# KOMBINATORIKA

(Interno gradivo)

Jezikovno pregledal Jože Šemrov



2016

Vsebine v tem gradivu so namenjene za pomoč dijakom na srednjih strokovnih šolah, predvsem tistim, ki se pripravljajo za izpit iz matematike na splošni maturi. Gradivo vsebuje tudi poglavja, ki se preverjajo na višji ravni izpita.

Konec zgleda je označen s simbolom $\blacksquare$, če pa je zgled sestavljen iz več delov, so konci posameznih delov označeni z $\square$.

Posebno zahvalo sem dolžan kolegu, profesorju Jožetu Šemrovu, ki je prevedel prispevke v slovenščino.

# Kazalo

# KOMBINATORIKA

## 1 Uvod

Beseda **kombinatorika** ima izvor v latinski besedi **combinare**, ki slovensko pomeni **sestavljati**, **zlagati**. Za nas bo najbolj zanimiva **preštevalna** ali **enumerativna** kombinatorika, ki se ukvarja s **preštevanjem reči, objektov** ali **izdelkov**. Izdelke (reči, objekte) sestavljamo z vnaprej predpisanimi **gradniki**, pri tem pa upoštevamo vnaprej predpisana **pravila sestavljanja** izdelkov. Osvetlimo z nekaj primeri.

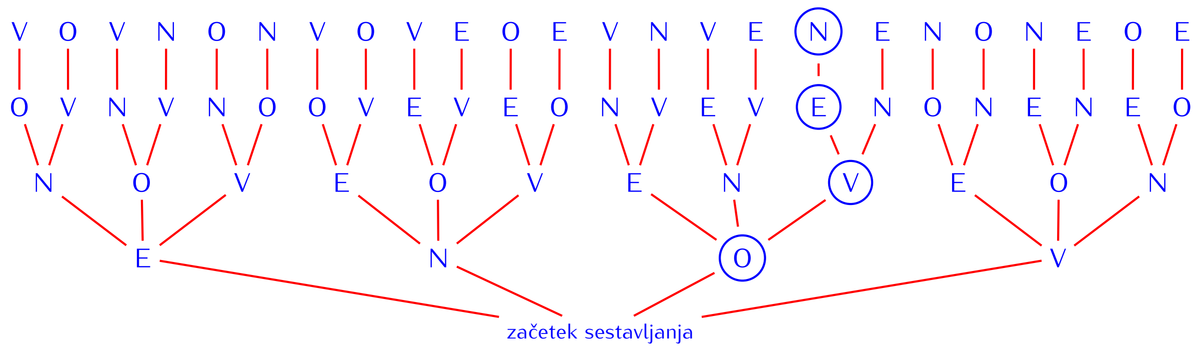
**Zgled 1.1: Dogovorimo se, da za nas "beseda"pomeni niz abecednih znakov, ki jih beremo od leve proti desni. Tako definirana beseda je lahko tudi brez pomena. Dolžina beseda pomeni število v besedi uporabljenih znakov.Koliko besed s štirimi črkami lahko sestavimo iz črk imena OVEN, če se črke v besedi ne smejo ponoviti.**

Besede zapišemo in slovarsko **organiziramo** (po abecedi):

$$\begin{array}{cccc} ENOV & NEOV & OENV & VENO \\ ENVO & NEVO & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ EVON & NVOE & OVNE & VONE \end{array}$$

Takoj opazimo težavo. Če bi bila začetna beseda z več različnimi črkami, recimo JANEZ ali KODERMAN, bi bilo dokumentiranje besed v takih primerih zamudno, zato poskusimo ugotoviti kako splošno značilnost v sestavljanju besed. Posamezno besedo sestavimo tako, da najprej izberemo prvo skrajno levo črko, nato sosednjo in tako dalje. Za izbiro prve črke imamo imamo na razpolago štiri izbire (E, O, N, V), za drugo tri, za tretjo dve, zadnja pa je bila črka, ki nam je ostala. Število vseh besed, ki smo jih dokumentirali je 24, to število pa lahko nastane kot produkt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, torej kot produkt števila možnih izbir v posameznih fazah sestavljanja besede. Če ugotovljeno uporabimo na besedah JANEZ in KODERMAN, bi v prvem primeru dobili $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ besed, v drugem primeru pa $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ besed.

Opisan način izbiranja lahko grafično prikažemo s sliko, ki jo imenujemo kombinatorično drevo. Slika je res bolj podobna grmu, nastalo strukturo pa ne imenujemo (kombinatorični) grm, ampak **kombinatorično drevo**. Na drevesu lahko pokažemo, kako sestavimo besedo, recimo OVEN.




Slika 1: Kombinatorično drevo besed sestavljenih iz vseh črk besede OVEN

**Zgled 1.2: Koliko besed z dolžino treh črk lahko sestavimo iz črk besede IVO, če vsako črko lahko uporabimo večkrat?**

Najprej slovarsko uredimo tiste besede, ki se začno z I:

III IIO IIV IOI IOO IOV IVI IVO IVV

Preštejemo in opazimo, da je tistih, ki se začno z I, devet. Enostaven razmislek pove, da je tudi takih, ki se začno u O ali V, devet, zato je vseh besed $3 \cdot 9 = 27$. ■

V dosedanjih primerih je bil pri sestavljanju "izdelkov" pomemben vrstni red izbranih gradnikov = črk. V naslednjih primerih bomo raziskali primere, kjer vrstni red sestavljanja ne bo pomemben.

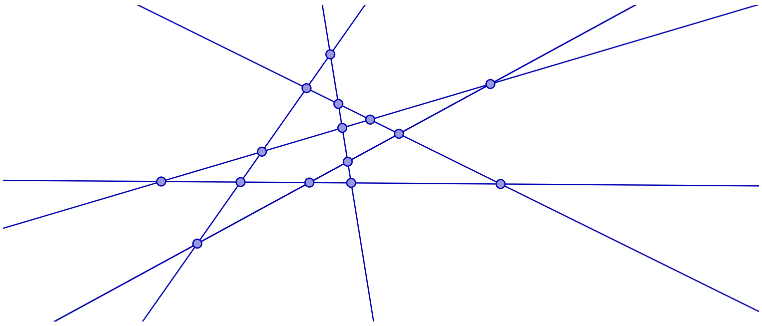
**Zgled 1.3: Koliko različnih igralnih trojk lahko sestavi trener košarkarske ekipe za ulično košarko, če ima na razpolago 5 igralcev: NIKA, JANA, IVA, TIMA in LUKO?**

Trojka je natanko določena z igralci, ki so v trojki, vrstni red njihovega izbiranaja pa ni pomemben. Tako je trojka NIK, JAN, TIM enaka trojki JAN, TIM, NIK. Nadaljujemo kot v prejšnjih primerih, torej trojke uredimo po abecedi in jih zapišimo. Dogovorimo se še, da posameznega igralca označimo z njegovo začetnico. Tako pridelamo naslednjo tabelo:

IJL JIT ITL IJN JIL IJT JTL ILN ILT INT

Torej obstaja 10 različnih trojk, ki jih sestavljamo izmed petih igralcev. ■

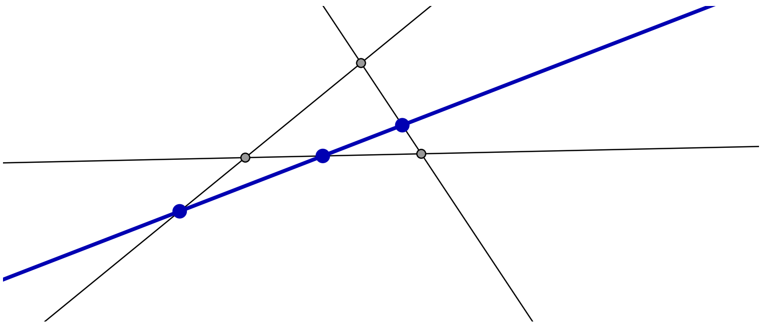
Na prvi pogled popolnoma drugačen problem poiščimo v geometriji:



Slika 2: Šest premic in presečišča

**Zgled 1.4: Koliko največ presečišc lahko določa šest različnih premic v isti ravnini?**

Presečišč bo največ, ko se bosta poljubni dve premici sekali v natanko eni točki, nobene tri pa se ne bodo sekale v skupni točki. Narišimo skico s šestimi premicami:
Slika pri večjem številu premic postane nepregledna. Zato poskušajmo ugotoviti nekaj zakonitosti. Recimo, da narišemo tri premice, ki se sekajo v treh točkah in v sliko vključimo še četrto premico, ki naj seka vsako od prejšnih treh.



Slika 3: Nova presečišča, ki nastanejo z novo premico

Ugotovimo, da smo pridobili tri nove točke, torej toliko kot je bilo premic preden smo narisali četrto. Posplošimo: če narišemo peto premico, dobimo poleg prejšnjih presečišč še štiri nova, če narišemo recimo stoto premico dobimo, poleg prejšnjih, še 99 novih presečišč. Kar smo ugotovili, postavimo v tabelo:

| št. premic | št. točk |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | $0+1=1$ |
| 3 | $1+2=3$ |
| 4 | $3+3=6$ |
| 5 | $6+4=10$ |
| 6 | $10+5=15$ |

Torej je iskanih presečišč 15. Problem posplošimo. Vzemimo, da imamo v ravnini 100 premic. Koliko največ presečišč določajo?
Pri šestih premicah smo do števila presečišč (15) prišli tako, da smo sešteli $1+2+3+4+5$, podobno je največje število presečišč v primeru stotih premic enako vsoti $1+2+3+\ldots+97+98+99$. Za izračun vsote uporabimo formulo za vsoto aritmetičnega zaporedja, če pa te formule še ne poznamo, poglejmo, kako je take vsote sešteval mali Gauss[1]. Gauss je opazil, da je vsota prvega in zadnjega člena 100, vsota drugega in predzadnjega prav tako 100 in tako dalje, zato je celotna vsota število parov (99/2) pomnoženo z vsoto enega para (100). Če nas moti, da število parov (=99/2) ni celo število, vsoto preuredimo v $0+1+2+\ldots+97+98+99$, pa bo parov $50 = 100/2$, vsota para je $0+99=99$, izračun celotne vsote pa je seveda enak in je enak:

$$1+2+3+\ldots+97+98+99 = \frac{99\cdot 100}{2} = 4950$$

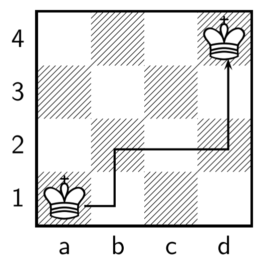
V splošenem primeru, ko je premic poljubno naravno število $n$, je presečišč enako

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Za naslednji primer posezimo v šah.

**Zgled 1.5:** **Na šahovski deski 4×4 se kralj nahaja v spodnjem levem polju. Na koliko načinov lahko prispe na zgornje desno polje, če naj se po vsaki potezi približa cilju in**

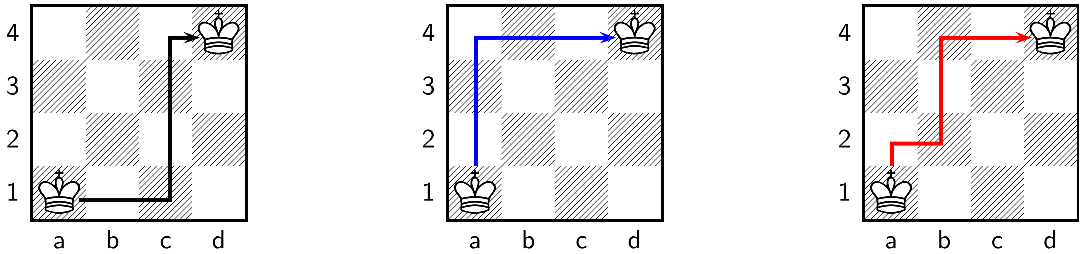
1. **ne uporablja diagonalnih potez,**
2. **uporabi le eno diagonalno potezo,**
3. **uporablja katerokoli dovoljeno potezo?**




[1] veliki nemški matematik Karl Friedrich Gauss

1) Problem prevedemo na podoben problem. Na sliki poiščemo kako dovoljeno pot, recimo črno in modro. Opazimo, da smo v obeh primerih morali napraviti tri "desne" poteze in tri poteze "navzgor". Označimo desno potezo z D, tisto navzgor pa z G. Črno pot kralja tako lahko zapišemo z besedo DDGGGD, modro pa z GGGDDD. Pa tudi poljubni besedi, ki jo zgradimo s po tremi črkami D in G, lahko priredimo potovanje kralja, recimo besedi GDGGDD sestavimo na sliki rdečo pot.

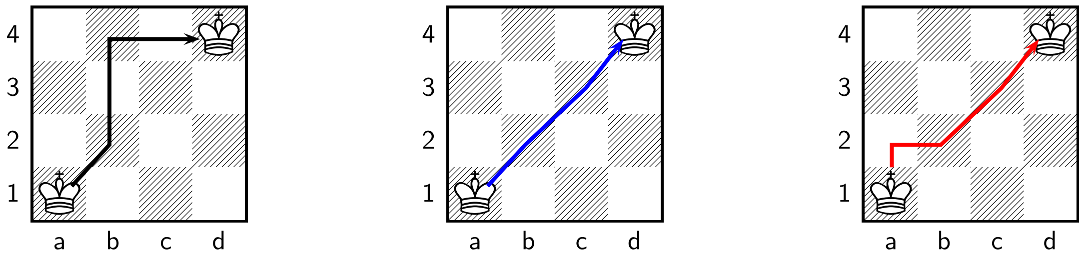
Problem iskanja števila poti kralja smo prevedli na analogen (podoben) problem iskanja števila besed, ki imajo dolžino šest črk in vsebujejo tri črke D in tri črke G.




Slika 4: Kraljeve poti DDGGGD, GGGDDD, GDGGDD

2) Sklepamo podobno, le da v tem primeru poti prikažemo z dvema D in G ter eno črko Δ, ki naj pomeni diagonalno potezo. Na sliki je prikazan primer poti ΔGGDD.

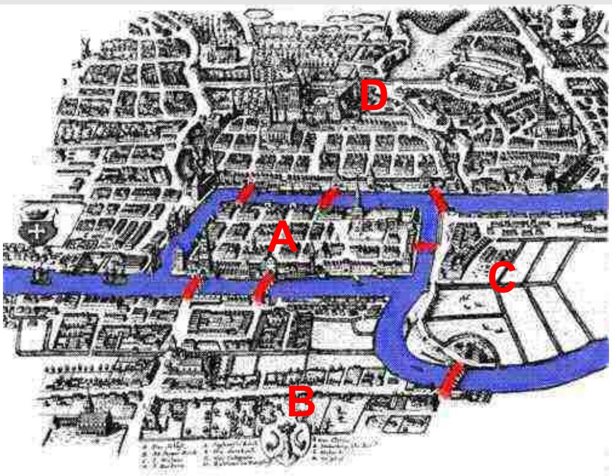
3) V primeru treh diagonalnih potez je pot ena sama (ΔΔΔ), v primeru dveh diagonalnih potez pa potrebujemo še eno potezo desno (D) in eno potezo navzgor (G). Ena od mogočih poti ustreza besedi: GDΔΔ.



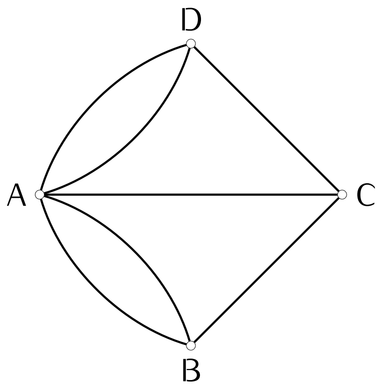

Slika 5: Kraljeve poti ΔGGDD, ΔΔΔ, GDΔΔ

Z naslednjim primerom bomo posegli v del nepreštevalne kombinatorike, v teorijo grafov. Rojstvo te matematične discipline je prav naslednja naloga, ki so jo naložili tedanji prebivalci Konigsberga slavnemu švicarskemu matematiku Leonardu Eulerju.

**Zgled 1.6: Mesto Königsberg, današnji Kaliningrad, leži ob reki Pregel, ki se izliva v Baltik. Reka obliva v mestu dva otoka, ki ju med seboj in z bregovoma reke povezuje sedem mostov, kot kaže sosednja slika. Vprašanje se glasi: Ali se da sprehoditi preko vseh sedmih konigsberških mostov tako, da prečkamo vsak most natanko enkrat?**




Nalogo je rešil Euler leta 1736. Problem je poenostavil z naslednjo sliko:




Slika 6: Graf problema sedmih konigsberških mostov

Pri tem točke A, B, C in D (oglišča, točke grafa) predstavljajo dele Köningsberga, ki so povezani z mostovi (slika), mostove, s katerimi so ti deli povezani, pa predstavljajo črte (povezave grafa) med točkami. Euler je vsaki točki grafa predpisal število (stopnjo), ki pomeni koliko povezav grafa se steka v to točko. V našem primeru imajo točke A, B, C in D zapored stopnje 5, 3, 3, 3. Potem pa je sklepal takole: Če naj vsak most (povezavo) prehodimo samo enkrat, moramo v vse točke, razen začetne in končne, vstopiti in izstopiti enakokrat. Zato morajo vse točke, razen začetne in končne, imeti sodo stopnjo. V primeru mostov Köningsberga pa temu ni tako, zato iskanega sprehoda po mostovih ni. ■

# 2 Osnovna orodja

V zgledu 1.4 prejšnjega razdelka smo ugotavljali, koliko največ presečišč ustvari 10 premic v ravnini. Vsako presečišče nastane kot presek dveh premic, zato je iskano število enako številu parov premic. Število presečišč smo prevedli na iskanje števila parov.

Tudi v zgledu 1.5 iz prejšnjega razdelka smo izbrali podobno pot. Vsaki poti, ki jo napravi kralj, da pride iz spodnjega levega kota v zgornji desni kot, smo priredili natanko določeno "besedo", ki je zgrajene iz črk D (desno), G (navzgor) in $\Delta$ (diagonala). Pa tudi obratno, vsaki taki besede lahko priredimo natanko določeno pot, recimo beseda $\Delta$NGGN pomeni pot A1B2B3C3D3D4 (v šahovski notaciji). Preprost razmislek pove, da je potem iskanih različnih poti toliko, kot je različnih besed z izbranimi črkami. Kasneje se bomo še vrnili na opisan zgled in ugotovili, da je laže izračunati število besed, kot pa šteti narisane poti.

**načelo enakosti**

Vzemimo, da imamo dve **končni** množici reči (elementov): A in B. Če lahko **vsakemu elementu množice A** priredimo **natanko določen element v množici B in obratno**, če lahko **vsakemu elementu v množici B** priredimo **natanko določen element v množici A**, imata množici A in B enako število elementov.

Bolj učeno opisano prirejanje imenujemo **bijektivna** preslikava (funkcija) iz množice A v množico B. V kombinatoriki pa takšno prirejanje med dvema končnima množicama imenujemo **načelo enakosti**.

Če med elementi dveh končnih množic obstaja bijektivna preslikava, imata množici enako število elementov.

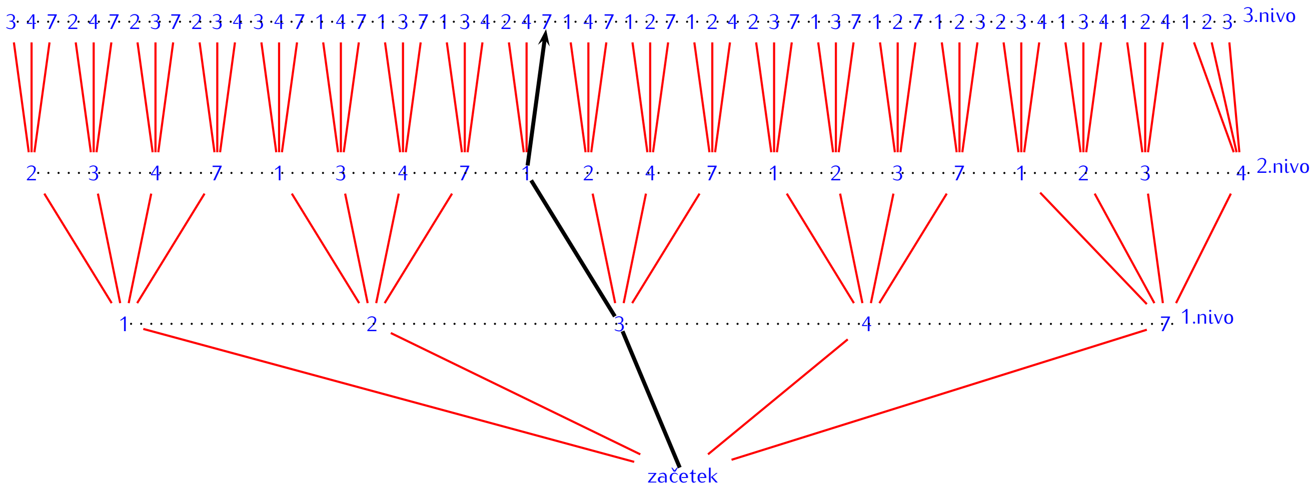
**Zgled 2.1: V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da lahko iz vseh črk besede JANEZ sestavimo 120 besed brez ponavljanje črk. Koliko besed ima črko A pred črko E?**

Množico vseh 120 besed razdelimo v dve množici. V prvi naj bodo tiste, ki imajo A pred E, v drugi pa naj bodo tiste, ki imajo E pred A. Očitno množici nimata skupnega elementa (besede), njuna unija pa je ravno množica vseh besed. Vsakemu elementu iz prve množice priredimo natanko določen element druge množice tako, da zamenjamo položaj črk A in E, ostale črke pa pustimo na istih mestih. Tako, recimo besedi JANEZ iz prve množice priredimo besedo JENAZ, besedi NAJEZ pa besedo NEJAZ. Z opisanim prirejanjem (zamenjava A $\rightleftarrows$ E) priredimo tudi vsakemu elementu druge množice natanko določen element v prvi množici, zato je to prirejanje bijekcija. Torej imata prva in druga množica po enako število besed, ki jih je skupaj 120. Zato je iskanih besed polovico manj, torej 60. ■

**Zgled 2.2: Iz števk 1, 2, 3, 4, 7 sestavljamo trimestna števila z različnimi števkami.**

1. **Koliko števil lahko sestavimo?**
2. **Koliko sodih števil lahko sestavimo?**
3. **Koliko števil, večjih od 300 in manjših od 400, lahko sestavimo?**

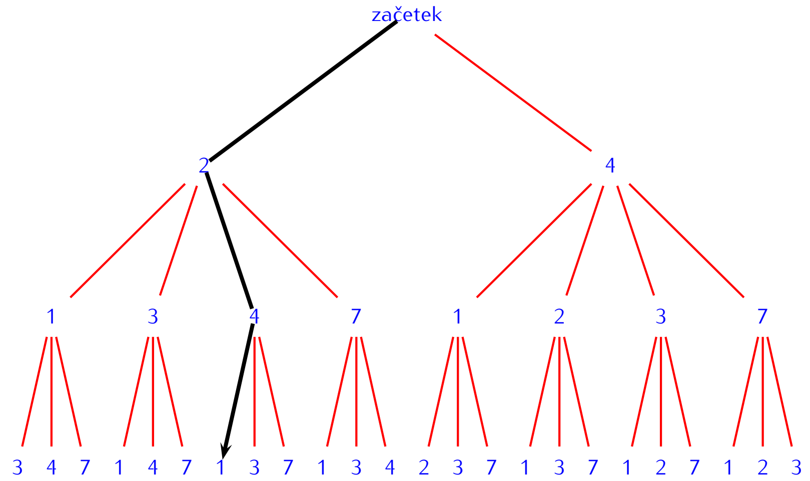
Pri sestavljanju si lahko pomagamo z drevesom. V prvi stopnji izbiranja (prva faza izbiranja, prvi nivo drevesa) izbiramo med petimi števkami in izbrano števko postavimo na mesto stotic (skrajno levo).
Na drugi stopnji izbiranja lahko izbiramo še med štiri števkami, ki so še ostale po ustreznem izboru na prvi stopnji. Tako lahko izbiramo med števkami 2, 3, 4 ali 7, če smo na prvi stopnji izbrali 1 in podobno za druge izbire na prvi stopnji. Izbrano števko postavimo na mesto desetic (srednja števka trimestnega števila).




Slika 7: Drevo odločanja za zgled 1.2.1 in prikaz izbire števila 317

Na tretji stopnji izbiranja lahko izbiramo tri števke v vsaki izbiri števke na drugi stopnji. Izbrano števko postavimo na mesto enic (zadnja, desna števka trimestnega števila).
Število 317 tako sestavimo tako, da na prvi stopnji izberemo števko 3, na drugi stopnji števko 1 in na tretji stopnji števko 7. Število vseh izbir je toliko, kot je vej (povezav) na tretji stopnji izbiranja. V našem primeru je to kar produkt izbir na posameznih stopnjah izbiranja, torej $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. □

Tudi v drugem primeru si pomagamo z drevesom, le da tokrat na prvi stopnji izbiranja izberemo števko, ki jo postavimo na mesto enic, pa še drevo bo obrnili navzdol. Ker moramo sestaviti sodo število, imamo na prvi stopnji le dve mogoči izbiri, števki 2 ali 4.




Slika 8: Drevo sodih števil za zgled 1.2.2 in prikaz nastanka števila 142

Na drugi stopnji izbiranja izberemo bodisi števko na mestu desetic, zato možnost se bomo odločili pri našem izbiranju, bodisi števko na mestu stotic, na tretji stopnji pa potem izberemo obrnemo izbor še za ustrezno tretjo števko.

Število sodih izbir v zgledu izračunamo z enakim postopkom kot v prejšnem primeru, torej, da zmnožimo število možnih izbir v posameznih stopnjah. V našem primeru: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. □

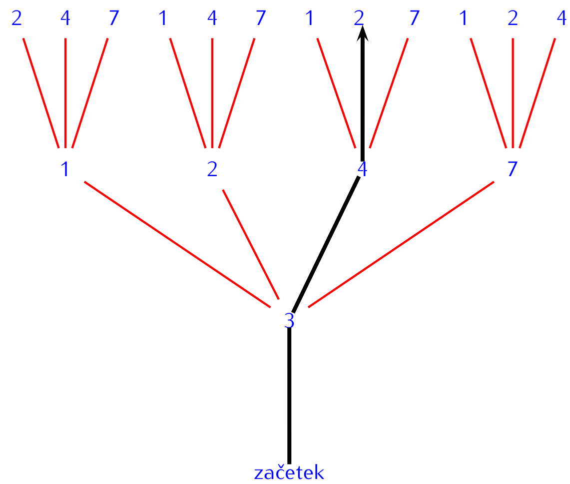
V zadnjem primeru moramo sestaviti število med 300 in 400. Zato mora biti števka na mestu stotic 3, torej le ena izbira. V drugi fazi (stopnji) izberemo števko na mestu desetic, kjer imamo štiri možne števke (1, 2, 4 ali 7), v zadnji fazi (stopnji) pa ostanejo še tri izbire.

Tudi v zadnjem primeru izračunamo število izbir tako, da množimo število izbir v posamezni fazi: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$. ■

**načelo produkta**

Vzorec računanja števila izbir, ki smo ga uporabili v zgledu lahko uporabimo v splošnem pravilu, ki mu pravimo **načelo ali pravilo produkta**, pogosto pa to pravilo imenujemo **osnovni izrek kombinatorike**:

Če elemente, katerih število moramo izračunati, sestavljamo v več stopnjah ali fazah, je število vseh elementov enako produktu števila možnih izbir v posameznih stopnjah ali fazah.




Slika 9: Drevo izbiranja števil med 300 in 400 ter prikaz izbire števila 342

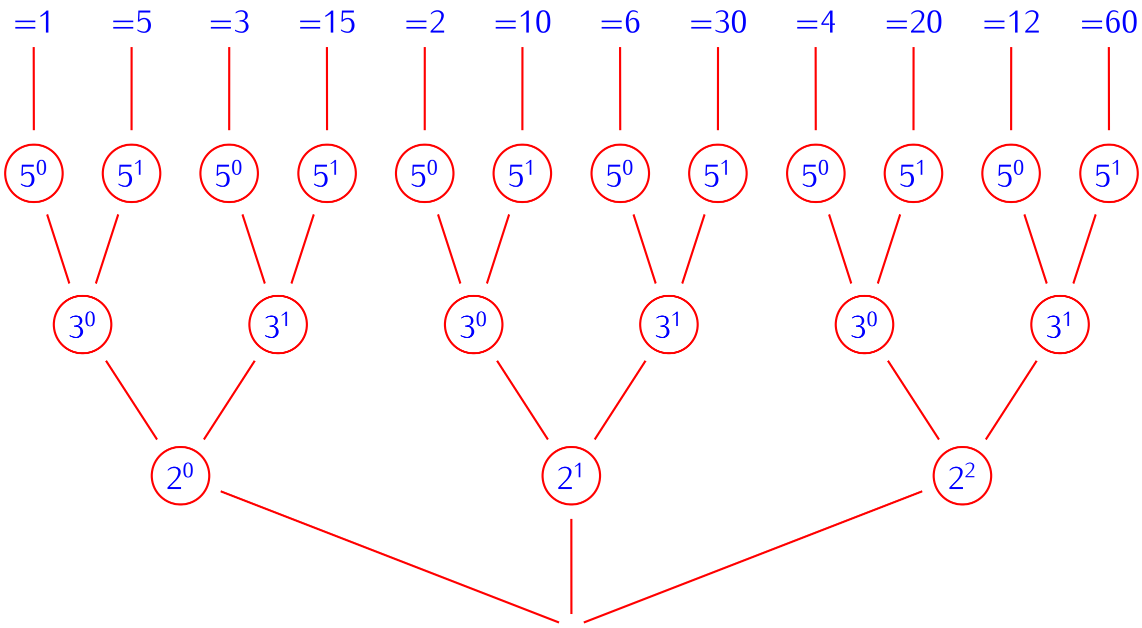
**Zgled 2.3: Reši naslednje tri naloge:**

1. **Kolesarsko ključavnica odpre koda, ki je štirimestno število. Koliko različnih kod obstaja?**

2. **Registerska tablica na vozilih je sestavljena iz oznake mesta, iz dveh črk slovenske abecede, brez šumnikov, ter iz treh številk. Koliko različnih tablic lahko izdajo v Ljubljani?**

3. **Koliko je lihih štirimestnih naravnih števil, ki imajo različne števke v svojem zapisu?**

V vseh treh primerih uporabimo pravilo produkta. V prvem primeru kodo sestavimo tako, da izberemo najprej števko na prvem mestu – 10 možnosti, nato izberemo števko na drugem, tretjem in četrtem mestu, za vsako izbiranje imamo prav tako deset možnih izbir. Zato je vseh možnih kod $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$. □
V drugem primeru najprej izberemo prvo črko (22 možnosti), nato drugo črko (pravtako 22 možnosti), nadaljujemo z izbiranjem trimestnega števila ($10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ možnih izbir). Zato je vseh tablic $22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 484000$. □
Če naj bo štirimestno število liho z različnimi števkami, moramo na mesto enic postaviti liho števko (5 možnosti), na mesto tisočic lahko postavimo osem števk, vse razen števke 0 (drugače bi število ne bilo štirimestno) in števke, ki smo jo izbrali na mestu enic, v tretji fazi izberemo števko na mestu stotic (osem možnosti,tudi 0), v zadnji fazi pa izberemo desetice (sedem možnosti). Zato je vseh iskanih števil $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$. ■




Slika 10: Drevo deliteljev števila 60

**Zgled 2.4: Koliko deliteljev ima število 60?**

Število 60 razcepimo na produkt praštevil: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ in sklepamo, če naj bo neko število delitelj števila 60 ima lahko v svojem praštevilskem razcepu le praštevila 2, 3 ali 5, saj drugače ne deli števila 60. Več kot dveh dvojk nemore imeti, praštevili 3 in 5 pa v delitelju lahko nastopita največ enkrat. Delitelj števila 60 sestavimo tako, da najprej izberemo koliko dvojk bo v njegovem praštevilskem razcepu. Zato imamo **tri** možnosti 0, 1 ali 2 dvojki. V drugi fazi izberemo število trojk, za kar imamo **dve** možnosti 0 ali 1 trojko, pa tudi za praštevilo 5 imamo **dve** možnosti, da petico izberemo ali ne izberemo. Z uporabo pravila produkta izračunamo, da je vseh deliteljev števila 60 enako $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Delitelje lahko prikažemo tudi z drevesom. ■

Ko rešujemo problem z osnovnim izrekom kombinatorike, najprej izberemo pametno strategijo sestavljanja elementov iz podelementov. Recimo, pri sestavljanju trimestnih števil od stotic k enicam moramo paziti, da v prvi fazi izločimo število 0 iz izbiranja, pri sestavljanju lihih trimestnih števil, pa izberemo v prvi fazi števko na mestu enic. Tudi v naslednjih primerih pametna strategija pripomore k enostavni rešitvi problema:

**Zgled 2.5: Reši naslednje naloge z uporabo pravila produkta:**

1. **Maša, Nika, Nik in Jan so med šolskim letom prestopili v isto novo šolo, vsi v tretji letnik. Na novi šoli je 6 tretjih letnikov, 3A, 3B, 3C, 3Č, 3D in 3E, v vsakem**

**pa je dovolj prostora za vse štiri nove učence. Na koliko različnih načinov lahko Mašo, Niko, Nika in Jana razvrstijo po razredih? Na koliko načinov pa jih lahko razvrstijo po razredih, če je v vsakem razredu prostor le za enega?**

2. **Množica $A = \{a, b, c, d\}$ ima štiri elemente. Podmnožice množice $A$ so tudi same množice, ki vsebujejo le elemente iz množice $A$. Med podmnožice štejemo tudi prazno množico $\emptyset$, ki ne vsebuje nobenega elementa. Koliko različnih podmnožic ima množica $A$? Koliko različnih podmnožic pa bi imela množica s petimi, šestimi,$\ldots$, $n-$ timi elementi?**

3. **Koliko členov bo nastalo iz izraza $(x_1 + 1)(x_2 + 1)\ldots(x_n + 1)$, ko izvršimo vsa množenja?**

V prvem primeru je vsakemu učencu priredimo razred, ki ga bo obiskoval. Najprej priredimo razred Maši. Zato imamo na voljo 6 možnosti. Na drugi stopnji izbiranja izberemo razred za Niko, spet imamo na voljo šest možnosti. V tretji fazi izberemo Nikov razred, spet šest možnosti, kolikor jih imamo tudi v četrti fazi, ko izbiramo Janov razred. zato je vseh iskanih razporeditev $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

V primeru, ko je v vsakem razredu prostora le za enega dodatnega učenca, imamo z enakim načinom izbiranja v prvi fazi šset možnih razredov za Mašo, v drugi fazi le pet razredov za Niko, za Nika in Jana pa imamo štiri in tri možne razrede. V tem primeru imamo torej $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ možnih razporejanj. □

Prešteti moramo podmnožice množice $A = \{a, b, c, d\}$. Podmnožico sestavimo tako, da se za vsak element $a, b, c$ in $d$ odločimo ali bo ali pa ne bo v podmnožici. Sestavljanja se lotimo v štirih fazah, v vsaki fazi imamo dva možna izbora: ali dani element, $a, b, c$ ali $d$, postavimo v podmnožico ali ne postavimo. Zato je vseh podmnožic, vključno s prazno (v vsaki fazi izbrani element nismo uvrstili v podmnožico) in celo množico $A$ (v vsaki fazi smo izbrani element uvrstili v podmnožico, enako $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

V primeru, da je v množici $n$ različnih elementov, je vzorec računanja enak, torej se za vsak element množice odločimo ali bo ali pa ne bo v podmnožici. Zato je vseh podmnožic $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-krat} = 2^n$. V posebnem primeru je za $n = 5$ dvaintrideset podmnožic, v primeru šestih elementov pa $2^6 = 64$ podmnožic. □

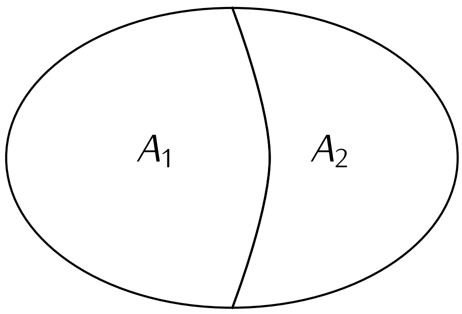
V primeru množenja dveh faktorjev $(x_1+1)(x_2+1)$ je rezultat $x_1x_2+x_1+x_2+1$. Nastale člene smo dobili tako, da smo pomnožili člen iz prvega oklepaja s členom iz drugega oklepaja, zato smo dobili $2 \cdot 2 = 4$ člene. Podobno sklepamo v splošnem primeru: v vsakem oklepaju izberemo enega od členov in izbrane člene pomnožimo. V vsakem oklepaju imamo dve možni izbiri, zato je vseh členov $2^n$. ■

Vzemimo poljubno končno množico $A$, ki naj ima $n$ elementov. Učeno pravimo, da je moč množice $A$ enaka n, z oznakami $|A| = n$. Množico $A$ razdelimo na $m$ paroma **tujih**, s tujko **disjunktnih**, podmnožice $A_1, A_2, \ldots, A_m$. To pomeni, da noben element množice $A$ ni hkrati v dveh podmnožicah razdelitve. Ni se težko prepričati, da potem velja:

**pravilo vsote**

Če lahko množico $A$ lahko razdelimo na paroma tuje podmnožice $A_1, A_2, \ldots, A_m$, je elementov v množici $A$ enako vsoti števila elementov v podmnožicah, v oznakah:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$




$$|A| = |A_1| + |A_2|$$

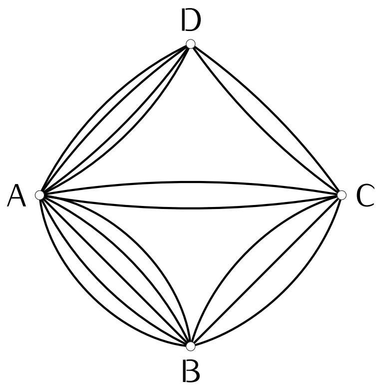
Slika 11: Pravilo vsote za primer razbitja na dve podmnožici

**Zgled 2.6:** **Iz mesta A vodi v mesto B pet poti, iz mesta B v mesto C vodijo 3 poti, iz A vodita C dve poti, iz A v D vodijo štiri poti, iz C v D pa vodita dve poti. Mesti B in D nista neposredno povezani. Če gremo skozi vsako mesto le enkrat, izračunaj, na koliko različnih načinov lahko pridemo iz:**

1. A v C?
2. B v D?

Naslikajmo si zemljevid povezav med A, B, C in D.
Poti iz A v C razbijmo na tri različne tipe poti:

1. lahko pridemo neposredno iz A v C; take poti sta 2,




Slika 12: Zemljevid poti med kraji A, B, C in D

2. lahko pridemo preko B, torej pot $A \to B \to C$; takih poti je po pravilu produkta $5 \cdot 3 = 15$,

3. lahko pridemo preko D, torej pot $A \to D \to C$; takih poti je po pravilu produkta $4 \cdot 2 = 8$.

Uporabimo pravilo vsote in dobimo, da obstaja $2 + 15 + 8 = 25$ različnih poti iz A v C.
□
Tudi poti iz B v D razbijmo na različne tipe poti:

1. lahko pridemo preko A, torej pot $B \to A \to D$; takih poti je po pravilu produkta $5 \cdot 4 = 20$,

2. lahko pridemo preko A in potem C, torej pot $B \to A \to C \to D$; takih poti je po pravilu produkta $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$,

3. lahko pridemo preko C, torej pot $B \to C \to D$; takih poti je po pravilu produkta $3 \cdot 2 = 6$,

4. lahko pridemo preko C in potem A, torej pot $B \to C \to A \to D$; takih poti je po pravilu produkta $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Spet uporabimo pravilo vsote in dobimo, da obstaja $20+20+6+24 = 70$ različnih poti iz B v D. ■

**Zgled 2.7: Koliko petmestnih števil ima vsaj eno dvojko v svojem destiškem zapisu? Koliko % petmestnih števil je takih?**

Negacija ali nasprotje besede **vsaj** je beseda **nobeden** ali **noben**. Besedna zveza vsaj eden pomeni natanko en, natanko dva, in tako dalje, skratka več tipov medseboj tujih elementov, beseda nobeden vsebuje le en tip elementov, vsi tipi elementov pa tvorijo natanko vse elemente. V nalogah takega tipa zato uporabimo različico pravila vsote $|A| = |A_1| + |A_2|$, kjer iščemo enega od sumandov, recimo $|A_2| = |A| - |A_1|$.

V našem primeru je $A$ množica vseh petmestnih števil, njih število pa izračunamo s pravilom produkta: $|A| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$. V množico $A_1$ postavimo vsa petmestna števila, ki ne vsebujejo števke 2, pravilo produkta pravi, da je $|A_1| = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$. Potem je $|A_2| = |A| - |A_1| = 90000 - 52488 = 37512$. Seveda so v $A_2$ iskana petmestna števila, katerih delež v % je $41,68\%$. ■

Ko rešujemo kombinatorično nalogo, med reševanjem izračunamo neka vmesna števila. Velikokrat smo v dvomih, kaj napraviti s temi števili ali jih zmnožiti ali sešteti. Najboljše zdravilo proti takim dvomom je dober razmislek in čimveč rešenih nalog.

# 3 Osnovni izbori

V tem razdelku si bomo ogledali nekatere tipe izborov, ki se pogosto pojavljajo v kombinatoričnih problemih.

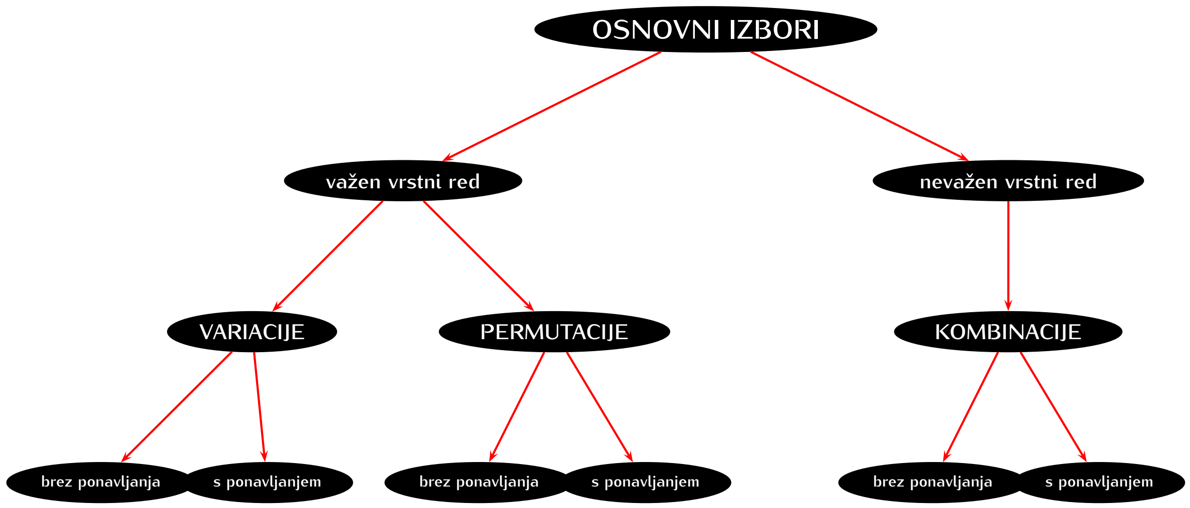
permutacije
variacije

Pri nekaterih izborih je važen vrstni red sestavljanja gradnikov v element. Če recimo sestavljamo besede, beseda EVA pomeni nekaj drugega kot beseda AVE kljub temu, da v obeh besedah nastopajo iste črke A, E in V. Tudi, če sestavljamo števila moramo paziti na vrstni red, recimo za 250 denarnih enot si lahko kupimo manj, kot za 520 istih denarnih enot. Izborom, pri katerih je **važen** vrstni red sestavljanja, pravimo **permutacije** (permutare v latinščini pomeni zamenjati, premešati) ali **variacije**.

kombinacije

Pri nekaterih izborih pa vrstni red izbiranja ni važen. Recimo, če učitelj v razredu izbere tri dijake, ki jih bo izprašal (vse tri izbere pred izpraševanjem), je pomebno le, kateri trije bodo izprašani ne pa, kateri je bil izbran prvi, kateri drugi in kateri tretji. Takim tipom izborov, pri katerih vrstni red izbiranja **ni važen**, pravimo **kombinacije**.

Izbore ločimo tudi po tem ali se gradniki izbora lahko **ponovijo** ali se **ne ponovijo**. Recimo, če pri sestavljamo trimestna števila brez dodatnih omejitev se lahko gradniki (=števke) ponovijo, če pa sestavljamo trimestna števila z različnimi števkami, se gradniki ne ponovijo.




Slika 13: Pregled osnovnih izborov glede na vrstni red in glede na ponavljanje gradnikov

## 3.1 Permutacije brez ponavljanja

Začnimo z nekaj primeri

**Zgled 3.1: Reši naslednje naloge:**

1. **Zapiši vse mogoče besede z dolžino 3 črk, ki so sestavljene iz črke besede EVA, vsako črko v besedi, pa lahko uporabimo le enkrat.**
2. **Na neki zasebni šoli imajo vsak delovni dan (ponedeljek – petek) pet ur pouka tako, da je vsako uro na urniku drugačen predmet. Vsak dan je urnik drugačen od ostalih dni. Na šoli poučujejo pet predmetov, in sicer: materinščina, tuji jezik, matematika, zgodovina z družboslovjem in naravoslovje. S poukom končajo, ko so izčrpali vse mogoče urnike. Nekega leta so začeli s poukom v ponedeljek, 1. januarja. Kdaj bodo končali s poukom, če na šoli ne praznujejo nobenega praznika in nimajo počitnic, tisto leto pa je bilo prestopno?**
3. **Koliko je vseh možnih bijektivnih ("ena na ena") preslikav množice $\{1, 2, 3, 4\}$ samo vase?**

V prvi nalogi besede kar zapišemo (uredimo jih slovarsko, torej po abecedi):

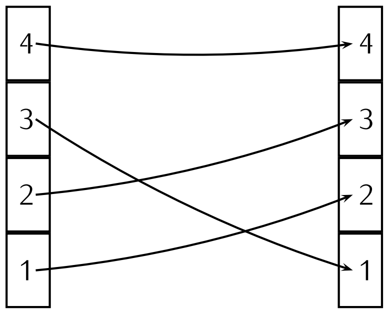
| | | |
|---|---|---|
| AEV | EAV | VAE |
| AVE | EVA | VEA |

Kako preverimo, da kakšne besede nismo izpustili? Zamislimo si, da imamo v vrsti postavljene tri predale, oštevilčene z 1, 2 in 3 od leve proti desni: $\underset{1\;2\;3}{\square\square\square}$. Iz črk E, V, A iskano besedo sestavimo v treh fazah: v prvi izberemo črko, ki jo bomo postavili v prvi predal. Za to imamo 3 možne izbire. V drugi fazi izberemo izmed preostalih dveh črk eno, torej imamo dve možni izbiri. V zadnji fazi postavimo v tretji predal črko, ki nam je še ostala. Uporabimo pravilo produkta in ugotovimo, da je iskanih besed $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Torej smo zapisali vseh 6 možnih besed. Posamezno besedo v izboru imenujemo permutacija črk E, V, A. $\square$

Vzorec tvorjenja besed v prvem primeru, uporabimo tudi za izdelavo urnikov v drugem primeru. Tokrat v vrsto postavimo pet oštevilčenih predalov: $\underset{1\,2\,3\,4\,5}{\square\square\square\square\square}$. Urnik za posamezni dan pripravimo v petih fazah: v prvi izberemo predmet za prvo uro (prvi predal), v drugi fazi postavimo enega izmed ostalih štirih predmetov v drugi predal in tako dalje. Uporabimo pravilo produkta in ugotovimo, da imamo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različnih urnikov. Tudi v tem primeru posamezni urnik imenujemo permutacija petih omenjenih predmetov. Ker imamo na teden 5 urnikov, vse urnike opravimo v 24 tednih ($= 120 : 5 = 24$). Ugotovimo, da bo celotno šolsko leto trajalo 23 tednov in še pet dni, ker zadnji teden traja le pet dni, kar znese v dnevih $23 \cdot 7 + 5 = 166$ dni. Zapored seštejmo število dni v mesecih januar, februar, marec, april in maj in opazimo, da nam do 166 zmanjka 14 dni $(31 + 29 + 31 + 30 + 31 = 152)$. Zato s poukom končamo 14. junija. $\square$

**Bijektivna** preslikava med dvema množicama $A$ in $B$ preslika različna elementa množice $A$ v različna elementa množice $B$ (opisano lastnost imenujemo **injektivnost**), vsak element množice $B$ pa je slika nekega elementa iz $A$ (opisano lastnost imenujemo **surjektivnost**). Ni se težko prepričati v to, da obstajajo bijektivne preslikave med končnima množicama le v primeru, ko imata množici enako moč, torej enako število elementov.

V našem (tretjem) primeru moramo poiskati število bijektivnih preslikav iz množice $\{1, 2, 3, 4\}$ v samo vase, torej v $\{1, 2, 3, 4\}$. Spet si pomagamo s predali, tokrat z dvojnimi.



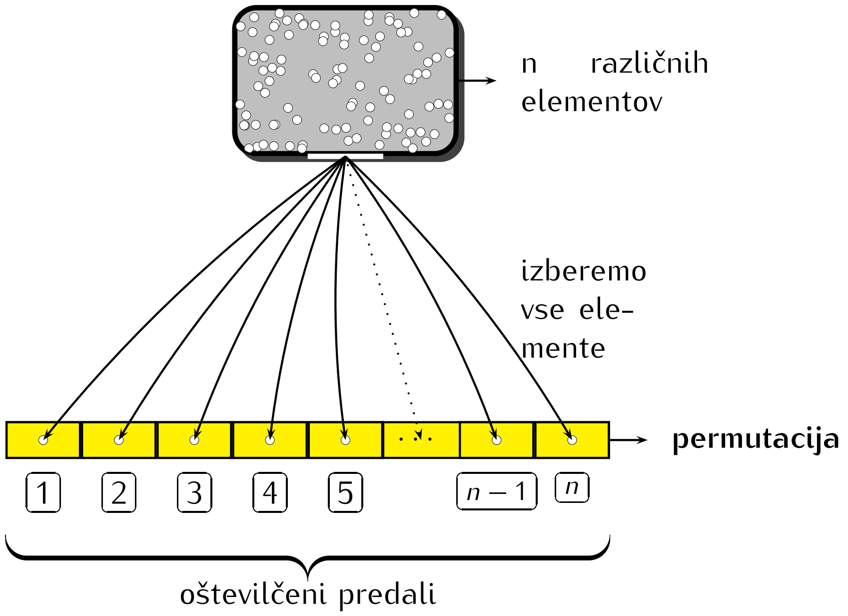

Slika 14: Grafična predstava bijekcije, permutacije

V predale postavimo elemente obeh množic, bijekcijo pa prikažemo s prirejanjem. Na sliki je prikazano prirejanje $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 4$. Poljubno bijekcijo sestavimo v več fazah: v prvi fazi izberemo element, ki se preslika v prvi predal, v drugi fazi izberemo element, ki gre v drugi predal, in tako dalje. Ker so vsi elementi različni in štirje, je vseh prirejanj (bijekcij) in s tem tudi vseh bijekcij enako $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Za konec dodajmo, da bijekcijo množice same vase imenujemo permutacija. Permutacijo na sliki zapišemo v obliki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ali pa s cikli $(123)(4)$. $\blacksquare$

V vseh treh primerih imamo podoben vzorec sestavljanja objekta. Nekje, recimo v skladišču, imamo spravljenih $n$ različnih elementov (gradnikov). Elemente enega za drugim jemljemo iz skladišča in jih polagamo v vrsto predalov, ki so oštevilčeni od 1 do $n$. V prvi predal položimo prvi izbrani element, v drugi predal drugi izbrani element in tako naprej do zadnjega, $n-$ tega predala, kamor položimo zadnji preostali element iz skladišča. V predalih dobljeno zaporedje elementov imenujemo **permutacija** reda $n$.

Kako izračunamo število permutacij $n$ različnih elementov? V primerih smo uporabili pravilo produkta, zato ga uporabimo tudi v splošnem primeru:

**število permutacij brez ponavljanja**




Slika 15: Nastanek permutacije

- V prvi fazi izberemo iz skladišča element in ga položimo v prvi predal. Zato imamo $n$ možnih izbir, v skladišču pa ostane $n-1$ elementov.
- V drugi fazi spet izberemo iz skladišča element in ga položimo v drugi predal. Za to izbiro imamo sedaj $n-1$ možnih elementov, v skladišču pa je element manj, torej je še $n-2$ elementov.
- Postopek nadaljujemo, dokler je še kaj elementov. Za zadnji, $n-$ ti, predal imamo le še eno možnost.
- Če označimo s $P_n$ število vseh permutacij in uporabimo pravilo produkta, dobimo, da je

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Produkt naravnih števil od 1 do $n$, torej $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ označimo $n!$ in ga imenujemo $n$ **fakulteta**, $n$ **faktorsko** ali pa kar na hitro $n$ **klicaj**. Opremljeni z novo oznako zapišemo, da je število permutacij $n$ različnih elementov:

**fakulteta števila**

$$\boxed{P_n = n!}$$

**Zgled 3.2: Reši naslednje naloge s fakultetami:**

1. **Izračunaj** $2!, 3!, 4!, 5!$ **in** $10!$.

2. **Izračunaj vrednost izraza** $\frac{(a+1)!}{b} - \frac{b}{(a-1)!}$, **če veš, da je** $a! = b$.

3. **Izračunaj** $\frac{8!+7!}{6!+5!}, \frac{81!+80!}{79!+78!}$ **in poenostavi izraz** $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{n!+(n-1)!}$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ in $10! = 3628800$. Zadnji račun smo opravili kar z žepnim računalom, s tipko $\boxed{n!}$ . □

V drugem primeru uporabimo lastnost fakultete ! (**rekurzijska** lastnost):

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{=n!} = (n+1) \cdot n!$$

Zato je $\frac{(a+1)!}{b} = \frac{(a+1)\cdot a!}{b} = \frac{(a+1)\cdot b}{b} = a+1$ in $\frac{b}{(a-1)!} = \frac{a!}{(a-1)!} = \frac{a\cdot(a-1)!}{(a-1)!} = a$.
Tako je iskana vrednost enaka $(a+1) - a = 1$. □

Vrednost prvega izraza lahko izračunamo kar z računalom: $\frac{8!+7!}{6!+5!} = 54$, vrednost drugega izraza pa nekateri žepni računalniki zaradi prevelikih števil ne morejo izračunati. Tako je $80! = 7,156945704626380229481153372318 7 \cdot 10^{118}$, kar pomeni število s 118 mesti. Zato v tem in naslednjem primeru izkoristimo rekurzijsko lastnost fakultete:

$$\frac{81!+80!}{79!+78!} = \frac{80!\cdot(81+1)}{78!\cdot(79+1)} = \frac{80\cdot 79\cdot 82}{80} = 79\cdot 82 = 6478$$

Še zadnji izraz:

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{n!+(n-1)!} = \frac{(n+1)!\cdot((n+1)+1)}{(n-1)!\cdot(n+1)} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n+2)}{n+1} = n(n+2)$$

V drugi obliki je poenostavljena vrednost izraza enaka $n^2 + 2n$. ■

Zapomnimo si:

- Za naravno število $n \in \mathbb{N}$ število $n!$ izračunamo tako, da pomnožimo zapored vsa naravna števila od 1 do vključno n.
- Število $n!$ pomeni, na koliko različnih načinov lahko $n$ reči postavimo v vrsto, ki jo gledamo recimo, od leve proti desni. Tako lahko 5 ljudi posedemo na pet določenih stolov v vrsti na $5! = 120$ načinov.

**Zgled 3.3:** **Iz črk besede TRIGLAV sestavljamo nove besede. Vsakič uporabimo vse črke in vsako le enkrat.**

1. **Koliko različnih besed lahko sestavimo?**
2. **Koliko je takih besed, ki se začno s črko T in končajo s črko V?**
3. **Koliko je takih besed, v katerih vsi soglasniki stojijo skupaj?**
4. **Koliko je takih besed, ki vsebujejo besedo LIRA?**

Vsaka beseda je permutacija črk, ki jo sestavljajo. V besedi TRIGLAV imamo sedem različnih črk, zato je $7! = 5040$ različnih permutacij iz teh črk. □

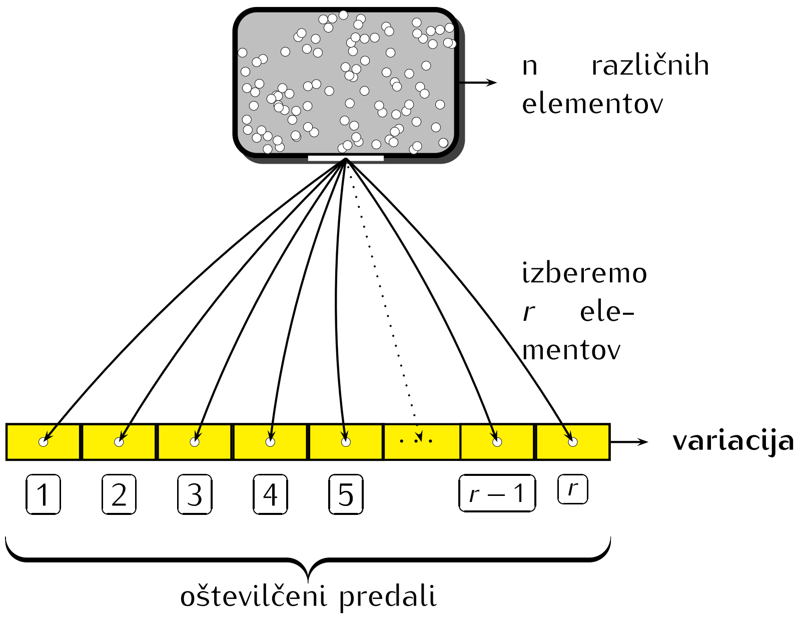
Iskane besede tvorimo v fazah s predali. Najprej postavimo T v začetni predal ($\boxed{T}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}$), za kar je ena sama možnost. V drugi fazi postavimo črko V v zadnji predal ($\boxed{T}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{\phantom{T}}\boxed{V}$), za kar imamo prav tako eno samo možno izbiro. V tretji fazi moramo preostalih 5 črk razporediti v pet vmesnih predalov za kar imamo $5! = 120$ možnosti. Torej je vseh iskanih besed $1 \cdot 1 \cdot 5! = 120$. □

Spet izbiramo v dveh fazah. Najprej vzememo vse soglasnike T, R, G, L, V in jih premešamo, zato imamo $5! = 120$ možnosti. Izbrano permutacijo soglasnikov obravnavamo kot nov element ( soglasniki ). V drugi fazi premešamo še tri elemente: soglasnika I in A ter v paket zavito permutacijo soglasnikov soglasniki . Tako v drugi fazi izbiramo med $3! = 6$ možnostmi. Po osnovnem izreku kombinatorike, je potem iskanih besed $120 \cdot 6 = 720$. □

Sestavimo besedo LIRA, jo zavijemo v paket. V drugi fazi permutiramo paket LIRA in še preostale tri črke T, G, V, torej štiri elemente. Zato imamo $4! = 24$ možnost, kolikor je tudi iskanih besed. ■

## 3.2 Variacije brez ponavljanja

Vzemimo, da imamo $n$ različnih gradnikov, s katerimi gradimo element, ki je zgrajen iz $r$ gradnikov. Očitno je $r \leq n$. Recimo, da je v končnem elementu važen vrstni red gradnikov. Element (izbor) zgradimo na podoben način kot smo v prejšnjem razdelku zgradili permutacijo. Razlika je le v tem, da smo pri permutaciji porabili vse gradnike, ki smo jih imeli v skladišču, v tem primeru pa jih porabimo manj, le $r$. Nastali izdelek, element imenujemo variacija reda $r$ med $n$ elementi, včasih pa tudi $r-$ permutacija $n$ elementov.




Slika 16: Nastanek variacije reda $r$

Število variacij reda $r$ izračunamo s pravilom produkta s pomočjo predalov. V prvi fazi izberemo gradnik za prvi predal, za kar imamo $n$ možnih izborov, gradnik za drugi predal lahko izberemo na $n-1$ načinov, za tretji predal na $n-2$ načinov in tako naprej. Z malo razmisleka ugotovimo, da za $r-$ ti predal izbiramo med $n-r+1$ preostalimi gradniki. Označimo z $V_n^r$ število variacij reda $r$ med $n$ elementi, $r \leq n$. Potem je

**število variacij**

$$\boxed{V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Izraz s fakultetami dobimo takole: izrazu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ manjkajo do $n!$ faktorji v izrazu $(n-r)!$. Seveda moramo izraz potem, ko smo ga pomnožili z $(n-r)!$, z istim izrazom tudi deliti.

Permutacijo $n$ elementov lahko obravnavamo kot variacijo reda $n$. Zato je $P_n = V_n^n$, potem pa je $n! = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$ in tako

$$\boxed{0! = 1}$$

Izraz $0! = 1$ privzamemo kot definicijo, saj $0!$ nima nobene praktične vrednosti.

**Zgled 3.4: Reši enačbi $V_x^2 = 380$ in $7 \cdot V_x^3 = 6 \cdot V_{x+1}^3$**

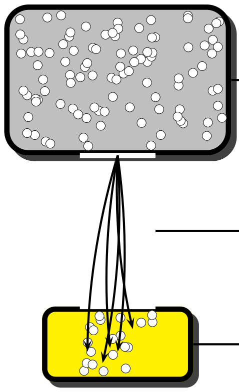
Če je red variacije majhen (1, 2, 3), uporabimo kar osnovno formulo za število variacij $V_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$. Drugače povedano, faktorjev v produktu je toliko, kot je red, začnemo s številom elementov in faktorje zmanjšujemo po 1, torej je $V_x^2 = x(x-1)$ in zato naša enačba postane kvadratna enačba $x^2 - x - 380 = 0$, ki ima v našem primeru rešitev $x = 20$, kajti $x$ je število elementov, ki ne more biti negativno. □

V drugem primeru pridelamo bolj običajno enačbo $7x(x-1)(x-2) = 6(x+1)x(x-1)$. Ker rešitvi $x = 0$ in $x = 1$ ne ustrezata nalogi, lahko enačbo okrajšamo s faktorjema $x$ in $x - 1$. Dobimo preprosto linearno enačbo $7x - 14 = 6x + 6$ in tako, da je tudi v tem primeru $x = 20$. ■

## 3.3 Kombinacije brez ponavljanja

Na koliko načinov lahko iz skupine petih ljudi izberemo tri? To je tipična naloga, v katero so vpletene kombinacije. Pri kombinacijah **vrstni red izbiranja ni važen**, pomembno je samo kateri elementi so izbrani. Vzemimo, da ljudi označimo zapored s črkami A, B, C, D in E. Ker vrstni red izbiranja ni važen, je izbira ABC enaka izbiri BCA, kar pri variacijah v prejšnjem razdelku ni bilo res. Vsako izbiro treh ljudi izmed petih, pri kateri vrstni red ni važen, imenujemo **kombinacija** reda 3 med 5 elementi. Naše kombinacije slovarsko urejene zapišimo: ABC, BCD, CDE, ABD, BCE, ABE, BDE, ACD, ACE, ADE. Vsaka od kombinacij ima tri elemente. Te tri elemente lahko permutiramo in vsaka taka permutacija, ki jih je $3! = 6$, je variacija reda 3 med petimi elementi. Število kombinacij reda 3 med petimi elementi označimo s $C_5^3$. Črko **C** si v tem zapisu lahko zamišljamo tudi kot začetno črko angleške besede **choose** (izbrati); torej $C_5^3$ pomeni, da med petimi element izberemo (choose) tri elemente. Potem velja $V_5^3 = 3! \cdot C_5^3$, zato je $C_5^3 = \frac{V_5^3}{3!}$. Na žepnem računalu število kombinacij izračunamo s tipko $\boxed{nCr}$, v našem primeru pritisnemo tipke $\boxed{5}\,\boxed{nCr}\,\boxed{3}$

**kombinacija reda $r$**




Slika 17: Nastanek kombinacije reda r med n elementi, $r \leq n$

Tudi v splošnem primeru imenujemo neurejen izbor (vrstni red ni važen) $r$ elementov med $n$ elementi **kombinacija reda** $r$. Število vseh kombinacij označimo z $C_n^r$, izračunamo pa ga na podoben način, kot smo to storili v posebnem primeru za $n = 5$ in $r = 3$, torej je

$$\boxed{C_n^r = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

V zadnjem delu gornje enačbe smo uporabili v prejšnjem razdelku izpeljano formulo za število variacij. Za število kombinacij uporabljamo tudi drugo oznako, **binomski simbol** $\binom{n}{r}$ (izgovori: "**n** nad **r**"), torej je $C_n^r = \binom{n}{r}$.

Binomski simbol izračunamo najlaže s pomočjo formule $\binom{n}{r} = \frac{V_n^r}{r!}$, če le red $r$ ni prevelik. Recimo $\binom{15}{5}$ izračunamo tako, da v nastavljeni ulomek v imenovalec zapišemo produkt števil od 1 do 5 ($= r!$), v števec pa enako število faktorjev od 15 nazaj ($V_n^r$, število predalov variacije), torej:

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

V primeru, ko je red kombinacije velik, večji od polovice števila elementov, uporabimo za računanje binomskega simbola lastnost **simetrije** binomskih simbolov. Če uporabimo za izračun binomskega simbola formulo s fakultetami $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ in namesto reda $r$ uporabimo red $n - r$, dobimo za binomski simbol enako vrednost, saj je

**simetrija binomskega simbola**

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot (n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot n!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Tako $\binom{20}{17}$ izračunamo: $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140.$
Simetrijo lahko pojasnimo tudi brez računanja. Če moramo med 20 ljudmi izbrati skupino 17 ljudi ($\binom{20}{17}$ skupin), je takih izborov enako, kot število izborov tistih, ki ne bodo v skupini, torej število izborov treh med dvajsetimi ($\binom{20}{3}$ izborov).

Zapomnimo si: Za naravni števili $n,\ r \in \mathbb{N}$:

- Oznaka $\binom{n}{r}$ pomeni število kombinacij reda $r$ med $n$ elementi. Tako $\binom{6}{3}$ pomeni, da na toliko različnih načinov lahko med šestimi rečmi izberemo tri reči, pri tem pa vrstni red izbiranja ni pomemben, pomembne so le reči v izboru.
- Število $\binom{n}{r}$ izračunamo z eno od formul $\binom{n}{r} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}$ ali $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- Število $\binom{n}{r}$ ima lastnost simetrije, kar pomeni, da je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, recimo v primeru $n = 30$ in $r = 25$ je $\binom{30}{25} = \binom{30}{5}$.

**Zgled 3.5: Reši naslednje enačbe, ki so povezane z binomskimi simboli:**

1. $C_{y+1}^{y-2} = 20$
2. $\binom{x}{x-3} + \binom{x}{4} = 11\binom{x+1}{x-1}$
3. $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$

Ker je $(y+1)-(y-2) = 3$, dana enačba postane enačba $C_{y+1}^{3} = 20$, ta pa $\frac{(y+1)y(y-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Enačbo uredimo do enačbe: $y^3 - y - 120 = 0$, ki jo rešimo, recimo s Hornerjevim algoritmom za $y = 5$. Kvadratna enačba $y^2 + 5y + 24 = 0$, ki nastane v Hornerjevi shemi, pa nima realnih rešitev. Zato je edina rešitev $y = 5$. $\square$

Tudi drugo enačbo s simetrijsko lastnostjo preoblikujemo v enačbo $\binom{x}{3} + \binom{x}{4} = 11\binom{x+1}{2}$, to pa v enačbo $\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = \frac{11(x+1)x}{2}$. Ker $x \neq 0$, enačbo delimo z $x$ in pomnožimo s 24. Dobimo enačbo $x^3-2x^2-133x-130 = 0$. Ena njene rešitev je $x = 13$, razstavljanje s hornerjevim algoritmom pa nam potem da še faktor $x^2+11x+10$, ki ima ničli (preostali rešitvi enačbe) $x = -1$ in $x = -10$. Ker je $x$ naravno število, zadnji dve rešitvi odpadeta. Torej je edina rešitev $= 13$. $\square$

V zadnjem primeru upoštevanje simetrije ne pripelje nikamor, ker neznaka ostane v redu. Zato zapišimo binomske simbole v enačbi s fakultetami, torej:

$$\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!}$$

Odpravimo ulomke, enačbo delimo z $(2n)!$ in dobimo

$$(n+1) \cdot n! \cdot n! = n \cdot (n+1)! \cdot (n-1)!$$

Ker je $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ in $n \cdot (n-1)! = n!$, je zadnja enačba in tako tudi prejšnja dejannsko identična enačba $(n+1)! \cdot n! = (n+1)! \cdot n!$, zato so rešitve prvotne enačbe vsa naravna števila. ■

**Zgled 3.6: V skupini 4 moških in 7 žensk izberemo skupino ljudi. Na koliko načinov lahko to storimo, če delegacijo sestavlja**

1. **pet ljudi, od katerih so tri ženske?**
2. **katerokoli število ljudi, le da mora biti moških in žensk enako?**
3. **pet ljudi, med katerimi sta vsaj dve ženski?**
4. **pet ljudi, med katerimi mora biti vnaprej določena ženska?**
5. **šest ljudi tako, da so v delegaciji tri ženske in trije moški, natanko določen moški in natanko določena ženska pa ne moreta biti skupaj v delegaciji?**

V prvi delegaciji morajo biti tri ženske in dva moška. Tri ženske med sedmimi lahko izberemo na $\binom{7}{3}$ načinov, dva moška pa med štirimi na $\binom{4}{2}$ načinov. Po pravilu produkta je potem vseh delegacij $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 35 \cdot 6 = 210$. □

Delegacije v drugi nalogi razdelimo v štiri disjunktne razrede: ena ženska (Ž) in en moški (M) (1Ž1M), 2Ž2M, 3Ž3M in 4Ž4M. V vsakem razredu izračunamo število možnih delegacij s pravilom produkta, s pravilom vsote pa izračunamo vse možne iskane delegacije:

$$\binom{7}{1}\binom{4}{1} + \binom{7}{2}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{4}\binom{4}{4} = 329$$

Torej je iskanih delegacij 329. □

Vse delegacije, v katerih sta vsaj dve ženski, lahko razdelimo v disjunktne (tuje) skupine: 2Ž3M, 3Ž2M, 4Ž1M in 5Ž0M. Število delegacij v posamezni skupine je potem: $\binom{7}{2}\binom{4}{3} =$

84, $\binom{7}{3}\binom{4}{2} = 210$, $\binom{7}{4}\binom{4}{1} = 140$ in $\binom{7}{5} = 21$. Vseh iskanih delegacij je potem $84 + 210 + 140 + 21 = 455$.

Premisli, zakaj je naslednji način reševanja te naloge napačen. V delegaciji morata biti vsaj dve ženski, zato najprej v prvi fazi izberemo dve ženski ($\binom{7}{2} = 21$ možnosti), v drugi fazi pa med preostalimi ženskami in moškimi (9 ljudi) izberemo še tri, za kar imamo $\binom{9}{3} = 63$ možnosti. Po pravilu produkta je potem delegacij $21 \cdot 63 = 1296$, kar je mnogo več kot 455. $\square$

Odgovor: Recimo, da so v izbrani delegaciji tri ženske A, B, C in dva moška X, Y. To delegacijo bi po opisanem načinu lahko izbrali na tri različne načine: (AB)(CXY), (AC)(BXY), (BC)(AXY), po prvem načinu pa na en sam način (ABC)(XY). Torej po drugem načinu se nekatere kombinacije ponovijo večkrat med urejenim izbiranjem.

Če v delegacijo uvrstimo vnaprej določeno žensko, moramo izbrati še štiri ljudi izmed 10, ki nam še ostanejo. To pa lahko storimo na $\binom{10}{4} = 210$ načinov. Zato je iskanih delegacij 210. $\square$

Uporabimo različico pravila vsote, da je **del** enak **celota - drugi del**. Vseh delegacij s tremi ženskami in tremi moškimi je $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 140$. Takih delegacij, v katerih sta hkrati določena ženska in določeni moški, je enako $\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{2} = 45$. Iskanih delegacij je $140 - 45 = 95$. $\blacksquare$

## 3.4 Variacije s ponavljanjem

**Zgled 3.7:** Reši naslednje naloge!

1. Koliko besed iz sedmih črk lahko sestavimo s črkami slovenske abecede (25 črk)?
2. Izdelati moramo sedemmestno geslo, ki je sestavljeno iz vsaj vsaj ene črke in vsaj ene števke. Izbiramo lahko med črkami A, B, C, G, J, M, R in Z. Med števkami imamo na voljo le števko 3. Koliko možnih gesel lahko sestavimo, če se znaki ne smejo ponavljati?
3. Koliko pa je gesel iz prejšnje naloge, če se znaki lahko ponavljajo?

Vse tri naloge so povezane z variacijami. Spomnimo se, da so variacije urejeni izbori nekega določenega števila gradnikov (red variacije) iz nabora gradnikov. Število variacij izračunamo z uporabo pravila produkta.

Tudi v primeru, ko se gradniki pri izbiranju lahko ponovijo, govorimo o variacijah, le da v tem primeru s ponavljanjem. Število variacij s ponavljanjem prav tako računamo z osnovnimi orodji kombinatorike. **variacije s ponavljanjem**

V prvem primeru izbiramo sedem elementov med 25 elementi. V primeru, ko se črke ne smejo ponavljati imamo variacije brez ponavljanja, v našem primeru se lahko črke ponovijo. Besedo sestavimo v sedmih fazah, od leve proti desni. V vsaki fazi imamo 25 možnih izbir, zato je vseh iskanih besed enako $25^7 = 6103515625$. □

V drugem primeru moramo številko 3 vnesti v geslo, le da ne vemo na katero mesto. Zaradi tega v prvi fazi v geslu izberemo mesto (predal) za števko 3 (7 možnih izborov), v drugi fazi pa šest izmed osmih črk postavimo v šest preostalih mest v geslu brez, da bi se črke ponavljale. To lahko storimo na $V_8^6 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$. Vseh gesel je $7 \cdot 20160 = 141120$. □

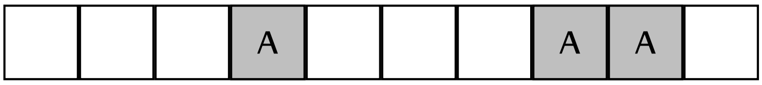
V tretjem primeru se lahko znaki ponavljajo, zato je vseh takih gesel $9^7$ (v vsaki fazi izbiramo med 9 znaki, 8 črkami in 1 številko). Vendar moramo paziti, da mora v geslu biti vsaj ena črka in vsaj ena številka. Pa izračunajmo najprej taka gesla, v katerih so same črke ali same števke. Gesel, v katerih so same črke je $8^7$, geslo s samimi števkami 3 pa je eno samo. Zato je iskanih gesel $9^7 - 8^7 - 1 = 2685816$. ■

Naj bo $n$ število različnih gradnikov, $r$ pa število gradnikov, ki jih izberemo in položimo enega za drugim v $r$ predalov, pri tem pa se gradniki lahko ponavljajo. Dobljen element z $r$ gradniki imenujemo **variacija** reda $r$ s **ponavljanjem** gradnikov. Če z ${}^pV_n^r$ označimo število vseh takih variacij, je: $\boxed{{}^{p}V_n^r = n^r}$

## 3.5 Permutacije s ponavljanjem

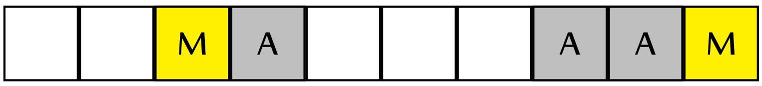
Permutacije smo opisali kot urejene izbore nekih gradnikov. Ugotovili smo, da je vseh permutacij $n$ gradnikov enako $n!$, če se gradniki ne ponavljajo. Tako je vseh besed, ki jih sestavimo iz vseh črk besede SLOVENIJA enako 9!. Kaj pa če se gradniki v permutaciji lahko ponovijo? Recimo, koliko besed lahko sestavimo iz vseh črk besede MATEMATIKA? Vsakič, ko v besedi SLOVENIJA zamenjamo položaj dveh črk, dobimo novo besedo, permutacijo. Če pa v besedi MATEMATIKA zamenjamo položaj dveh črk A, se beseda (permutacija) ne spremeni, torej se nekatere permutacije ponovijo.

Kako izračunati vse možne permutacije besede MATEMATIKA? Besedo MATEMATIKA sestavlja 10 črk: 3 črke so A, dve črki M, dve črki T in po ena črka E, I in K. Permutacijo bomo sestavili v več fazah, pomagali pa si bomo s predali. Črke bomo zapored polagali v deset predalov, začeli bomo s črko A. Med 10 predali bomo izbrali tri in v izbrane postavili črke A. Zato imamo $\binom{10}{3} = 120$ možnosti.




Slika 18: Izberemo tri predale za A

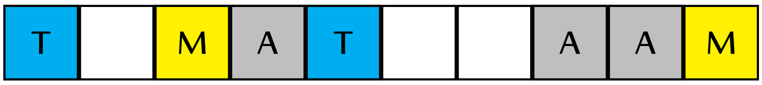
V drugi fazi med ostalimi sedmimi predali izberemo dva in vanju položimo črki M, za kar imamo $\binom{7}{2} = 21$ možnosti.



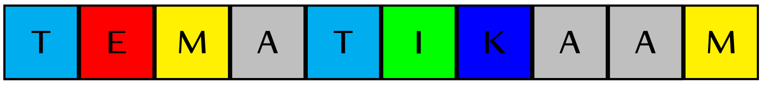

Slika 19: Med preostalimi predali v dva izbrana položimo črko M

V tretji fazi izberemo med preostalimi petimi predali dva in vanju položimo črki T, za kar imamo $\binom{5}{2} = 10$ možnosti.
V zadnjih treh fazah izberemo zapored predale za črke E, I in K. Zato imamo zapored $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{2}{1} = 2$ in $\binom{1}{1} = 1$ možnosti.

Število permutacij izračunamo s pravilom produkta. Binomske simbole, ki nastopajo v računu, zapišemo s fakultetami.




Slika 20: V tretji fazi izberemo položaje za črki T




Slika 21: V zadnjih treh fazah v predale položimo E, I in K

$$\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{1!}{1!\cdot 0!} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$$

Formulo, ki je nastala na koncu, na desni strani enačbe, posplošimo. Vzemimo, da premešamo, permutiramo $n$ gradnikov, od katerih se nekateri od gradnikov pojavijo večkrat, recimo $n_1, n_2, \ldots, n_k$ krat. Seveda je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$. S podobnim sklepanjem, kot smo to storili v primeru besede MATEMATIKA, izračunamo, da je vseh permutacij enako

**permutacije s ponavljanjem**

$$\boxed{P_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}}$$

**Zgled 3.8: Koliko različnih besed lahko sestavimo iz vseh črk besede:**

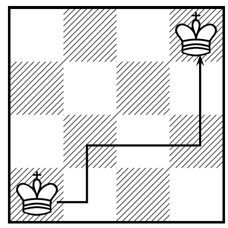
1. BANANA,
2. OUAGADOUGOU,
3. MISSISSIPPI in
4. MISSISSIPPI, če vse štiri črke S ne smejo stati skupaj

V prvih treh primerih uporabimo izpeljano formulo za permutacije s ponavljanjem. Za besedo BANANA, ki ima 6 črk, je permutacij $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$. V primeru besede OUAGADOUGOU, ki je mimogredo ime glavnega mesta afriške države Burkina Faso (prej Gornja Volta), je besed $\frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = 277200$, MISSISSIPPI premore $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!} = 1152$. Črke S v permutaciji stojijo skupaj v $\frac{8!}{4!\cdot 2!} = 840$ besedah (štirje S dajo en gradnik, poleg tega so gradniki še štirikrat I, dvakrat P in enkrat M). Iskanih besed, ki nimajo vseh štirih S skupaj, je $1152 - 840 = 312$. ■

V uvodnem poglavju smo predstavili šahovski zgled, nismo pa zapisali rešitve.

**Zgled 3.9:** **Na šahovski deski $4 \times 4$ se kralj nahaja v spodnjem levem polju. Na koliko načinov lahko prispe na zgornje desno polje, če naj se po vsaki potezi približa cilju in**

1. **ne uporablja diagonalnih potez,**
2. **uporabi le eno diagonalno potezo,**
3. **uporablja katerokoli dovoljeno potezo?**




Označimo z D potezo, ko se kralj iz danega polja premakne v sosednje desno polje, z G pa označimo potezo, ko se kralj premakne navzgor, z $\Delta$ pa diagonalno potezo. V prvem primeru vsako pot lahko opišemo z besedo, ki vsebuje črke D in tri črke G. Taka beseda je permutacija, njihovo število pa $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. □

V drugem primeru pot opišemo z eno diagonalno potezo ($\Delta$), dvema desnima potezama (D) in dvema potezama navzgor (G). Zato je vseh poti z natanko eno diagonalno potezo $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$. □

Vse poti razdelimo na tuje razrede: brez diagonalne poteze, z eno diagonalno potezo, z dvema diagonalnima potezama in s tremi diagonalnimi potezami. V prvem razredu smo izračunali, je 20 poti, v drugem 30 poti, v tretjem so vse možne poti permutacije besede $\Delta\Delta$GD, torej $\frac{4!}{2!} = 12$ poti, s samimi diagonalnimi potezami pa je ena sama pot $\Delta\Delta\Delta$. Zato je po pravilu vsote vseh poti $20 + 30 + 12 + 1 = 63$. ■

## 3.6 Kombinacije s ponavljanjem

**Zgled 3.10:** **V slaščičarni imajo na voljo pet različnih vrst sladoleda: jagodo, čokolado, vanilijo, limono in lešnik. Naročimo porcijo treh kroglic sladoleda. Na koliko načinov lahko to storimo?**

Porcija treh kroglic sladoleda je neurejen izbor, torej kombinacija, le da se v tem primeru gradniki (kroglice sladoleda) lahko ponovijo. V porciji so lahko trije različni sladoledi, takih porcij bi bilo $\binom{5}{3} = 10$, lahko pa sta dve kroglici en sladoled, tretja je drug sladoled (takih kombinacij imamo $5 \cdot 4 = 20$), lahko pa so vse tri kroglice sladoleda enake (takih kombinacij je 5). Torej bi bilo vseh možnih porcij $10 + 20 + 5 = 35$.

Nalogo rešimo še na drug način. Vzemimo, da so sladoledi v slaščičarni razporejeni takole: na levi je jagodov sladoled, desno poleg njega čokoladni, potem vanilijev in nato limonin, na skrajni desni pa lešnikov sladoled. Zapisano predstavimo z naslednjo sliko:

| jagoda | čokolada | vanilija | limona | lešnik |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Če smo recimo izbrali porcijo z dvema limoninima kroglicama in eno jagodno kroglico, tako porcijo prikažemo s spodnjo sliko

| jagoda | čokolada | vanilija | limona | lešnik |
|---|---|---|---|---|
| • | | | • • | |

Sliki priredimo besedo •||| • •|, torej besedo s tremi znaki • in štirimi znaki |, ki nam pomenijo presledek med posameznima sladoledoma. Tudi obratno velja. Recimo beseda ||•|•|• pomeni porcijo vanilijevega, limoninega in lešnikovega sladoleda. Torej je različnih porcij toliko, kot je opisanih besed. Opisane besede so permutacije, ki jih izračunamo z znano formulo $\dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$. ■

Izraz $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$ je enak binomskemu simbolu $\binom{7}{3}$. Ali lahko posplošimo dobljeni rezultat? Vzemimo, da imamo $n$ gradnikov, ki se lahko poljubnokrat ponovijo pri sestavljanju elementa, ki naj ga sestavlja $r$ gradnikov (red). Vrstni red sestavljanja ni pomemben, važno je le, kateri gradniki so v njem. Gradnike ($n$) razvrstimo v vrsto, med njih pa postavimo $n-1$ črtic, ki ločijo elemente. Med ustrezne črtice postavimo $r$ kroglic, ki predstavljajo izbrane gradnike elementa. Tako dobimo besedo, ki ima dolžino $n+r-1$ znakov dveh vrst, $n-1$ je črtic, $r$ je kroglic. Vseh takih besed je $\dfrac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!}$ ali zapisano z binomskim simbolom $\binom{n+r-1}{r}$ ali $\binom{n+r-1}{n-1}$.

Vzemimo, da izbiramo med $n$ **različnimi gradniki**, ki jih imamo vsakega poljubno mnogo. Med temi gradniki izberemo $r$ **gradnikov**, vrstni red izbiranja **ni važen**, gradniki se lahko tudi **ponovijo**. Element, ki nastane pri takem izbiranju gradnikov, imenujemo **kombinacija reda** $r$ med $n$ gradniki. Število takih kombinacij označimo s ${}^{p}C_n^r$ in izračunamo s formulo

**kombinacije s ponavljanjem**

$$\boxed{{}^{p}C_n^r = \frac{(n+r-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}}$$

**Zgled 3.11:** **Na koliko načinov lahko 12 enakih predmetov porazdelimo v 6 predalov?**

Dvanajst predmetov označimo s kroglicami (red), šest predalov (različni elementi) ločimo s petimi črticami. Če v prvi predal ne razporedimo nobenega predmeta, v drugega postavimo dva predmeta, v tretjega ne damo predmetov, v četrtega postavimo 8 predmetov, v petega dva predmeta in v šestega ne postavimo nobenega predmeta, opisani razpored v predale prikažemo v obliki:

$$|\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

Vseh možnih razporeditev je $\frac{17!}{12!\cdot 5!} = \binom{17}{5} = 6188$. ■

**Zgled 3.12:** **V škatli imamo kroglice bele, modre in rdeče barve, vsake kolikor jih hočemo. Na koliko načinov lahko izberemo sedem krogel iz škatle?**

Vrstni red izbiranja ni pomemben, zato so izbori kombinacije. Ker se kroglice lahko ponovijo, so izbori kombinacije s ponavljanjem elementov. Izbiramo sedem krogel, torej je $r = 7$, različni gradniki pa so trije ($n = 3$). Kombinacij je potem $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$. ■

# 4 Binomski izrek

Na začetku se spomnimo, da binomski simbol $\binom{n}{r}$ pomeni število **kombinacij brez ponavljanja** reda $r$ med $n$ elementi in, da binomski simbol izračunamo s formulama

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \quad \text{ali} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Pokazali smo tudi, da velja simetrija

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

in to simetrijo pojasnili tudi kombinatorično, se pravi takih izborov, da med $n$ gradniki izberemo $r$ gradnikov, je prav toliko, kot je ostankov, torej izborov, ko bi izbrali $n-r$ gradnikov.

**nekaj lastnosti binomskih simbolov**

**Zgled 4.1: Preveri, da velja**

$$\boxed{\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \ \text{ in } \ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n}$$

**ter pojasni kombinatorično ozadje dobljenih formul.**

$\binom{n}{n}$ kombinatorično pomeni število izborov $n$ gradnikov med $n$ gradniki, pri tem pa vrstni red ni pomemben. Očitno je tak izbor en sam, zato je $\binom{n}{n} = 1$. Če upoštevamo simetrijo binomskih simbolov, je potem $1 = \binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = \binom{n}{0}$. Rezultat nima pravega kombinatoričnega ozadja, privzememo ga kot definicijo, tako kot smo privzeli $0! = 1$.

Število $\binom{n}{1}$ izračunamo z $\frac{n}{1} = n$, kombinatorično pa $\binom{n}{1}$ pomeni, da je toliko različnih izborov enega gradnika med $n$ gradniki. Drugi del formule je le simetrična verzija simbola $\binom{n}{1}$. ■

**Zgled 4.2: Pokaži naslednje trditve za množico $A$, ki ima $n$ elementov:**

1. **Množica $A$ ima $\binom{n}{k}$ podmnožic s $k$ elementi.**
2. **Potenčna množica $\mathcal{P}A$ množice $A$ (ta ima za elemente vse podmnožice množice $A$, vključno s prazno in celo množico $A$) ima $2^n$ elementov.**
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

Podmnožica množice $A$ vsebuje izbor elementov iz množice $A$. Če je v podmnožici $k$ elementov, smo izbrali iz množice $A$ toliko elementov, pri tem pa vrstni red izbiranja ni bil važen. Zato je takih množic $\binom{n}{k}$. □

Potenčna množica množice $A$ ima za elemente podmnožice množice $A$. Kako sestavimo podmnožico? Tako da izberemo nekaj elementov in jih proglasimo za elemente podmnožice. Kako izbiramo elemente? Za vsak element, od prvega do zadnjega, množice $A$ se vprašamo, ali naj bo v podmnožici ali naj ne bo v podmnožici, ki jo sestavljamo. Torej imamo pri vsakem elementu (vsaki fazi izbiranja) na razpolago dve možnosti, po pravilu produkta pa potem za vse izbore (=podmnožice) $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-krat} = 2^n$ možnosti. Zato je moč (= število elementov) potenčne množice $\mathcal{P}A$ enako $2^n$. □

Vse podmnožice množice $A$ razdelimo na tiste, ki so brez elementov (= prazna množica $\emptyset$), na tiste z enim elementom (=singeltoni), tiste z dvema in tako dalje do tiste, ki ima vse elemente dane množice (= množica $A$ sama). Tako potenčno množico razbijemo na paroma tuje razrede, ki imajo zapored $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ elementov. Uporabimo pravilo vsote in dobimo ustrezno formulo $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$. ■

**Zgled 4.3: Pokaži, da za binomske simbole velja naslednja Pascalova formula**

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Zapišemo desno stran s fakultetami, ju seštejemo in uredimo do leve strani:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot r + (n-1)! \cdot (n-r)}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot \overbrace{(r+(n-r))}^{=n}}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Dokažimo trditev še kombinatorično. Simbol $\binom{n}{r}$ pomeni število vseh podmnožic z $r$ elementi v množici z $n$ elementi. Izberimo določen element v množici $A$, recimo element $x$. Vse podmnožice z $r$ elementi razdelimo v dve skupini: tiste, ki vsebujejo $x$, in tiste, ki $x$ ne vsebujejo. V podmnožicah prve skupine moramo poleg $x$ izbrati še $r-1$ elementov med $n-1$ elementi, zato imamo $\binom{n-1}{r-1}$ možnih izborov, v drugi skupini pa moramo izbrati še $r$ elementov med $n-1$ elementi ($x$ moramo izločiti iz izbiranja), torej $\binom{n-1}{r}$. Skupini nimata skupnih elementov, zato sta tuji. Uporabimo pravilo vsote in dobimo Pascalovo formulo.
Kombinatorični dokaz ponazorimo na konkretnem primeru. Vzemimo množico $A = \{1,2,3,4,5\}$ in vse njene podmnožice z dvema elementoma: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}\}$. Modro smo označili tiste podmnožice, ki vsebujejo 1, z rdečo tiste, ki ne vsebujejo 1. Prve so 4 $(=\binom{4}{1})$, drugih je 6 $(=\binom{4}{2})$, vseh skupaj pa je $\binom{5}{2} = 10 = 4 + 6 = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$. ■

Izraz $x + y$, kjer sta $x$ in $y$ poljubni realni (ali kompleksni) števili, imenujemo **binom** ali slovensko **dvočlenik**. V nižjih razredih smo se učili, da je $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ in $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. V tem poglavju nas bo zanimalo, kako lahko zapišemo brez oklepajev potenco binoma $(x+y)^n$ za poljubno naravno število $n \in \mathbb{N}$. Pravimo tudi, da binom razvijemo v vrsto (vsoto).

Ko smo odpravljali oklepaje v kvadratu binoma $(x+y)^2$, smo najprej zapisali $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$ in potem vsak člen v prvem oklepaju zmnožili z vsakim členom iz drugega oklepaja, enake člene v dobljenih štirih členih pa združili ($(x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$). Podobno postopamo pri kubu (tretji potenci) binoma $(x+y)^3$. Tudi tu potenco zapišemo s faktorji, člene v faktorjih pa obarvajmo različno:

$$(x+y)^3 = (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) = (xx + xy + xy + xy) \cdot (x+y) =$$

$$= xxx + xyx + xyx + xyx + xxy + xyy + xyy + xyy = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Zakaj smo člene v faktorje obarvali različno? Da opazimo, da po odpravi oklepajev nastane osem členov, v vsakem pa so po trije faktorji različnih barv. Torej je en faktor iz prvega oklepaja, drugi iz drugegega in tretji iz tretjega oklepaja. Tudi v primeru binoma $(x+y)^n$ se dogaja podobno. Iz vsakega oklepaja izberemo en člen, bodisi $x$ bodisi $y$, izbrane člene pa množimo. Če iz $k$ oklepajev izberemo $y$, iz ostalih oklepajev izberemo $x$, dobimo člen $x^{n-k}y^k$. Koliko takih členov dobimo? Toliko, kot imamo možnosti izbire $k$ členov $y$ iz $n$ oklepajev, torej $\binom{n}{k}$ členov. Tako je člen $x^n$ ena sam ($\binom{n}{0}$, nič $y$-ov), členov $x^{n-1}y$ je $\binom{n}{1} = n$ (en $y$), členov $x^{n-2}y^2$ je $\binom{n}{2}$ in tako dalje. Zapišimo (ta zapis imenujemo **binomski izrek**):

**razvoj potence binoma**

$$\boxed{(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \binom{n}{n}y^n}$$

Člene razvoja zapišemo s padajočimi potencami prvega člena ($x$). Člene zapišimo kot zaporedje $c_k$ od leve proti desni. Razvoj ima $n+1$ členov, $k$-ti člen pa uganemo z ne pretežkim razmislekom (opazujemo red v binomskih simbolih: $0, 1, 2, \ldots, k-1, k, \ldots, n$):

$$\boxed{c_k = \binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}}$$

V nižjih letnikih smo binom razvili s pomočjo Pascalovega trikotnika, ki nam je prikazal koeficiente členov razvoja:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | | | | | | | 1 | | | | | | |
| $n=1$ | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| $n=2$ | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| $n=3$ | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| $n=4$ | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| $n=5$ | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| $n=6$ | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

V posameznih vrsticah so zapored koeficienti razvoja $(x+y)^n$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Koeficiente dobimo tako, da na robove trikotnika postavimo enice, vmesne člene pa dobimo tako, da seštejemo sosednja člena v zgornji vrstici in ju zapišemo v spodnji vrstici v sredino med njima. Tako z uporabo Pascalovega trikotnika zapišemo, da je

$$(x^2+y)^5 = x^{10} + 5x^8y + 10x^6y^2 + 10x^4y^3 + 5x^2y^4 + y^5$$

Števila v Pascalovem trikotniku so pravzaprav binomski simboli (kar pojasni ime binomski simboli), lastnost, da je število v vrstici Pascalovega trikotnika vsota sosednjih števil v zgornji vrstici, pa utemelji Pascalova lastnost binomskih simbolov $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$. Tako je recimo $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2}$, kot je prikazano na sliki.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
n=2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
n=3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
n=4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
n=5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
n=6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

**Zgled 4.4: Reši naslednje naloge:**

1. **Izračunaj z binomskim izrekom na dve decimalni mesti natančno vrednost $1,02^{30}$.**
2. **Zapiši tisti člen v razvoju binoma $(x^3 - x^2y^2)^n$, ki ima obliko $\pm ax^{16}y^{10}$.**
3. **Če binom $\left(\sqrt{a} - \frac{3}{a}\right)^{15}$ razvijemo po potencah spremenljivke $a$, zapiši tisti člen, ki ima potenco $a^3$.**
4. **Izračunaj $x \in \mathbb{R}$ tako, da bo tretji člen v razvoju binoma $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ enak 240.**

Število $1,02$ zapišemo v obliki $1 + 0,02 = 1 + 2 \cdot 10^{-2}$. Uporabimo formulo za razvoj binoma z $x = 1$ in $y = 2 \cdot 10^{-1}$. Potem je

$$1,02^{30} = (1+2\cdot10^{-2})^{30} = 1+\binom{30}{1}1^{29}(2\cdot10^{-2})^1+\binom{30}{2}1^{28}(2\cdot10^{-2})^2+\binom{30}{3}1^{27}(2\cdot10^{-2})^3+\binom{30}{4}1^{26}(2\cdot10^{-2})^4+\ldots =$$

$$1+60\cdot 10^{-2}+1740\cdot 10^{-4}+32480\cdot 10^{-6}+438480\cdot 10^{-8}+\ldots = 1+0,6+0,174+0,03248+0,0043848+\ldots \doteq 1,81$$

Ker moramo izračun zaokrožiti na dve decimalni mesti, smo sešteli le prvih pet členov razvoja, ki lahko še vplivajo na drugo decimalno mesto. Šesti člen razvoja je enak $\binom{30}{5}1^{25}(2\cdot 10^{-2})^5 = 4560192\cdot 10^{-10} = 0,0004560192$ in ne vpliva več na drugo decimalno mesto, še manj pa vplivajo naslednji členi, ki vsebujejo potence $10^{-12}, 10^{-14}, \ldots$. □

Splošni, $k$-ti po vrsti, člen v razvoju binoma je $\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$. V našem primeru je to

$$\binom{n}{k-1}(x^3)^{n-k+1}(-x^2y^2)^{k-1} = (-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}x^{3n-3k+3}x^{2k-2}y^{2k-2} = (-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}x^{3n-k+1}y^{2k-2}$$

Iščemo tisti člen, ki ima pri $x$ stopnjo 16, pri $y$ pa 10. Torej je $3n-k+1=16$ in $2k-2=10$. Odtod izračunamo $k=6$ in $n=7$. Tako je iskani člen $(-1)^5\binom{7}{5}x^{16}y^{10} = -21x^{16}y^{10}$ □

Zapišimo splošni člen razvoja, tokrat v obliki $\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$:

$$\binom{15}{k}(\sqrt{a})^{15-k}\left(-\frac{3}{a}\right)^k = (-1)^k\cdot 3^k\binom{15}{k}a^{\frac{15-k}{2}}a^{-k} = (-1)^k\cdot 3^k\binom{15}{k}a^{\frac{15-k}{2}-k} = (-1)^k\cdot 3^k\binom{15}{k}a^{\frac{15-3k}{2}}$$

Ker iščemo člen s potenco $a^3$, je $\frac{15-3k}{2}=3$ in tako $k=3$. Torej je iskani člen četrti in je enak $-12285a^7$. □

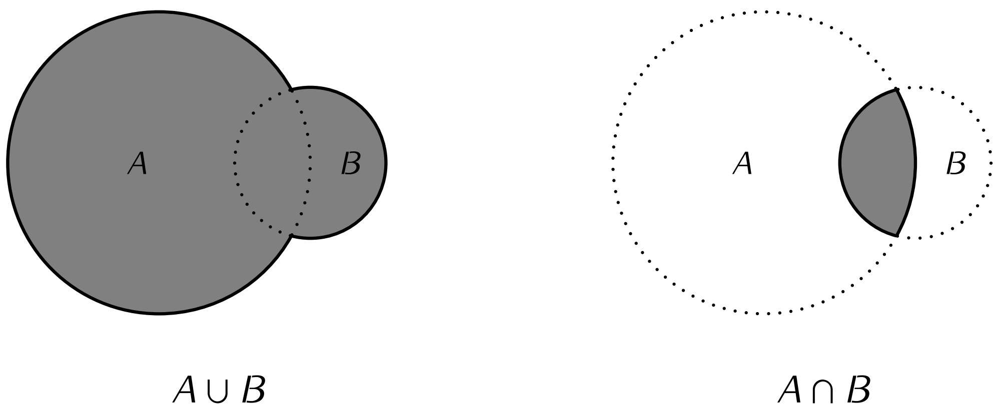
Člena binoma zapišemo s potencami: $2\sqrt[x]{2^{-1}} = 2\cdot 2^{-\frac{1}{x}} = 2^{\frac{x-1}{x}}$ in $\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}} = 2^2\cdot 2^{\frac{2}{x-4}} = 2^{\frac{2x-6}{x-4}}$
Tretji člen razvoja zapišemo in uredimo:

$$\binom{6}{2}\left(2^{\frac{x-1}{x}}\right)^4\left(2^{\frac{2x-6}{x-4}}\right)^2 = 15\cdot 2^{\frac{4x-4}{x}}\cdot 2^{\frac{4x-12}{x-4}} = 15\cdot 2^{\frac{4x-4}{x}+\frac{4x-12}{x-4}} = 15\cdot 2^{\frac{4x^2-16x-4x+16+4x^2-12x}{x(x-4)}} = 15\cdot 2^{\frac{8x^2-32x+16}{x(x-4)}}$$

Ker je iskani člen enak 240, je $2^{\frac{8x^2-32x+16}{x(x-4)}} = 16$. Zato je $\frac{8x^2-32x+16}{x(x-4)} = 4$ in tako $8x^2-32x+16 = 4x^2-16x$ ter $x^2-4x+4=0$. Rešitev zadnje enačbe je $x=2$. ■

# 5 Pravilo vključitev-izključitev

Spomnimo se, da je **unija** $A \cup B$ množic $A$ in $B$ množica, ki vsebuje elemente, ki ležijo **v vsaj eni od množic**, torej elemente, ki ležijo bodisi v $A$, bodisi v $B$, bodisi v obeh množicah hkrati. Drugače definiramo presek $A \cap B$ množic $A$ in $B$, ki vsebuje elemente, ki ležijo **v obeh množicah hkrati**, torej v $A$ in $B$. Množice si grafično predstavljamo z Vennovimo diagrami, kjer so posamezne množice označene s krogi.



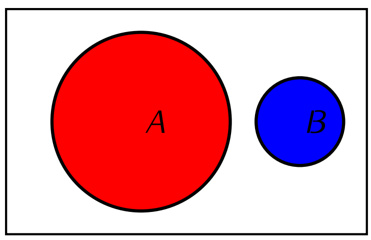

Slika 22: Unija in presek množic z Vennovim diagramom

Število elementov množice imenujemo **moč** množice in ga označimo z $|A|$, če imamo v mislih moč množice $A$. Če imamo opravka s končno množico, je njena moč naravno število, če imamo opravka z neskončno množico, pa je njena moč neskončna. Za nas neskončna možnost ne bo zanimiva, ker se bomo ukvarjali le s končnimi množicami.

Vzemimo, da poznamo moči množic $A$ in $B$. Kolikšna je potem moč unije $A \cup B$? Ali je kar $|A \cup B| = |A| + |B|$? Oglejmo si naslednje Vennove predstave:

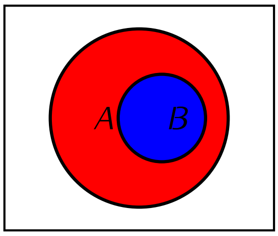
1. V primeru, ko sta si množici tuji (disjunktni), torej ko nimata skupnih elementov, je očitno

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|}$$



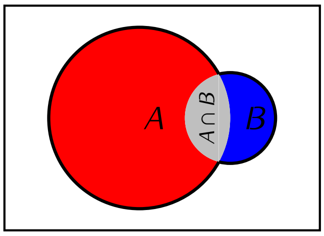
2. V primeru, ko je ena množica vsebovana v drugi (je podmnožica), torej ko je recimo $B \subset A$, je

$$\boxed{|A \cup B| = |A|}$$




3. V primeru, ko imata množice skupne elemente, torej ko je $A \cap B \neq \emptyset$, je

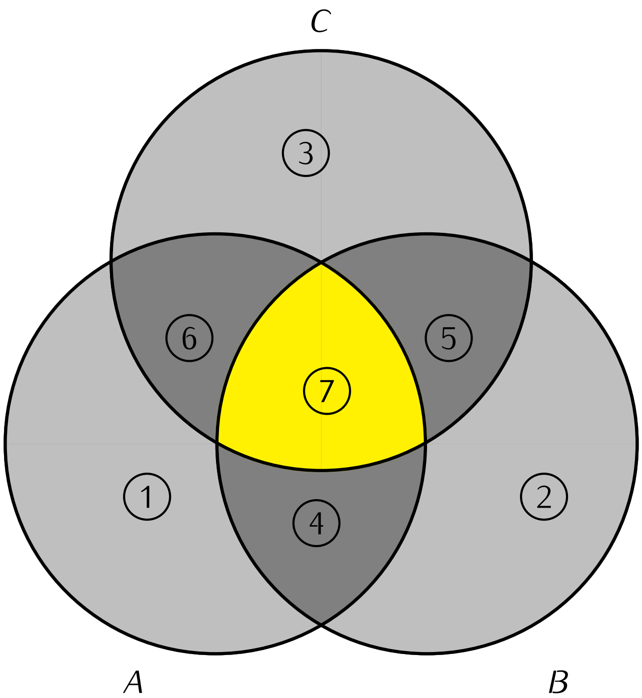
$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$




Pojasnilo zahteva kvečjemu zadnja formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ko seštejemo moči množic $A$ in $B$, smo presek $A \cap B$ šteli dvakrat, zato ga moramo enkrat odšteti, tj. presek $A \cap B$ smo enkrat preveč **vključili**, zato ga moramo enkrat **izključiti**. Odtod ima formula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ tudi ime pravila **vključitev - izključitev**.

**Zgled 5.1: V nekem razredu neke šole so pisali test, ki je bil sestavljen iz dveh nalog. Prvo nalogo je rešilo 25 učencev, drugo je rešilo 22 učencev. V razredu je 30 učencev, dva pa nista reševala testa. Koliko učencev je rešilo obe nalogi testa?**

Z $A$ označimo množico tistih učencev v razredu, ki so rešili prvo nalogo, z $B$ množico tistih, ki so rešili drugo nalogo. Potem je $|A| = 25, |B| = 22$ in $|A \cup B| = 30 - 2 = 28$, saj dva učenca nista reševala testa. Z uporabo formule vključitev-izključitev dobimo, da je $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 25 + 22 - 28 = 19$. Torej je 19 učencev rešilo obe nalogi. ■




Slika 23: Slika pravila vključitev-izključitev za tri množice $A, B, C$

Pravilo vključitev-izključitev velja tudi za več množic. Oglejmo si primer treh množic, recimo $A, B$ in $C$.

Kako izračunamo moč unije množic $A, B, C$, torej $|A \cup B \cup C|$? Če so množice paroma disjunktne, je $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$, v ostalih primerih pa spet izključujemo tiste dele, ki so bili prevečkrat vključeni. Unijo $A \cup B \cup C$ smo razdelili na sedem disjunktnih množic, katerih moči smo označili z $1$, ..., $7$ tako, kot je prikazano na sliki. Moč unije $|A \cup B \cup C|$ je ravno vsota $1$ do $7$. Potem je

$$|A| + |B| + |C| = (1 + 4 + 6 + 7) + (2 + 4 + 5 + 7) + (3 + 5 + 6 + 7) =$$

$$= 1 + 2 + 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7$$

Množice z močjo $4$, $5$, $6$ smo enkrat preveč vključili. Množico z močjo $7$ smo dvakrat preveč vključili. V pravilu vključitev-izključitev za dve množici smo potem izključili presek množic, v primeru treh množic pa izključimo tri preseke $A \cap B, A \cap C$ in $B \cap C$. Tako izključimo moči $(4+7) + (5+7) + (6+7)$. Torej nam ostanejo moči od $1$ do $6$, množico z močjo $7$ pa smo izgubili. Zato jo moramo vključiti. Ker je $7 = |A \cap B \cap C|$, je pravilo vključitev-izključitev za tri množice:

$$\boxed{|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) - |A \cap B \cap C|}$$

Z razmislekom razširimo pravilo vključitev-izključitev tudi za več množic. Splošno pravilo pravi, da moč unije množic izračunamo tako, da najprej seštejemo moči posameznih množic, od dobljene vsote odštejemo moči vseh mogočih dvojnih presekov; temu prištejemo vse mogoče trojne preseke; potem odštejemo vse četvorne preseke in tako dalje. Na koncu prištejemo ali odštejemo presek vseh množic. Kar smo opisali, lahko zapišemo s formulo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \pm |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

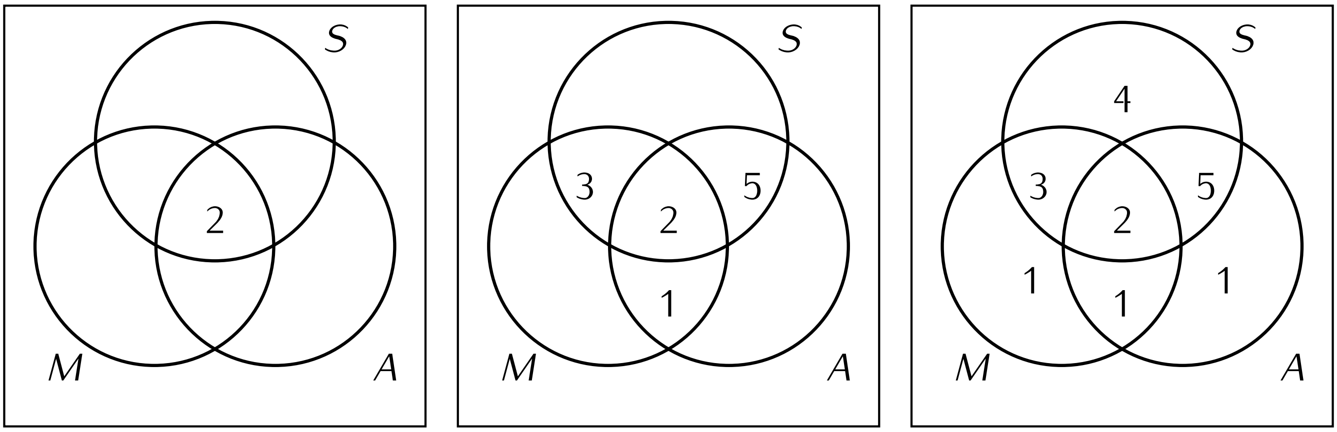
**Zgled 5.2:** **V razredu je 20 učencev, 7 med njimi redno dela domače naloge iz matematike, 9 jih dela domače naloge iz angleščine, 14 pa iz slovenščine. Naloge iz matematike in angleščine redno napravijo 3 dijaki, iz angleščine in slovenščine redno opravi nalogo 7 dijakov, iz matematike in slovenščine pa jih 5 redno napravi domačo nalogo. Iz vseh treh predmetov redno opravita nalogo 2 učenca. Koliko učencev ne opravi nobene naloge?**

Označimo z $M$ učenece, ki redno delajo naloge iz matematike, z $A$ tiste, ki redno opravijo naloge iz angleščine in s $S$ tiste, ki delajo naloge iz slovenščine. Potem je $|M| = 7, |A| = 9, |S| = 14, |M \cap A| = 3, |M \cap S| = 5, |A \cap S| = 7$ in $|M \cap A \cap S| = 2$. Potem je po pravilu vključitev-izključitev

$$|M \cup A \cup S| = |M|+|A|+|S|-(|M \cap A|+|M \cap S|+|A \cap S|)+|M \cap A \cap S| = 7+9+14-(3+5+7)+2 = 17$$

Torej 17 dijakov opravlja vsaj eno nalogo iz the treh predmetov, 3 $(= 20 - 17)$ pa ne delajo nalog.

Nalogo lahko rešimo tudi grafično. Narišemo tri množice-kroge, ki se medsebojno sekajo. V skupni presek vpišemo dijake, ki opravljajo vse tri naloge, nato pa v ostale disjunktne dele vpisujemo manjkajoča števila. Na sliki so prikazane tri faze vstavljanja števil. V prvi fazi vstavimo v $M \cap A \cap S$ število 2, torej število tistih, ki naredijo vse tri domače naloge, v drugi fazi dopolnimo preseke $M \cap A$, $M \cap S$ in $A \cap S$ z ustreznimi števili. Recimo $M \cap A$ ima 3 elemente, dva od njih sta že v preseku $M \cap A \cap S$, še enega pa dodamo v disjunktni del $M \cap A$. V tretji fazi vstavimo manjkajoča števila tistih, ki delajo




Slika 24: Slika k nalogi

le matematične, le naloge iz angleščine in le slovenske naloge, recimo pri množica $M$ ima 7 elementov, 6 (=1+2+3) od njih je v presekih z drugimi množicami, torej ostane le še eden, ki naredi le matematično domačo nalogo.

Skupno število tistih, ki opravijo vsaj eno nalogo dobimo tako, da seštejemo vsa nastala števila $1 + 1 + 1 + 3 + 2 + 5 + 4 = 17$. ■

# 6 Povzetek in naloge

Sredi petdesetih let prejšnjega stoletja je ameriški matematik George Polya v knjigi *How to Solve it* ponudil za reševanje problemov naslednje zaporedje:

1. Dobro preberi problem in poskrbi, da ga razumes
2. Razmisli o pogojih problema in o cilju, ki ga moraš doseči
3. Napravi načrt reševanja
4. Izvedi načrt
5. Preveri svojo rešitev

Tudi pri reševanju kombinatoričnih problemov je koristno slediti zapisanemu zaporedju reševanja. Seveda pa je pred tem potrebno obnoviti in osmisliti naslednje vsebine in formule:

1. Osnovni načeli kombinatorike: pravilo produkta in pravilo vsote.
2. Osnovni tipi izborov brez ponavljanja elementov:
   (a) Variacije; $\boxed{V_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$.
   (b) Permutacije; $\boxed{P_n = V_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!}$.
   (c) Kombinacije; $\boxed{C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r}}$.
3. Osnovni tipi izborov s ponavljanjem elementov:
   (a) Variacije; $\boxed{{}^pV_n^r = n^r}$.
   (b) * Permutacije; $\boxed{P_n^{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$.
   (c) * Kombinacije; $\boxed{{}^pC_n^r = \binom{n+r-1}{r}}$.
4. * Binomski izrek;

$$\boxed{(x+y)^n = \tbinom{n}{0}x^n + \tbinom{n}{1}x^{n-1}y + \tbinom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \underbrace{\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}}_{k\text{–ti člen}} + \tbinom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots + \tbinom{n}{n}y^n}$$

Če je binom odštevanje $(x-y)$, predznaki členov v razvoju alternirajo, kar pomeni, da spreminjajo predznake $+,-,+,-,+\ldots$.

5. * Pravilo vključitev-izključitev za dve in tri množice $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$

   $\boxed{|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) - |A \cap B \cap C|}$

# Naloge:

1. Tina ima v omari 4 kape in 3 naglavne rute. Na koliko načinov se lahko pokrije z enim pokrivalom? [ 7 ]

2. Tine ima v omari štiri4 pare čevljev, 3 srajce, 2 hlač, 5 parov nogavic in 4 pare spodnjic? Na koliko načinov se napravi v ene spodnjice, ene hlače, par nogavic, srajco in par čevljev? [ 480 ]

3. Nariši drevo deliteljev števila 72.

4. Koliko različnih števil dobimo, če množimo dve ali več števil med števili 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5?
   [Razmišljaj podobno kot, če bi iskal delitelje s praštevilskim razcepom; 43 ]

5. Študent se po predavanju vrača domov. Če je dobre volje, gre takoj domov, sicer pa se ustavi v enem od lokalov X, Y ali Z in popije coca colo ali fanto. Če postane boljše volje, se vrne domov, v nasprotnem primeru pa se ustavi še v enem lokalu in popije še eno coca colo ali fanto in se potem vrne domov.

   (a) Nariši drevo odločanja.
   (b) Na koliko različnih načinov se študent lahko vrne domov? [ 31 ]
   (c) Koliko je načinov, če se je ustavil v lokalu X? [ 16 ]
   (d) Študent na poti domov popije coca colo in Ffanto ter se ustavi v lokalu X. Na koliko načinov lahko to naredi? [ 8 ]

6. V razredu je 21 učencev. Na koliko načinov lahko izberejo predsednika, njegovega namestnika in blagajnika? [ 7980 ]

7. Iz števk 1, 2, 3, 4, 7, 9 sestavljamo trimestna števila z različnimi števkami.

   (a) Koliko števil lahko sestavimo? [ 120 ]
   (b) Koliko lihih števil lahko sestavimo? [ 80 ]
   (c) Koliko števil, večjih od 300 in manjših od 500, lahko sestavimo? [ 20 ]

8. Koliko je štirimestnih števil, pri katerih sta poljubni sosednji števki različni?
   [ 6561 ]

9. Iz mesta A peljejo v mesto B štiri ceste, iz mesta B v mesto C peljejo tri ceste. Na koliko načinov pridemo iz A v C preko kraja B? [ 12 ]

10. Iz <u>vseh</u> črk besede HRUŠKA sestavljamo besede, v katerih se črke ne ponavljajo. Koliko je:

    (a) vseh besed? [ 720 ]

    (b) takih besed, ki se začnejo in končajo s samoglasnikom? [ 240 ]

    (c) takih besed, ki imajo samoglasnike skupaj? [ 240 ]

    (d) takih besed, da je A pred U? [ 360 ]

11. Pet ljudi se želi skupaj fotografirati. Na koliko načinov lahko to storijo, če

    (a) vsi stojijo v isti vrsti? [ 120 ]

    (b) stojijo trije v prvi vrsti in dva v drugi vrsti? [ 120 ]

12. Koliko različnih tabel z m vrsticami in n stolpci lahko sestavimo, če v presečišče vrstice in stolpca vstavljamo števili 0 ali 1? [ $m \cdot n$ ]

13. Na polici je 9 različnih knjig: 4 črne in 5 rdečih. Na koliko različnih načinov jih lahko uredimo, če

    (a) ni nobenih dodatnih omejitev; [ 362880 ]

    (b) rdeče knjige morajo biti skupaj; [ 14400 ]

    (c) morajo biti rdeče knjige skupaj in črne skupaj; [ 2880 ]

    (d) se barve izmenjujejo? [ 2880 ]

14. Koliko je permutacij števk $0, 1, \ldots, 9$, pri katerih je na prvem mestu liha števka, na zadnjem mestu pa ena od števk 1, 2, 3, 4, 5? [ $22 \cdot 8! = 887040$ ]

15. S koliko ničlami se konča število 30!? Kaj pa 70!? (poskušaj rešiti nalogo brez računanja fakultete)? [ 7, 16 ]

16. Na koliko načinov lahko razporedimo v vrsto 4 zelene, 3 bele in 5 modrih kroglic različnih velikosti, če:

    (a) morajo modre stati skupaj in kroglice iste barve medseboj razlikujemo?[ $5! \cdot 8! = 4838400$ ]$5! \cdot$
    $8! = 4838400$

    (b) morajo modre stati skupaj in kroglic iste barve ne razlikujemo?[ $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = 280$ ]

    (c) bele ne stojijo skupaj na levem koncu? [ $12! - 3! \cdot 9! = 476824320$ ]

    Dobljene rezultate zaokroži na milijone. [ 5, 500 ]

17. Izračunaj točne vrednosti

(a) $\dfrac{105! - 103!}{104!}$ (b) $\dfrac{34! + 33! + 32!}{33! - 32!} \cdot V_8^3$

[ $105 - 1/104, 12138$ ]

18. Koliko je različnih permutacij besede LOGARITEM? Koliko teh permutacij se začne s T? [ $9! = 362880$, $8! = 40320$ ]

19. Koliko je različnih permutacij besede STATISTIKA? Koliko teh permutacij se začne s T? [ $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} = 75600$, $\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 22680$ ]

20. Reši enačbi

(a) $V_n^3 - V_n^2 = 40$ (b) $V_n^2 + V_{n+1}^1 + V_{n+2}^1 = 23$

[ $n = 5$; $n = 4$ ]

21. V šolski košarkaški ekipi je 12 igralcev, vsak izmed njih lahko igra na kateremkoli igralnem mestu. Na koliko načinov lahko ustrezni športni pedagog šole izbere začetno peterko? [ 792 ]

22. Na šahovskem turnirju je vsak igralec odigral eno partijo z drugim igralcem. Odigranih je bilo 78 partij. Koliko je bilo udeležencev turnirja? [ 13 ]

23. Na kongresu naravoslovcev se je zbralo 10 fizikov in 8 kemikov. Le enemu fiziku je ime France, le enemu kemiku Klemen. Udeleženci kongresa bodo izbrali iz svojih vrst 5-člansko predsedstvo, v katerem morajo biti 3 fiziki in 2 kemika.

   (a) Na koliko načinov lahko to storijo, če ni drugih omejitev? [ 3360 ]

   (b) Koliko delegacij je takih, da bo v predsedstvu vsaj ena od prej omenjenih oseb (fizik France ali kemik Klemen)? [ 1596 ]

24. V majhnem podjetju je zaposlenih 8 moških in 4 ženske. Štirje od njih se bodo udeležili seminarja.

   (a) Na koliko načinov lahko izberejo udeležence seminarja, da bo zastopanost spolov enaka? [ 168 ]

   (b) Na koliko načinov lahko izberejo udeležence seminarja, če se mora seminarja udeležiti več moških kakor žensk? [ 294 ]

   (c) Kolik delegacij je takih, da so vsi štirje udeleženci istega spola? [ 71 ]

25. Reklamna agencija zaposluje 12 manekenk: 5 svetlolask, 4 črnolaske in tri rjavolaske. Podjetje MODA d.o.o. za snemanje potrebuje pet manekenk. Na koliko načinov lahko izberejo manekenke, če:

   (a) izberejo poljubnih pet? [ 792 ]

(b) potrebujejo natanko tri rjavolaske? [ 36 ]

(c) potrebujejo najmanj tri črnolaske? [ 120 ]

(d) hočejo na snemanju svetlolasko Romino in črnolasko Metko, poleg njiju pa potrebujejo še natanko dve rjavolaski? [ 36 ]

26. V koordinatnem sistemu $x0y$ je narisana krožnica s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 2. Na krožnici je 10 točk, 4 so v I. kvadrantu, ostale v III. kvadrantu.

   (a) Koliko različnih tetiv določajo dane točke? [ $\binom{10}{2} = 45$ ]

   (b) Koliko tetiv ima eno krajišče v dani točki I. kvadranta, drugo pa v dani točki III. kvadranta? [ 24 ]

   (c) Koliko različnih trikotnikov določajo dane točke? [ 120 ]

   (d) Koliko trikotnikov, z oglišči v danih točkah, ima natanko dve oglišči v I. kvadrantu? [ $\binom{4}{2} \cdot 6 = 36$ ]

27. Marjetica ima 21 prijateljic in 11 prijateljev (le enemu prijatelju je ime Andrej in le enemu Borut). Na zabavo bo povabila 3 svoje prijateljice in 4 prijatelje.

   (a) Na koliko načinov lahko to stori? [ 438900 ]

   (b) Koliko je načinov, v katerih bosta med povabljenci Andrej in Borut?[ 47880 ]

28. Na koliko načinov lahko tri

   (a) enake

   (b) različne

   knjige lahko razdelimo trem učencem v razredu, če je v razredu 20 učencev? [ $\binom{20}{3} = 1140$; $\binom{20}{3} \cdot 3! = V_3^{20} = 6840$ ]

29. Reši enačbo $2\binom{n}{2} + \binom{n+1}{n-2} = 22$. [ $n = 4$ ]

30. Pri telefonskem anketiranju računalnik med 100 telefonskimi številkami naključno izbere 20 števil.Na koliko načinov lahko to stori, če

   (a) se števke v vzorcu ne ponavljajo? [ $\binom{100}{20} = 535983370403809682970$ ]

   (b) se števke v vzorcu lahko ponavljajo? [ $\binom{119}{20} = 24551856075980529765105$ ]

31. Z binomskim izrekom razvij naslednje potence:

   (a) $(y-2)^6$ [ $y^6 - 12y^5 + 60y^4 - 160y^3 + 240y^2 - 192y + 64$ ]

   (b) $(a - \sqrt[3]{b})^8$ [ $a^8 - 8a^7b^{(1/3)} + 28a^6b^{(2/3)} - 56a^5b + 70a^4b^{(4/3)} - 56a^3b^{(5/3)} + 28a^2b^2 - 8ab^{(7/3)} + b^{(8/3)}$ ]

(c) $(-1+2i)^7$ [ $-29+278i$ ]

32. Zapiši

(a) deseti člen razvoja $(x^2-2y^2)^{15}$ [ $-2\,562\,560x^{12}y^{27}$ ]

(b) šesti člen razvoja $(\sqrt{x}-2x)^8$ [ $\binom{8}{5}(x^{\frac{1}{2}})^3(-2x)^5$ ]

33. Poišči tisti člen v razvoju $(3xy^2+z^2)^7$, ki vsebuje $y^6$. [ $945x^3y^6z^8$ ]

34. Izračunaj po binomskem izreku približka za $0,994^4$ in $2,003^6$ tako, da upoštevaš prve tri člene v razvoju. Rezultat obakrat primerjaj z vrednostjo, ki jo da kalkulator.

35. Koliko je naravnih števil, ki so manjša ali enaka 99 in so pri tem deljiva s 3 ali s 5? [ 46 ]

36. V razredu je 30 učencev. Vsi so reševali test, sestavljen iz dveh nalog. Prvo nalogo je rešilo 70%, drugo pa 60% vseh učencev. Pet učencev ni rešilo nobene naloge. Koliko učencev je rešilo obe nalogi? [ 14 ]

37. V mestu so trije kinematografi: A, B in C. 20% prebivalcev obiskuje kinematograf A, 16% B, 14% C, 8% A in B, 5% A in C, 4% B in C ter 2% vse tri kinematografe. Kolikšen odstotek prebivalcev tega mesta hodi v kino? [ 35% ]

38. Od 100 učencev se jih 28 ukvarja s košarko, 30 z rokometom, 42 z nogometom, 10 s košarko in nogometom, 6 s košarko in rokometom, 5 z rokometom in nogometom, 3 pa z vsemi tremi športi. Koliko učencev se ne ukvarja z nobenim od naštetih športov? [ 20 ]

39. Naj bo $P$ množica vseh petmestnih naravnih števil. Izračunaj, koliko elementov imajo množice $A=\{n|\ (n\in P)\wedge(30|n)\}$, $B=\{n|\ (n\in P)\wedge(6|n)\wedge(8|n)\}$ in $C=A\cup B$. [Namig: v $B$ so petmestna naravna števila, ki so deljiva z najmanjšim skupnim večkratnikom števil 6 in 8, v $C$ pa taka, ki so deljiva z najmanšim skupnim večkratnikom števil 30 in 24 ] [ 3 000, 3 750, 6 000 ]