1. Naj bo $z = 2 + i$ in $w = 3 + 4i$. Izračunaj absolutno vrednost kompleksnih števil $z \cdot \overline{w}$ in $\frac{z}{w}$.

:

$$z \cdot \overline{w} = (2+i)\overline{(3+4i)} = (2+i)(3-4i) = 6 + 3i - 8i - 4i^2 = 10 - 5i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2+i| \cdot (3-4i)}{3+4i| \cdot (3-4i)} = \frac{10-5i}{25} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

2. (a) Kompleksno število $\frac{2+3i}{5+i}$ zapiši v obliki $x \cdot (1+i)$. Izračunaj x.

(b) Pokaži, da je $\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)^4$ realno število. Kolikšna je njegova vrednost?

:

$$\frac{2+3i}{5+i} = \frac{2+3i| \cdot (5-i)}{5+i| \cdot (5-i)} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$$

Torej je $x = \frac{1}{2}$. V primeru naloge (b) uporabimo rezultat prvega dela in uporabimo, da je $a^4 = (a^2)^2$.

$$\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)^4 = \left(\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4}(1+2i+i^2)\right)^2 = \left(\frac{2i}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

3. Reši enačbo $\frac{5+2i}{z} = 2 + i$.

: Nalogo rešimo na dva načina. V **prvem** načinu izrazimo z iz dane enačbe in opravimo nastalo deljenje:

$$z = \frac{5+2i}{2+i} = \frac{5+2i| \cdot (2-i)}{2+i| \cdot (2-i)} = \frac{12-i}{5} = \frac{12}{5} - \frac{1}{5}i$$

V drugem načinu odpravimo ulomke, neznano število z zapišemo z realnim in imaginarnim delom ($z = x + yi$) in uporabimo definicijo enakosti dveh kompleksnih števil. Tako dobimo sistem dveh linearnih enačb z neznankama x in y, ki ga seveda rešimo:

$$\frac{5+2i}{z} = 2+i \Rightarrow 5+2i = (2+i)(x+yi) \Rightarrow 5+2i = (2x-y)+(x+2y)i$$

Primerjava realnih in imaginarnih delov dá sistem $\begin{array}{rcrcr|} 2x & - & y & = & 5 \\ x & + & 2y & = & 2 \\ \hline \end{array}$. Rešitvi sistema sta števili $x = 12/5$ in $y = -1/5$.

4. Izračunaj kompleksno število z, če je $2\mathrm{Re}(z) - 3\mathrm{Im}(z) = 7$ in $\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Im}(z) = -3$ in $\mathrm{Re}(z)$ pomeni realni del ter $\mathrm{Im}(z)$ imaginarni del števila z.

: Označimo (zaradi manj "pisanja") $\mathrm{Re}(z) = a$ in $\mathrm{Im}(z) = b$. Potem je: $\begin{array}{rcrcr|} 2a & - & 3b & = & 7 \\ a & + & b & = & -3 \\ \hline \end{array}$ in zato $a = 12/5$ in $b = -13/7$ ter tako $z = \frac{12}{5} - \frac{13}{5}i$.

5. Izračunaj realni števili a in b tako, da bo $(a+b)(2+i) = b + 1 + (10+2a)i$.

: Števili na levi in desni uredimo do dvočlenika in nato primerjamo realna in imaginarna dela. Dobljeni sistem enačb uredimo, da dobimo: $\begin{array}{rcrcr|} 2a & + & b & = & 1 \\ -a & + & b & = & 10 \\ \hline \end{array}$, ki ima rešitev $a = -3$ in $b = 7$.

6. Izračunaj realni števili x in y tako, da bo $\dfrac{1}{x+iy} = 3 - 2i$.

: Rešujemo podobno kot v prejšnjih primerih. Rešitev: $x = 3/13$ in $y = 2/13$.

7. Naj bosta α in β rešitvi enačbe $x^2 + 2x + 26 = 0$. Izračunaj

   (a) α in β (b) $\alpha \cdot \beta$ (c) $\alpha + \beta$

: Diskriminanta kvadratne enačbe $x^2 + 2x + 26 = 0$ je enaka $D = 4 - 4 \cdot 26 = -100$. Zato je $\alpha = \dfrac{-2+10i}{2} = -1+5i$ in $\beta = -1-5i$. Enostaven račun ali pa uporaba Vietovih formul pove, dsa je potem $\alpha \cdot \beta = 26$ in $\alpha + \beta = -2$.

8. Število $-4+i$ je ena od rešitev enačbe $x^3+4x^2-15x-68=0$ Izračunaj ostale rešitve enačbe.

: Upoštevamo, da nastopajo kompleksne ničle polinoma z realnimi kooeficienti (naš ima celo celoštevilčne) v konjugiranih parih. Torej ima dana enačba, poleg rešitve $x_1=-4+i$, še rešitev $x_2=-4-i$. Tretjo rešitev x_3 poiščimo na tri načine.

(1) Dvakrat zapored uporabimo Hornerjev algoritem z rešitvami $-4+i$ in $-4-i$. Tako zmanjšamo stopnjo enačbe do prve stopnje:

	1	4	-15	-68
$-4+i$		$-4+i$	$-4i-1$	$64-4i^2=68$
	1	i	$-16-4i$	$\|\|0$
$-4-i$		$-4-i$	$16+4i$	
	1	-4	$\|\|0$	

Nastala je enačba $x-4=0$ z rešitvijo $x=4$.

(2) Polinom $x^3+4x^2-15x-68=0$ zapišemo v ničelni obliki: $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Ker je vodilni koeficient a enak 1, prva ničla $x_1=-4+i$, druga $x_2=-4-i$, tretjo pa označimo z $x_3=z$, je:

$$x^3+4x^2-15x-68=(x-(-4+i))(x-(-4-i))(x-z)$$

Zmnožimo faktorje na levi, pri tem upoštevamo, da je $(x-(-4+i))(x-(-4-i))=((x+4)-i)((x+4)+i)=(x+4)^2-i^2=x^2+8x+17$. Dobimo:$(x-(-4+i))(x-(-4-i))(x-z)=(x^2+8x+17)(x-z)=x^3+8x^2+17x-zx^2-8zx-17z=x^3+(8-z)x^2+(17-8z)x-17z$. Primerjamo istoležne koeficiente dobljenega in začetnega polinoma in pridelamo sistem treh enačb z eno neznanko:

$$8-z=4,\ 17-8z=-15,\ -17z=-68$$

Tak sistem je rešljiv (ima rešitev) le v primeru, ko obstaja tako število z, ki ustreza vsem trem enačbam. V našem primeru sistem reši $z=4$.

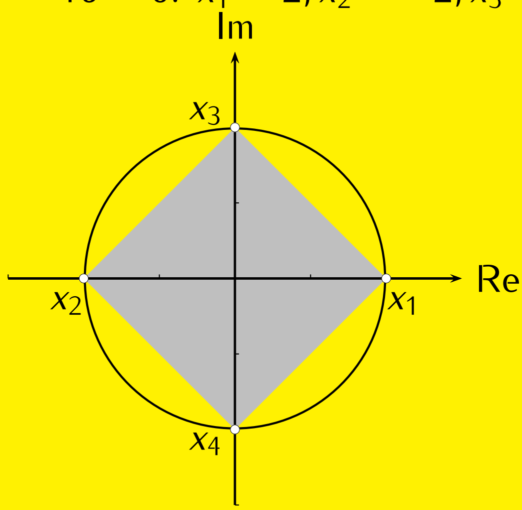
(3) Na tretji način do tretje rešitve enačbe pridemo takole. Polinom v splošni obliki je deljiv z vsakim faktorjem iz svoje ničelne oblike. Zato se deljenje polinoma $x^3+4x^2-15x-68$ s polinoma $(x-(-4+i))(x-(-4-i)=x^2+8x+17$ izide, v nastalem količniku pa dobimo tretjo rešitev enačbe. Opravimo deljenje:

$$\begin{array}{l}
(x^3+4x^2-15x-68)\ :\ (x^2+8x+17)\ =\ x-4\\
\underline{-x^3-8x^2-17x}\\
-4x^2-32x-68\\
\underline{+4x^2+32x+68}\\
0
\end{array}$$

in iz dobljenega količnika $x-4$ dobimo tretjo rešitev enačbe $x_3=4$.

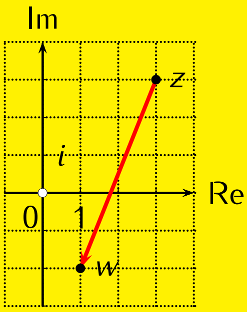
9. Prikaži rešitve enačbe $x^4-16=0$ v kompleksni ravnini.

: Ker je $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$, so rešitve enačbe $x^4-16=0$: $x_1=2, x_2=-2, x_3=2i, x_4=-2i$.



Na sliki opazimo, da točke, ki predstavljajo kompleksna števila x_1, x_2, x_3 in x_4 ležijo na krožnici s polmerom $2=\sqrt[4]{16}$ in so oglišča kvadrata. V splošnem velja, da rešitve binomske enačbe $z^n-a=0$ ležijo v kompleksni ravnini na krožnici s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$ in sestavljajo pravilni n - kotnik.

10. Na desni sliki sta v kompleksni ravnini prikazani števili z in w. Zapiši kompleksno število τ, ki ga na sliki predstavlja vektor $\overrightarrow{zw}$.



: Iz slike preberemo, da je $z = 3 + 3i$ in $w = 1 - 2i$. Potem je $\tau = w - z = (1 - 2i) - (3 + 3i) = -2 - 4i$. Prikažimo še s sliko: