosti spremenljivke x, vrednosti racionalne ($= y$) približujejo vrednosti $\frac{a_n}{b_n}$. Zato je premica $y = \frac{a_n}{b_n}$ asimptota grafa funkcije f.

Zgled 21: **Narišimo graf racionalne funkcije** $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+2}$.

Zapisano funkcijo imenujemo tudi ulomnjena linearna funkcija. Ima ničlo v $x = \frac{3}{2}$ in pol v $x = -\frac{1}{2}$. Pomebna točka na grafu funkcije je tudi začetna vrednost funkcije ali tudi odsek na ordinatni (y) osi. V našem primeru ima ta točka koordinati $(0, -\frac{3}{2})$. Stopnji števca in imenovalca sta enaki, zato je asimptota grafa funkcije premica z enačbo $y = \frac{1}{2}$. Še slika:



■

Primer $m > n$: Vzemimo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Delimo polinom v števcu (p) s polinomom v imenovalcu (q). Po osnovnem izreku o deljenju polinomov lahko izračunamo količnik $k(x)$ in ostanek $o(x)$, da velja: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + o(x)$, $st(o) < st(q)$. Če zadnjo enačbo delimo z imenovalcem $q(x)$ in upoštevamo, da je $\frac{p(x)}{q(x)} = f(x)$, dobimo:

$$f(x) = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)}, \; st(o) < st(q)$$

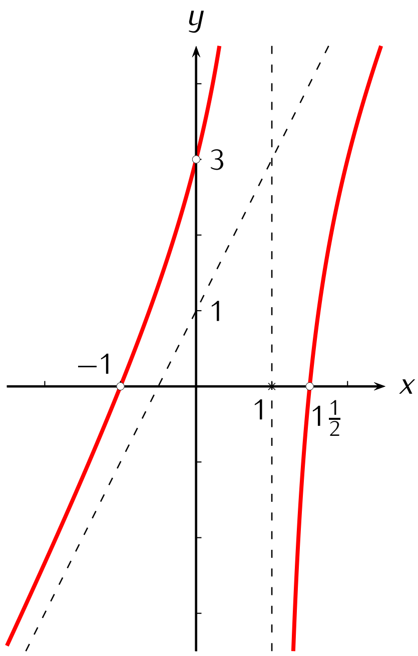
Ker je $st(o) < st(q)$, gredo vrednosti ulomka $\frac{p(x)}{q(x)}$ proti 0, ko se vrednostih spremenljivke x približujejo $-\infty$ ali ∞. Zato se v tem primeru vrednosti funkcije $f(x)$ približujejo vrednostnim količnika $k(x)$. Torej je graf funkcije $y = k(x)$ asimptota grafa funkcije $y = f(x)$.

Zgled 22: Skicirajmo graf funkcije $y = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$.

Lahek račun poišče ničli: $x_1 = \frac{3}{2}$ in $x_2 = -1$ ter pol $x = 1$. Začetna vrednost je v točki $(0, 3)$, asimptoto pa izračunamo z deljenjem $(2x^2 - x - 3) : (x - 1)$, ki ga opravimo kar s Hornerjevim algoritmom:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -3 \\ \hline 1 & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & \| -2 \end{array}$$

Zadnja vrstica nam da količnik $2x + 1$ in ostanek -2. Asimptota ima torej enačbo $y = 2x + 1$, ostanek pa bomo imenovali ulomek $\dfrac{-2}{x-1}$.



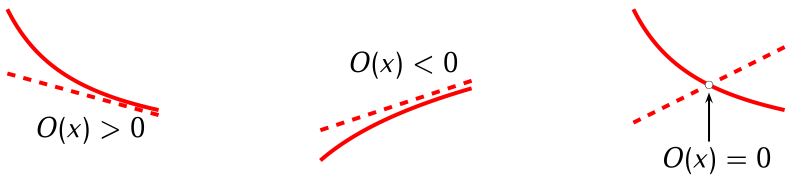
■

Raziščimo še pomen ostanka $O(x) = \dfrac{o(x)}{q(x)}$, ki nastopa v enačbi $f(x) = k(x) + \dfrac{o(x)}{q(x)}$. Enačbo z novo oznako lahko zapišemo tudi v obliki:

$$f(x) = k(x) + O(x)$$

Vzemimo velike pozitivne ali velike negativne vrednosti spremenljivke x. Ker je $st(o) < st(q)$, je ostanek $O(x)$ pri takih vrednostih x približno enak 0. Zato se graf funkcije $y = f(x)$ približuje grafu asimptote $y = k(x)$:

- tam, kjer je $O(x) > 0$ se graf približuje asimptoti **nad** asimptoto ($f(x) = k(x) + O(x) > k(x)$)
- tam, kjer je $O(x) < 0$ se graf približuje asimptoti **pod** asimptoto ($f(x) = k(x) + O(x) < k(x)$)
- v tistih x, kjer je $O(x) = 0$ graf asimptoto seka ali pa se je dotakne ($f(x) = k(x) + O(x) = k(x)$)



Za konec razdelka naredimo povzetek:

Za velike pozitivne vrednosti ali velike negativne vrednosti spremenljivke x se graf racionalne funkcije približuje asimptoti racionalne funkcije.

- Če je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, je asimptota abscisna (x) os. Enačba asimptote:
$$y = 0$$
- Če je stopnja polinoma v števcu enaka stopnji polinoma v imenovalcu, je asimptota premica, ki je vzporedna abscisni (x) osi. Enačba asimptote:
$$y = \frac{a}{b}$$
kjer je a vodilni koeficient polinoma v števcu, b pa vodilni koeficient polinoma v imenovalcu.
- Če je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu, je asimptota polinom, ki je enak količniku pri deljenju polinoma v števcu s polinomom v imenovalcu. Enačba asimptote:
$$y = k(x)$$

Racionalne neenačbe

Racionalne imenujemo tiste neenačbe, ki jih lahko s prenašanje členov preoblikujemo do **urejene** oblike

$$f(x) \triangleleft 0$$

kjer je $f(x)$ **polinom** ali **racionalna** funkcija, $\triangleleft$ pa pomeni enega od naslednjih znakov:

$$<, >, \leq, \geq$$

Kako rešimo racionalne enačbo? Najpogosteje uporabimo naslednji postopek:

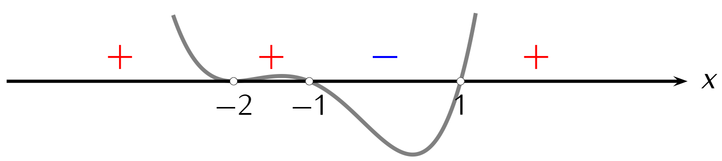
- Neenačbo preobilujemo do urejene oblike $f(x) \triangleleft 0$.
- Izračunamo kritične točke funkcije f; pri polinomih le ničle.
- Abscisno (x) os razdelimo s kritičnimi točkami na več intervalov.
- Ugotovimo predznak funkcije f na posameznih intervalih.
- Zapišemo rešitev. Običajno je to unija intervalov.

Zgled 23: Reši neenačbo $(x(x+2))^2 \leq x^2 + 4(x+1)$.

Urejanje: $x^2(x^2+4x+4) \leq x^2+4x+4 \Rightarrow x^4+4x^3+3x^2-4x-4 \leq 0$.

Ničle: Poiščemo jih, recimo s Hornerjevim algoritmom; dobimo $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2(II)$.

Razdelitev abscisne osi in predznaki na posameznih intervalih (predznake najenostavneje določimo tako, da si načrtamo približen graf funkcije f). Ker je znak neenakosti $\leq$, so na x osi za nas zanimivi tisti x, kjer je graf "pod" ali na osi x:



Zapis rešiteve: $x \in [-1, 1]$. ■

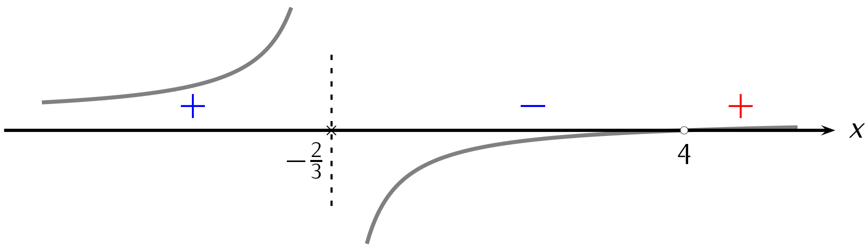
Zgled 24: Reši neenačbo $\frac{2x-1}{3x+2} \leq \frac{1}{2}$.

1.način: Pri racionalnih enačbah $f(x) \triangleleft 0$, kjer je f racionalna funkcija, pomislimo, da bi jo lahko preoblikovali tako, kot to storimo pri racionalni enačbi, ko odpravimo ulomke. Toda pri množenje neenačb moramo upoštevati dejstvo, da se pri množenju z negativnim številom znak neenakosti spremeni. Tako je v primeru $x = 0$ skupni imenovalec $2(3x+2)$ pozitiven in se znak neenakosti ne spremeni, v primeru $x = -1$ pa je skupni imenovalec $2(3x+2)$ negativen, zato se znak neenakosti $\leq$ spremeni v znak $\geq$. Zagato rešimo tako, da celo neenačbo pomnožimo z $2(3x+2)^2$; tako odpravimo ulomke, pa tudi znak neenakosti ostane enak, saj množimo s pozitivnim številom. Paziti moramo le na to, da iz množice rešitev izločimo število $x = -\frac{2}{3}$, saj bi v tem primeru množili z 0. Po množenju z $2(3x+2)^2$ neenačba postane: $2(2x-1)(3x+2) \leq (3x+2)^2$ in v urejeni obliki dobimo kvadratno neenačbo: $3x^2 - 10x - 8 \leq 0$. Ničli ustrezne kvadratne funkcije sta $x_1 = -\frac{2}{3}$ in $x_2 = 4$, iz primerne slike pa preberemo množico rešitev $\mathcal{R} = (-\frac{2}{3}, 4]$. □

2.način je tak, kot smo ga opisali v prejšnjem primeru. Neenačbo preoblikujemo v:

$$\frac{2x-1}{3x+2} - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x-2-3x-2}{2(3x+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{2(3x+2)} \leq 0$$

Kritični točki ustrezne racionalne funkcije sta ničla v $x = 4$ in pol v $x = -\frac{2}{3}$. Narišimo ustrezno sliko:



Iz grafa preberemo rešitev: $x \in (-\frac{2}{3}, 4]$. □ ■

9 Naloge

1. Naj bo $p(x)$ polinom stopnje 13 z vodilnim koeficientom 2, $q(x)$ pa polinom stopnje 8 z vodilnim koeficientom -3. Če je:

$$k(x) = (2p(x) - 3q(x)) \cdot (p(x)q(x) + x + 1),$$

   poišči stopnjo in vodilni koeficient polinoma $k(x)$. [$34, -24$]

2. Za polinom $p(x) = (x^2 - 2x + 2)^{1997} \cdot (-2x^3 + 4x - 1)^{1980}$, poišči:

   (a) stopnjo,

   (b) vodilni koeficient in

   (c) * vsoto njegovih koeficientov

   [$9934, 2^{1980}$]

3. Naj bo $p(x) = x^2 - 2x + 2$, $q(x) = x^2 + 1$, $r(x) = x - 2$ in $s(x) = 2$. Poišči količnik in ostanek pri deljenju polinoma $P(x)$ s polinomom $Q(x)$, če je:

   (a) $P(x) = (p \cdot q + q \cdot s)(x)$ in $Q(x) = (s^2 + 2r)(x)$,

   (b) $P(x) = (s^2 + 2r)(x)$ in $Q(x) = (p \cdot q + q \cdot s)(x)$.

   [$\frac{1}{2}x^2 - x + 3$, -2; 0, $P(x)$]

4. Deli naslednje polinome z najpreprostejšo metodo in rezultate preizkusi ($p : q = k + \frac{o}{q} \iff k \cdot q + o = q$).

   (a) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$, $x + 2$,

   (b) $4x^4 - 2x + 1$, $2x - 2$,

   (c) $6x^2 - 4x + 3$, $3x - 4$,

   [v zadnjem primeru: $2x + \frac{4}{3}$, $\frac{25}{3}$]

5. Poišči polinom, ki pomnožen s polinomom $x^2 + 3x - 1$ da polinom $3x^4 + 10x^2 + 5x^2 + 14x - 5$. [$3x^2 + x + 5$]

6. Poišči m tako,da bo polinom $x^3 + 2x^2 + mx - 2$ deljiv s polinomom $x - 2$. Poišči tudi količnik deljenja. [-7, $x^2 + 4x + 1$]

7. Če polinom $x^3 + ax^2 - 9x + b$ delimo s polinomom $x^2 + x + 1$, dobimo ostanek $-4x + 17$. Kolikšna sta koeficienta a in b ter količnik ? [$-5, 11, x - 6$]

8. Razstavi polinom $p(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$ na produkt dveh kvadratnih polinomov tako, da bo eden oblike $x^2 + 6x + a$. Izračunaj še ničle polinoma $p(x)$.
[$a = 8, \ -1, -2, 3, -4$]

9. Poišči ničle polinoma $q(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 6x + 21$, če veš, da $(x^2 - 3) \mid q(x)$.
[$1 \pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$]

10. Izračunaj $\sqrt{p(x)}$, če je $p(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$. (upoštevaj, da je $\sqrt{a} = b \iff b^2 = a$; v našem primeru bo a dani polinom, b pa neznani polinom druge stopnje, katerega koeficiente izračunamo s pomočjo definicije enakosti dveh polinomov).
[$p(x) = (x^2 + 2x + 4)^2$]

11. Razcepi naslednje polinome v $\mathbb{R}[x]$ (tj. na produkt polinomov z realnimi koeficienti).

(a) $2x^3 - 54$

(b) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$

(c) $x^4 - 6x^2 + 8$

(d) $x^3 - 10x^2 + 23x - 14$

(e) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

2

[Namig: v primeru (d) je ena od ničel danega polinoma 1, v primeru (e) pa sta ničli 0 in -5]

12. Okrajšaj ulomek: $\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$.
[$\frac{x+1}{x^2+x-2}$]

13. Reši v množici realnih števil $\mathbb{R}$ naslednje enačbe:

(a) $x^3 - 4x^2 - 6x + 12 = 0$

(b) $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0$

(c) $6x^5 + 11x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8x - 8 = 0$

(d) $3x^4 - 7x^3 - 14x - 12 = 0$

[$-2, \ 3 \pm \sqrt{3}; \ 0, \ 3, \ -2, \ -\frac{1}{2}; \ -2, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}; \ 3, \ -\frac{2}{3}$]

14. Poišči polinome $p(x)$ s podatki (st = stopnja polinoma, x_i = ničla polinoma):

(a) $st = 4, \ x_1 = 0, \ x_2 = 1$ (II.), $x_3 = -1, \ p(2) = 12$

(b) $st = 5, \ x_1 = -1, \ x_2 = 2$ (III.), $x_3 = -2, \ p(0) = -48$

[$2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x; \ 3(x + 1)(x - 2)(x + 2)$]

15. Skiciraj grafe naslednjih polinomov:

(a) $p(x) = 2x^2 - 5x - 3$

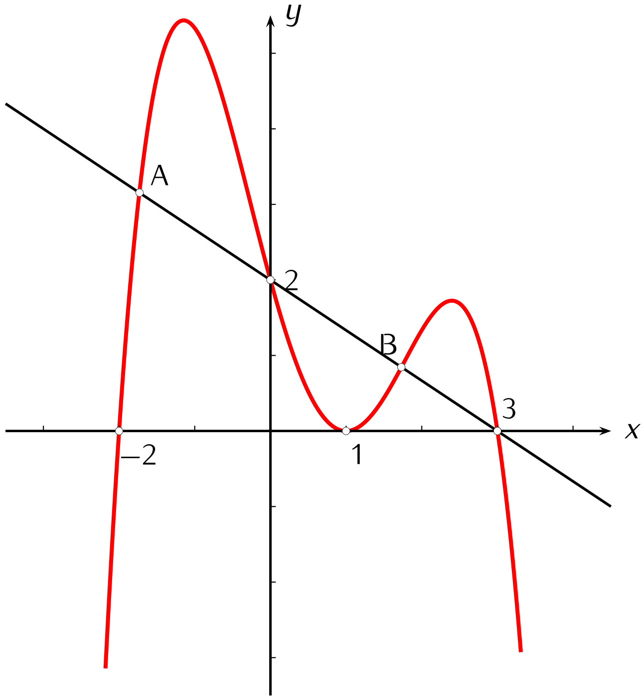
(b) $p(x) = -\frac{1}{54}(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)^3$

(c) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3$

(d) $p(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

(e) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

16. Na spodnji sliki sta prikazana grafa polinoma četrte stopnje in linearne funkcije. Zapiši njuni enačbi in izračunaj koordinati točk A in B na sliki.



17. Danim racionalnim funkcijam poišči ničle in pole ter razišči njih obnašanje na robu definicijskega območja. Potem skiciraj njihove grafe:

(a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

(d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2}$

(e) $f : x \mapsto \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

18. Reši naslednje neenačbe:

(a) $2x^2 \geq 5x + 3$

(b) $x^3 + 2x + 3 \leq 0$

(c) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 \leq 0$

(d) $\dfrac{2x-1}{x+3} < 0$

(e) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \geq 0$

(f) $\dfrac{2x-1}{x+3} \geq 1$

(g) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{3}{x^2-1}$

19. * Reši naslednje iracionalne enačbe:

(a) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-8}=\sqrt{7x+1}$,

(b) $2x+\sqrt{4x-8}=\frac{7}{2}$,

(c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$,

(d) $\sqrt{x}+\sqrt{x+15}=3\sqrt{3}$,

(e) $\sqrt{x^2+x+1}+4=x$,

(f) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1$,

(g) $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}-\dfrac{1+2x}{\sqrt{x+3}}$ in

(h) * $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1)$.

[V zadnjem primeru (h) uvedi novo neznanko $z=2x^2-3x$]

Naloge na maturah in zaključnih izpitih

1. Poišči presečišče premice $y=x+2$ z grafom polinoma $p(x)=x^3-2x^2+3x+1$.

2. Približno skiciraj graf polinoma $y=x^2(x-3)$.

3. Približno skiciraj graf funkcije $y=\frac{x-3}{(x-2)^2}$.

4. Naj bo $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

   (a) Določi vsa realna števila x, da bo $4\leq f(x)\leq 9$.

   (b) Graf funkcije f vzporedno premaknemo za 1 desno v smeri x osi. Določi enačbo dobljene krivulje in to krivuljo tudi nariši.

5. Nariši graf funkcije $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$. Zapiši enačbo premice, ki ne seka grafa funkcije f in je:

   (a) vzporedna osi x,

   (b) vzporedna osi y.

6. Reši enačbo $7-\sqrt{37-x^2}=x$.

7. V funkciji $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x^2+b}$ je a enak abscisi, b pa ordinati točke, v kateri ima funkcija $y=2x^2+12x+19$ minimum. Določi a in b ter skiciraj graf funkcije.

8. Skiciraj racionalni funkciji

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+3} \text{ in } g : x\mapsto \frac{3}{4(x-2)}+\frac{5}{4(x+2)}.$$

   v istem koordinatnem sistemu in odčitaj koordinate presečišč. Presečišča kontroliraj še računsko.

9. Preveri, da je število 2 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$. Poiščite še preostali dve (kompleksni) ničli.

10. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$ (brez uporabe odvoda). Zapiši presečišči grafa s koordinatnima osema, pola in enačbo vodoravne asimptote.

11. Določi število a tako, da bo ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = x^3 - 2x + a$ s polinomom $q(x) = x - 3$ enak 4. Zapiši količnik $k(x)$ pri tem deljenju.